演習問題

山下信雄

2018 年 7 月 25 日

1 モデル化

問 1 (support vector machine)

特徴ベクトル $x^i \in R^n$ とクラス $y_i \in \{-1, +1\}$ のデータペア (x^i, y_i) が m 個与えられているとする．このとき $y_i = +1$ であれば $f(x^i) \geq 1$, $y_i = -1$ であれば $f(x^i) \leq -1$ となる関数 $f : R^n \to R$ を求めたい．f が 1 次関数，つまり $w \in R^n, b \in R$ を用いて $f(x) = w^\top x + b$ とあらわされているとする．このとき，最適化問題

$$
\begin{array}{ll}
\min & C \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \max\{0, 1 - y_i(w^\top x^i + b)\} + \frac{1}{2}\|w\|^2 \\
\text{subject to} & w \in R^n,\ b \in R
\end{array}
\tag{1}
$$

の最適解 (w, b) によって，f を推定することを考える．ただし，C は正の定数である．

(i) 関数 $g : R^m \to R$ を $g(z) = \sum_{i=1}^m \max\{0, z_i\}$ と定義する．g がゲージ関数であることを示せ．

(ii) $w \in R^n$ と $t \in R$ の不等式制約 $\frac{1}{2}\|w\|^2 \leq t$ を 2 次錐制約で表せ．

(iii) 問題 (1) を一般化ゲージ最適化問題に定式化せよ．

問 2 (bilevel programming) 次の 2 段階最適化問題を考える．

$$
\begin{array}{ll}
\min & a^\top x + b^\top y \\
\text{subject to} & \|x\|_\infty \leq 1 \\
 & y \in S(x)
\end{array}
\tag{2}
$$

ただし，$a \in R^n, b \in R^m$ は与えられた定数ベクトルであり，$S(x)$ は x をパラメータとした次の最適化問題の解集合である．

$$
\begin{array}{ll}
\min_y & \frac{1}{2} y^\top M y + q^\top y \\
\text{subject to} & Ay + Bx \leq c
\end{array}
\tag{3}
$$

ここで，M は $m \times m$ の半正定値対称行列であり，$A \in R^{\ell \times m}$, $B \in R^{\ell \times n}$, $q \in R^m$, $c \in R^\ell$ は定数行列あるいは定数ベクトルである．

(i) 問題 (3) の Karush-Khun-Tucker 条件を書け．

(ii) 問題 (2) を一般化ゲージ最適化問題に定式化せよ．

2 ゲージ関数

問 3 (submodular 関数の Lovász 拡張) $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ とし，関数 $f : 2^V \to R$ を $f(\emptyset) = 0$ である submodular 関数とする． 次の関数 $\hat{f} : R^n \to R$ を f の Lovász 拡張という．

$$\hat{f}(x) = \sum_{k=1}^{n} x_{j_k} \left[f(\{j_1, \ldots, j_k\}) - f(\{j_1, \ldots, j_{k-1}\}) \right]$$

ただし，x_{j_k} は $x_{j_1} \geq x_{j_2} \geq \cdots \geq x_{j_n}$ となるように並び替えられた x の成分である．

(i) $\hat{f}$ が正斉次であることを示せ．

以下では，f は次の性質を満たすとする．

$$A \subseteq B \subseteq V \implies f(A) \leq f(B)$$

(ii) $\hat{f}$ は $R^n_+ = \{x \mid x \geq 0\}$ 上で非負であることを示せ．

(iii) $\hat{f} + \delta_{R^n_+}$ はゲージ関数であることを示せ．ここで，$\delta_{R^n_+}$ は R^n_+ の標示関数である．また，$\hat{f}$ が凸関数であることは既知としてよい．

問 4 (ゲージ関数の共役関数) $f : R^n \to R \cup \{\infty\}$ をゲージ関数とし，f の共役関数を f^*，極関数を f° とする．

(i) $f^*(0) = 0$ であり，任意の $y \in R^n$ に対して $f^*(y) \geq 0$ であることを示せ．

(ii) $f^\circ(y) \leq 1$ である y に対して，$f^*(y) = 0$ となることを示せ．

(iii) $f^\circ(y) > 1$ である y に対して，$f^*(y) = +\infty$ となることを示せ．(ヒント：$f^\circ(y) > 1$ より $f(x) \leq 1$ かつ $\langle x, y \rangle > 1$ となる x が存在する．)

問 5 (ノルムの和の極関数) $f_1 : R^n \to R\}$ と $f_1 : R^n \to R$ を適当なノルムとする．このとき，f_1 と f_2 の和の共役関数 $(f_1 + f_2)^*$ は

$$(f_1 + f_2)^*(y) = \inf\{f_1^*(u) + f_2^*(v) \mid y = u + v\}$$

となることが知られている．以下の問いに答えよ．(講演当日の問題では，前提知識が必要でしたので，少し易しくしました．)

(i) $g_1 : R^n \to R \cup \{\infty\}$ と $g_1 : R^n \to R \cup \{\infty\}$ を $g_1(0) = g_2(0) = 0$ で非負な正斉次関数とする．集合 $D_1, D_2 \subseteq R^n$ を $D_1 = \{y \mid g_1(y) \leq 1\}$，$D_2 = \{y \mid g_2(y) \leq 1\}$ と定義する．$D_1 = D_2$ であれば $g_1 = g_2$ となることを示せ．

(ii) 以下の式が成り立つことを示せ．

$$(f_1 + f_2)^*(y) = \begin{cases} 0 & \text{if there exist } u \text{ and } v \text{ such that } y = u + v, f_1^\circ(u) \leq 1, f_2^\circ(v) \leq 1 \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

(iii) f_1 と f_2 の和の極関数 $(f_1 + f_2)^\circ$ は次式で与えらえることを示せ．

$$(f_1 + f_2)^\circ(y) = \inf\left\{\max\left\{f_1^\circ(u), f_2^\circ(v)\right\} \mid y = u + v\right\}$$

3　双対問題

問 6 (second-order cone programming) 次の 2 次錐計画問題を考える．

$$
\begin{array}{ll}
\min & \langle c, x\rangle \\
\text{subject to} & Ax = b \\
 & x \in K^n
\end{array}
$$

ただし，$c \in R^n$, $A \in R^{m\times n}$, $b \in R^m$，$K^n = \left\{ x \in R^n \;\middle|\; x_1 \geq \sqrt{\sum_{i=2}^n x_i^2} \right\}$ である．

(i) 標示関数を用いないで，2 次錐計画問題を一般化ゲージ最適化問題に定式化せよ．

(ii) (i) で定式化した問題の双対問題 (D_M) から，以下の 2 次錐計画問題の双対問題を導出せよ．

$$
\begin{array}{ll}
\max & \langle b, w\rangle \\
\text{subject to} & c - A^\top w \in K^n
\end{array}
$$

問 7 (双対問題の双対問題) 一般化ゲージ最適化問題の双対問題 (D_M) の双対問題 (D_M) が以下のように表されることを示せ．

$$
\begin{array}{ll}
\min_{x,y} & \langle c, x\rangle + \langle d, y\rangle \\
\text{subject to} & Ax + By = b \\
 & Hx + Ky \geq e \\
 & \Phi(x) \leq y
\end{array}
$$