一次式とノルムで構成された最適化問題とその双対問題

第一部　ゲージ最適化問題とその応用問題

2018年7月25日
(本資料は7月30日に改訂)

京都大学大学院情報学研究科
山下信雄

本講演の概要

第1部　一般化ゲージ最適化問題とその応用問題

第2部　ゲージ関数とその諸性質

第3部　一般化ゲージ最適化問題の双対問題

I. ラグランジュ双対問題とFenchel双対問題
II. Gauge双対問題
III. 新しいタイプの双対問題

用語

- 凸関数(convex function)

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

- 標示関数(indicator function)

$$\delta_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad x \in S \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 実効定義域(effective domain)

$$\mathrm{dom}\ f = \left\{ x \in V \,\middle|\, f(x) < \infty \right\}$$

第1部　概要

1. 今回考える問題
   - ノルムとその一般化した関数(ゲージ関数)
   - 1次式とゲージ関数で構成された最適化問題

2. 応用問題
   ゲージ最適化問題
   - L1-L2最適化問題
   - 半正定値計画問題

   2次錐計画問題
   絶対値計画問題
   - 0-1整数計画問題
   - 線形な均衡制約つき最適化問題(MPEC)

今回考える問題の準備:
ゲージ関数(ノルムの一般化)

定義

以下の性質を満たす関数 $\rho : V \to R \cup \{\infty\}$

をゲージ関数(gauge function)という

(i) 非負の関数

(ii) 凸関数

(iii) 正斉次(Positively homogeneous)

$$\rho(tx) = t\rho(x) \quad \forall t \geq 0$$

例: ノルムは上記の条件を満たす

ノルムとゲージ関数

norm: 標準，基準.....

gauge: 基準，規格，標準寸法....

注意：今回の話はゲージ理論とは関係ない

ノルムはゲージ関数

非負性： $\|x\| \geq 0$

正斉次性： $\|tx\| = t\|x\| \ (t \geq 0)$

凸性： $\alpha \in [0,1]$ に対して

$$\|\alpha x + (1-\alpha)y\| \leq \|\alpha x\| + \|(1-\alpha)y\| = \alpha\|x\| + (1-\alpha)\|y\|$$

三角不等式

ノルムの例（有名なもの）

ベクトルのノルム

- pノルム　$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum |x_i|^p}$
- 無限大ノルム　$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$
- 1ノルム　$\|x\|_1 = \sum |x_i|$

⇒　正則化やスパース化によく使われる

行列のノルム　$\sigma(A)$を行列Aの特異値を並べたベクトルとする

- Frobenius ノルム　$\|A\|_F = \|\sigma(A)\|_2$
- Nuclear ノルム　$\|A\|_* = \|\sigma(A)\|_1$

⇒　Nuclearノルムは rank(A) の 凸緩和として使われる

ノルムの例(有名でないもの?)

$x_{(i)}$ ： $x \in R^n$ の成分を，絶対値の大きい順に並べたときの i 番目

$$|x_{(1)}| \geq |x_{(2)}| \geq \cdots \geq |x_{(n)}|$$

利用例 $\|x\|_\infty = |x_{(1)}| = \sum_{i=1}^{1} |x_{(i)}|,\quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_{(i)}|$

CVaRノルム (largest-*k* ノルム)

$$\|x\|_{\mathrm{CVaR},\alpha} = \sum_{i=1}^{n-n\alpha} |x_{(i)}|$$

ある線形計画問題の最適値として表せるため，
最適化モデルで使いやすい

応用： 金融のCVaR，ν-SVM

ノルムでないゲージ関数

- 0とのMax関数(演習問題)

$$\sigma(x) = \sum_{i=1}^{n} \max\{0, x_i\}$$

＊損失関数やペナルティ関数に使われる

- 凸錐 C の標示関数 $\delta_C(x)$

凸関数の標示関数 ⇒ 非負の凸関数

錐の標示関数 ⇒ 正斉次関数

今回考える問題の準備

- 変数 $x \in V$ を ℓ 個に分割する.

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_\ell) \in V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_\ell$$

- ベクトル値ゲージ関数: $\Phi : V \to (R \cup \{\infty\})^\ell$

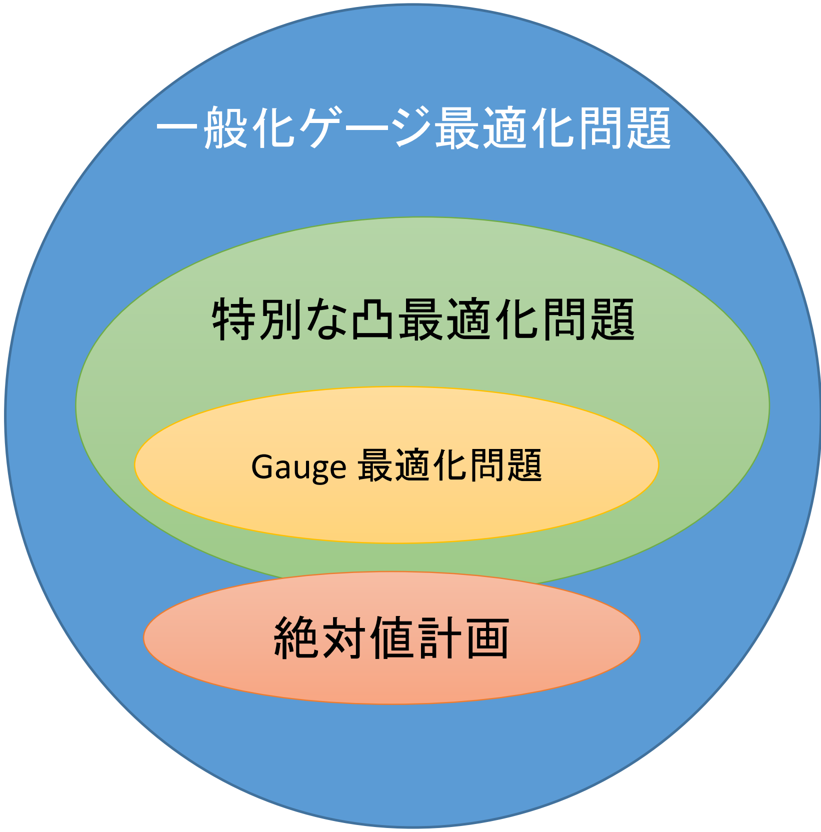
$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x_1) \\ \phi_2(x_2) \\ \vdots \\ \phi_\ell(x_\ell) \end{pmatrix}$$

ただし $\phi_i : V_i \to R \cup \{+\infty\}$ $(i = 1, \ldots, \ell)$ はゲージ関数

$$\mathrm{dom}\,\Phi \equiv \left\{ x \middle| x_i \in \mathrm{dom}\,\phi_i \ (i = 1, \ldots, \ell) \right\}$$

一般化ゲージ最適化問題

$$\begin{aligned} \min\ & \langle c, x\rangle + \langle d, \Phi(x)\rangle \\ \text{s.t.}\quad & Ax + B\Phi(x) = b \\ & Hx + K\Phi(x) \geq e \end{aligned}$$



ただし，c, b, d, e, A, B, H, K は適当な大きさのベクトルや行列(線形写像)

$B = 0,\quad d$ が非負ベクトル，K の各成分が0以下

⇒ 凸最適化問題

ゲージ最適化問題 (Gauge Optimization)

[Freund, 1987], [Friedlander, Macedo, and Pong, 2014], etc

$$
\begin{aligned}
&\min \ \rho(x) \\
&\text{s.t.} \quad \kappa(Ax-b) \le \tau
\end{aligned}
$$

- ρ と κ はゲージ関数
- A は線形写像, b は定数ベクトル
- τ は非負の定数
- 凸最適化問題である.

$$\Longleftrightarrow$$

$$
\begin{aligned}
&\min \left\langle 0, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho(x) \\ \kappa(y) \end{pmatrix} \right\rangle \\
&\text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} A & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma(x) \\ \kappa(y) \end{pmatrix} = b \\
&\qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma(x) \\ \kappa(y) \end{pmatrix} \ge -\tau
\end{aligned}
$$

ゲージ最適化の応用例1：L1-L2最適化

基底追跡ノイズ除去 (Basic pursuit denoising)

$$\begin{aligned} \min \quad & \|x\|_1 \\ \text{s.t.} \quad & \|Ax-b\| \le \varepsilon \end{aligned}$$

ゲージ最適化の応用例2:半正定値計画問題

(ちょっとトリッキーですが..)

$$
\begin{aligned}
&\min \langle C, X \rangle \\
&\text{s.t.} \quad \langle A_i, X \rangle = b_i \ (i = 1, \ldots, m) \\
&\qquad X \in S_+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\max \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\
&\text{s.t.} \quad C - \sum_{i=1}^{m} y_i A_i \in S_+
\end{aligned}
$$

S_+ は半正定値対称行列の集合

$\langle C, X \rangle = \mathrm{trace}(C^\top X)$

半正定値行列の集合の標示関数: $\delta_{S_+}(X)$

双対問題の実行可能解: $\bar{y}$ $\quad \bar{C} = C - \sum \bar{y}_i A_i$

X が実行可能解であれば, $\langle \bar{C}, X \rangle = \left\langle C - \sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i A_i, X \right\rangle = \langle C, X \rangle - \sum_{i=1}^{n} b_i \bar{y}_i \geq 0$

よって, $\rho(X) \triangleq \left\langle \bar{C}, X \right\rangle + \delta_{S_+}(X) \geq 0 \quad \Rightarrow$ (実行可能集合上で)Gauge関数

SDP ⇒ ゲージ最適化問題

$$\begin{aligned} \min\ & \langle C, X \rangle \\ \text{s.t.}\ & \langle A_i, X \rangle = b_i \ (i = 1, \ldots, m) \\ & X \in S_+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\ & \langle C, X \rangle + \sum_{i=1}^{m} b_i \bar{y}_i \\ \text{s.t.}\ & \langle A_i, X \rangle = b_i \ (i = 1, \ldots, m) \\ & X \in S_+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\ & \langle \bar{C}, X \rangle \\ \text{s.t.}\ & \langle A_i, X \rangle = b_i \ (i = 1, \ldots, m) \\ & X \in S_+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\ & \langle \bar{C}, X \rangle + \delta_{S_+}(X) \\ \text{s.t.}\ & \langle A_i, X \rangle = b_i \ (i = 1, \ldots, m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\ & \rho(X) \\ \text{s.t.}\ & \langle A_i, X \rangle = b_i \ (i = 1, \ldots, m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\ & \rho(X) \\ \text{s.t.}\ & \kappa(AX - b) \le 0 \end{aligned}$$

$$AX = \begin{pmatrix} \langle A_1, X \rangle \\ \vdots \\ \langle A_m, X \rangle \end{pmatrix}, \quad \kappa(y) = \|y\|$$

SDP ⇒ 一般化ゲージ最適化問題

$$\begin{aligned} &\min \langle C, X \rangle \\ &\text{s.t.} \quad \langle A_i, X \rangle = b_i \ (i = 1, \ldots, m) \\ &\qquad\quad X \in S_+ \end{aligned}$$

一次式が使えるので簡単

$$\begin{aligned} &\min \langle C, X \rangle \\ &\text{s.t.} \quad \langle A_i, X \rangle = b_i \ (i = 1, \ldots, m) \\ &\qquad\quad \delta_{S_+}(X) \le 1 \end{aligned}$$

2次錐計画問題
(Second-order cone programming problem)

$$\begin{aligned} &\min \ \langle c, x \rangle \\ &\text{s.t.} \quad Ax = b \\ &\qquad\ \ x \in K \end{aligned}$$

ただし，$K = K_{n_1} \times K_{n_2} \times \cdots \times K_{n_\ell}, \ \sum_{i=1}^{\ell} n_i = n$

K_p は p 次元の2次錐:

$$K_p = \left\{ x \in R^p \,\middle|\, x_1 \geq \sqrt{x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_p^2} \right\}$$

$$x_1 \geq \left\| \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \right\|$$

一次式とノルム

凸2次不等式制約 ⇒ 2次錐制約

$$x^\top A x + b^\top x + c \le 0$$ ただしAは半正定値対称

$$\Longleftrightarrow \quad \|Cx\|^2 + b^\top x + c \le 0 \qquad A = C^\top C,\ \ C \in R^{r\times n}$$

$$\Longleftrightarrow \quad 4\|Cx\|^2 + (1 + b^\top x + c)^2 \le (1 - b^\top x - c)^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sqrt{4\|Cx\|^2 + (1 + b^\top x + c)^2} \le 1 - b^\top x - c$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 - b^\top x - c \\ 1 + b^\top x + c \\ 2Cx \end{pmatrix} \in K_{r+2}$$

凸2次関数とノルムで表された目的関数や
凸2次不等式制約は
一次式とノルムで表せる

絶対値計画問題

[Mangasarian, 2007]

$$
\begin{aligned}
\min\ & \langle c, x\rangle + \langle d, |x|\rangle \\
\text{s.t.}\quad & Ax + B|x| = b \\
& Hx + K|x| \geq e
\end{aligned}
$$

ただし，
$$
|x| = \begin{pmatrix} |x_1| \\ |x_2| \\ \vdots \\ |x_n| \end{pmatrix}
$$

- 非凸な問題
- モデル化能力は高いがあまり研究されていない.

絶対値計画問題の応用例: 0-1最適化問題

$$\begin{aligned} &\min \ \langle c, x \rangle \\ &\text{s.t.} \quad Hx \le e \\ &\qquad\quad x_i \in \{0,1\} \ \ (i = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

$$x_i \in \{0,1\} \quad \Leftrightarrow \quad |y_i| = 1, \ x_i = \frac{1}{2}(y_i + 1)$$

$$\begin{aligned} &\min \ \langle c, x \rangle \\ &\text{s.t.} \quad Hx \le e \\ &\qquad\quad x_i = \frac{1}{2}(y_i + 1), \quad |y_i| = 1 \ \ (i = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

絶対値方程式と線形相補性問題

(Absolute Value Equations and Linear Complementarity Problem)
[Mangasarian, 2014]

絶対値方程式：　$Ax + B|x| = b$

線形相補性問題

$$z \geq 0,\ Mz + q \geq 0,\ z^\top (Mz + q) = 0$$

$\Updownarrow$

$$(M + I)z + q = |(M - I)z + q|$$

$\Updownarrow$　$y = (M - I)z + q$
$(M + I)z + q = |y|$

$$\begin{pmatrix} I & I - M \\ 0 & I + M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |y| \\ |z| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ -q \end{pmatrix}$$

LCP $z \geq 0,\ Mz+q \geq 0,\ z^\top(Mz+q)=0$

⇔

AVE $(M+I)z+q = |(M-I)z+q|$

各成分ごとに考えればよい.

⇐ $((M-I)z+q)_i \geq 0$ のとき, $z_i = 0,\ (Mz+q)_i \geq 0$

$((M-I)z+q)_i \leq 0$ のとき, $(Mz+q)_i = 0,\ z_i \geq 0$

よって, $(Mz+q)_i \geq 0,\ z_i \geq 0,\ (Mz+q)_i z_i = 0\ \ (i=1,\dots,m)$

⇒ $(Mz+q)_i \geq 0,\ z_i = 0$ のとき

$$0 \leq (Mz+q)_i = ((M+I)z+q)_i = ((M-I)z+q)_i = |(M-I)z+q|$$

$(Mz+q)_i = 0,\ z_i \geq 0$ のとき

$$0 \leq \quad (Mz+q)_i + \quad z_i \quad = ((M+I)z+q)_i$$

$$= -(Mz+q)_i - (-z_i) = -((M-I)z+q)_i = |(M-I)z+q|$$

LCP制約つき最適化問題（線形なMPEC）

$$
\begin{aligned}
\min\ & c_1^\top x + c_2^\top y \\
\text{s.t.}\quad & Ax \le b \\
& y \ge 0,\ My + Nx + q \ge 0, \\
& y^\top (My + Nx + q) = 0
\end{aligned}
$$

この問題は一般化ゲージ最適化問題として書ける.
（演習問題）

一次式とノルムで構成された最適化問題とその双対問題

第2部　ゲージ関数とその性質

京都大学大学院情報学研究科
山下信雄

第2部の概要

1. ゲージ関数
2. 共役関数
3. ゲージ関数の極関数
4. ゲージ関数の共役関数

ゲージ関数(再掲)

定義

以下の性質を満たす関数 $\rho : V \to R \cup \{\infty\}$

をゲージ関数(gauge function)という

(i)　非負の関数

(ii)　凸関数

(iii)　正斉次(Positively homogeneous)

$$\rho(tx) = t\rho(x) \quad \forall t \geq 0$$

共役関数とその諸性質
(室田先生の予習資料)

凸関数 f の共役関数(ルジャンドル変換)

$$f^*(y) = \sup_x \{\langle y, x \rangle - f(x)\}$$

共役関数の諸性質:

- $f^{**} = (f^*)^* = f$
- $f(x) + f^*(y) \geq \langle x, y \rangle$
- f^* は凸関数

Fenchel双対のFenchel双対を考える上で重要

Fenchel双対の双対性で重要

Fenchel双対の凸性で重要

ゲージ関数の極関数

ゲージ関数 f の極関数(polar function)

$$f^{\circ}(y) = \sup\left\{\langle x, y\rangle \,\middle|\, f(x) \le 1\right\}$$

f がノルムのとき，f° は双対ノルム

参考：共役関数

$$f^{*}(y) = \sup_x \left\{\langle y, x\rangle - f(x)\right\}$$

双対ノルムの例

- L1ノルム $\|x\|_1$ ⇔ 無限大ノルム $\|x\|_\infty$
- pノルム

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum |x_i|^p} \iff \|x\|_q \quad \text{ただし}\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

- CVaRノルム $\|x\|_{\mathrm{CVaR},\alpha}$ ⇔ $\|x\|^{\circ}_{\mathrm{CVaR},\alpha} = \max\left\{\dfrac{\|x\|_1}{n-n\alpha}, \|x\|_\infty\right\}$

極関数の例

- 0とのMax関数

$$g(x)=\sum_{i=1}^{m}\max\{0,x_i\} \quad\Longleftrightarrow\quad g^{\circ}(y)=\begin{cases}\max_i y_i & \text{if} \quad y\geq 0\\ +\infty & \text{otherwise}\end{cases}$$

- 錐 C の標示関数 $\Longleftrightarrow$ 極錐 C° の標示関数 $\delta_{C^{\circ}}(x)$

$$\delta_C(x)$$

ただし

$$C^{\circ}=\{y\mid\langle x,y\rangle\leq 0\ \forall x\in C\}$$

極関数の諸性質

共役関数の諸性質(再掲)

- $f^{**} = (f^*)^* = f$
- $f(x) + f^*(y) \geq \langle x, y \rangle$
- f^* は凸関数

ゲージ関数の極関数の諸性質

- $f^{\circ\circ} = (f^\circ)^\circ = f$
- $f(x) \times f^\circ(y) \geq \langle x, y \rangle \quad \forall x \in \mathrm{dom}\ f, \forall y \in \mathrm{dom}\ f^\circ$
- f° はゲージ関数

Gauge双対のGauge双対を考える上で重要

Gauge双対の双対性で重要

Gauge双対の凸性で重要

「極関数 f° はゲージ関数」の証明

非負性: $f(0)=0$ より $f^\circ(y)=\sup_x\left\{\langle x,y\rangle \mid f(x)\le 1\right\}\ge 0$

正斉次性:

$$f^\circ(ty)=\sup_x\left\{\langle x,ty\rangle \mid f(x)\le 1\right\}=t\sup_x\left\{\langle x,y\rangle \mid f(x)\le 1\right\}=tf^\circ(y)$$

凸性:

$$\begin{aligned}
f^\circ(\alpha y+(1-\alpha)z) &= \sup_x\left\{\langle x,\alpha y+(1-\alpha)z\rangle \mid f(x)\le 1\right\}\\
&= \sup_{x,\hat{x}}\left\{\langle x,\alpha y\rangle+\langle \hat{x},(1-\alpha)z\rangle \mid f(x)\le 1,\ f(\hat{x})\le 1,\ x=\hat{x}\right\}\\
&\le \sup_x\left\{\langle x,\alpha y\rangle \mid f(x)\le 1\right\}+\sup_{\hat{x}}\left\{\langle \hat{x},(1-\alpha)z\rangle \mid f(\hat{x})\le 1\right\}\\
&= \alpha f^\circ(y)+(1-\alpha)f^\circ(z)
\end{aligned}$$

$f(x)\,f^{\circ}(y) \geq \langle x, y \rangle$ の証明

(i) $f(x)=0$ のとき，$\langle x, y \rangle \leq 0 \ \ \forall y \in \mathrm{dom}\ f^{\circ}$

そうでないとすると $\langle x, y \rangle > 0$
よって，$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \to +\infty \ \text{ as } \ \lambda \to +\infty$

$f(\lambda x) = \lambda f(x) = 0 \leq 1$ より

$$f^{\circ}(y) = \sup\left\{ \langle x, y \rangle \,\middle|\, f(x) \leq 1 \right\} = +\infty$$

これは　$y \in \mathrm{dom}\ f^{\circ}$ に矛盾

$f(x)f^{\circ}(y) \geq \langle x, y \rangle$ の証明(続き)

(ii) $f(x) > 0$ のとき,

$z = \dfrac{x}{f(x)}$　とすると

$$f(z) = f\left(\frac{x}{f(x)}\right) = \frac{1}{f(x)} f(x) = 1$$

よって,

$$\begin{aligned} f^{\circ}(y) &= \sup\left\{\langle x, y \rangle \mid f(x) \leq 1 \right\} \\ &\geq \langle z, y \rangle \\ &= \frac{1}{f(x)} \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

ゲージ関数の共役関数 (演習問題)

f をゲージ関数とする.

$$f^*(y) = \begin{cases} 0 & \text{if } f^\circ(y) \le 1 \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

C を錐とする.

$$\delta_C^* = \delta_C^\circ = \delta_{C^\circ}$$

ただし $C^\circ = \left\{ y \,\middle|\, \langle x, y \rangle \le 0 \;\; \forall x \in C \right\}$

一次式とノルムで構成された最適化問題とその双対問題

第3部　双対問題

京都大学大学院情報学研究科
山下信雄

第3部　概要

1. 双対問題とその応用
2. ゲージ最適化問題の双対問題
   I. ラグランジュ双対問題とFenchel双対問題
   II. Gauge双対問題
   III. 新しいタイプの双対問題
4. まとめ

数理最適化問題（主問題）

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(x) \\
\text{s.t.} \quad & h_i(x) = 0, \; i = 1, \dots, m \\
& g_j(x) \le 0, \; j = 1, \dots, r \\
& x \in X
\end{aligned}
$$

以下では

$$F = \left\{ x \,\middle|\, h_i(x) = 0 \; (i = 1, \dots, m), \; g_j(x) \le 0 \; (j = 1, \dots, r) \right\}$$

実行可能集合

$$S = \left\{ x \,\middle|\, x \in F, \; x \in X \right\}$$

双対問題とは

双対問題

$$\begin{aligned} \max \quad & \omega(\lambda, \mu) \\ \text{s.t.} \quad & \lambda \in R^m, \mu \in R^r \\ & \mu \geq 0 \end{aligned}$$

主問題

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & h_i(x) = 0, \ i = 1, \ldots, m \\ & g_j(x) \leq 0, \ j = 1, \ldots, r \\ & x \in X \end{aligned}$$

元の問題(主問題)を鏡で映したようなもの.

主問題		双対問題
最小化	⇔	最大化
決定変数の数	⇔	制約条件の数
制約条件の数	⇔	決定変数の数

双対問題の望ましい性質

- (弱)双対性：　それぞれの実行可能解　$x,\ (\lambda,\mu)$ に対して

$$f(x) \geq \omega(\lambda,\mu)$$

- (適当な仮定の下)双対問題の双対問題は主問題になる.

例

$$\begin{aligned} &\min \sum x_i \\ &\text{s.t.} \quad Ax = b \\ &\qquad\quad x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\max \ \langle b,\lambda\rangle \\ &\text{s.t.} \quad A^\top \lambda \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\max \ \sum \lambda_i \\ &\text{s.t.} \quad \lambda \leq 0 \end{aligned}$$

ラグランジュの双対問題

ラグランジュ関数:

$$L(x,\lambda,\mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(x) + \sum_{j=1}^{r} \mu_j g_j(x)$$

標示関数:

$$\delta_F(x) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad x \in F \equiv \{x \mid h_i(x) = 0,\ g_j(x) \le 0\} \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\delta_F(x) = \sup_{\lambda \in R^m,\, \mu \ge 0} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(x) + \sum_{j=1}^{r} \mu_j g_j(x) \right\}$$

主問題(元の問題)のmin-max表現

$$\min \ f(x) + \delta_F(x)$$
$$\text{s.t.} \quad x \in X$$

主問題の目的関数

$$f(x) + \delta_F(x) = f(x) + \sup_{\lambda \in R^m, \mu \geq 0} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(x) + \sum_{j=1}^{r} \mu_j g_j(x) \right\}$$
$$= \sup_{\lambda \in R^m, \mu \geq 0} \left\{ f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(x) + \sum_{j=1}^{r} \mu_j g_j(x) \right\}$$
$$= \sup_{\lambda \in R^m, \mu \geq 0} L(x, \lambda, \mu)$$

ラグランジュ双対問題

[主問題]

$$\min_{x \in X} \ \sup_{\lambda \in R^m, \mu \geq 0} L(x, \lambda, \mu)$$

[双対問題]

$$\max \inf_{x \in X} L(x, \lambda, \mu)$$

$$\text{s. t.} \quad \lambda \in R^m, \mu \geq 0$$

弱双対定理

双対問題の目的関数(必ず凹関数):

$$w(\lambda, \mu) = \inf_{x \in X} L(x, \lambda, \mu)$$

弱双対定理

$$f(x) \geq w(\lambda, \mu) \quad \forall x \in S, \lambda \in R^m, \mu \geq 0$$

⇒　下界値の計算に利用できる

強双対定理

$f, g_j \ (j = 1, \ldots, r)$: 凸関数

$h_i \ (i = 1, \ldots, m)$: 1次関数

適当な制約想定が成り立つ.

主問題に最適解が存在する.

↓

主問題と双対問題の最適値は一致する.

双対問題の利用１：感度解析

ラグランジュ双対問題の最適解には経済的な意味がある.

最適値関数

$$\theta(u) = \min\{ f(x) \mid h_i(x) = u_i \ (i = 1, \ldots, m),\ g_j(x) \le 0 (j = 1, \ldots, r)\}$$

ラグランジュ双対問題の最適解を (λ^*, μ^*) とする.

$$\frac{\partial \theta(0)}{\partial u_i} = \lambda_i^*$$

λ_i^* を制約条件 $h_i(x) = 0$ の潜在価格(シャドウプライス)という

双対問題の利用2：　解法の開発，解析

[解法]

- ラグランジュ緩和 (応用例：オンライン広告, 火力発電計画，etc)

  ⇒　並列化，逐次計算を可能にする.
- サポートベクターマシン
- etc

[解析]

- 乗数法(拡張ラグランジュ法)

  ⇔　双対問題では近接点法

  ＊Dual Augmented Lagrangian method [Tomioka,etc, 2011]はこの逆
- Alternating Direction Method of Multipliers (ADMM)

  ⇔　双対問題ではDouglas-Rachford Splitting

  (近接勾配法みたいなもの)

双対問題の利用３：ロバスト最適化

データが不確実なとき，最悪の場合を考えての最適化

ロバスト最適化

$$\min \quad f(x)$$
$$\text{s.t.} \quad g(x;u) \le 0 \quad \forall u \in U$$

不確実性集合

不確実なデータ

⇔

$$\min \quad f(x)$$
$$\text{s.t.} \quad \max_{u \in U} \; g(x;u) \le 0$$

半無限計画(semi-infinite programing)か，
制約条件中に最適化問題が含まれる問題になる.

双対問題の利用3：ロバスト最適化

制約条件中の問題

$$\begin{aligned} &\max \quad g(x;u) \\ &\text{s.t.} \quad u \in U \end{aligned}$$

ロバスト最適化

$$\begin{aligned} &\min \quad f(x) \\ &\text{s.t.} \quad \max_{u \in U} \ g(x;u) \le 0 \end{aligned}$$

強双対性が成り立てば等価

双対問題

$$\begin{aligned} &\min \quad \omega(x;\lambda) \\ &\text{s.t.} \quad \lambda \in \Lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\min \quad f(x) \\ &\text{s.t.} \quad w(x;\lambda) \le 0 \\ &\qquad\quad \lambda \in \Lambda \end{aligned}$$

$$\lambda \in \Lambda, \omega(x;\lambda) \le 0 \ \Rightarrow \max_{u \in U} g(x,u) \le \omega(x,\lambda) \le 0$$

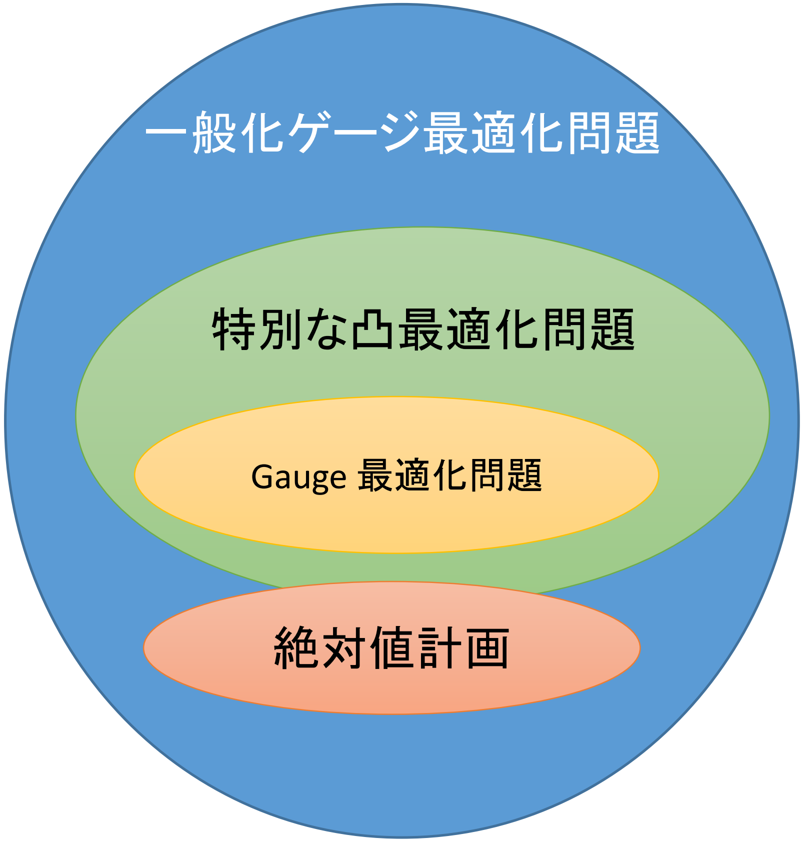
弱双対

第3部　概要

1. 双対問題とその応用
2. ゲージ最適化問題の双対問題
   I. ラグランジュ双対問題とFenchel双対問題
   II. Gauge双対問題
   III. 新しいタイプの双対問題
4. まとめ

一般化ゲージ最適化問題

$$
\begin{aligned}
\min\ & \langle c, x\rangle + \langle d, \Phi(x)\rangle \\
\text{s.t.}\ \ & Ax + B\Phi(x) = b \\
& Hx + K\Phi(x) \geq e
\end{aligned}
$$



ただし，c, b, d, e, A, B, H, K は適当な大きさのベクトルや行列

一般化ゲージ最適化問題の補正

一般化ゲージ最適化問題は，実効定義域外では，
定義が不明瞭になる場合がある.

そこで以下では，制約条件に実効定義域を加えた
次の問題を考える.

$$
\begin{aligned}
\min\ & \langle c, x\rangle + \langle d, \Phi(x)\rangle \\
\text{s.t.}\quad & Ax + B\Phi(x) = b \\
& Hx + K\Phi(x) \geq e \\
& x \in \operatorname{dom}\Phi
\end{aligned}
$$

ラグランジュ双対問題

ラグランジュ関数:

$$L(x,u,v) = \langle c, x \rangle + \langle d, \Phi(x) \rangle + \langle u, b - Ax - B\Phi(x) \rangle + \langle v, e - Hx - K\Phi(x) \rangle$$

目的関数:

$$\omega(u,v) = \inf_{x \in \operatorname{dom} \Phi} L(x,u,v)$$

- 陽に表しにくい. 制約がないときはどうする？

  → Fenchel 双対問題

- 他のタイプはないの？

  → Gauge 双対問題

Fenchel 双対問題

凸最適化問題

$$\min \quad f(Ax) + g(x)$$

＊標示関数を使えば，制約つきの問題も扱える.

$$\min \quad f(y) + g(x)$$
$$\text{s.t.} \quad y = Ax$$

$$\min \ f(x)$$
$$\text{s.t.} \quad x \in S$$

$$\Updownarrow$$

$$\min \ f(x) + \delta_S(x)$$

Fenchel双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & f(y) + g(x) \\ \text{s.t.} \quad & y = Ax \end{aligned}$$

$$L(x, y, \lambda) = f(y) + g(x) + \langle \lambda, Ax - y \rangle$$

$$\begin{aligned} \omega(\lambda) &= \inf_{x,y} \{ f(y) + g(x) + \langle \lambda, y - Ax \rangle \} \\ &= -\sup_{x,y} \{ \langle \lambda, -y \rangle - f(y) + \langle \lambda, Ax \rangle - g(x) \} \\ &= -\sup_{y} \{ \langle -\lambda, y \rangle - f(y) \} - \sup_{x} \{ \langle A^\top \lambda, x \rangle - g(x) \} \\ &= -f^*(-\lambda) - g^*(A^\top \lambda) \end{aligned}$$

ただし，f^* は以下で定義される共役関数(ルジャンドル変換)

$$f^*(y) = \sup_x \{ \langle y, x \rangle - f(x) \}$$

Fenchel 双対問題

$$\max - f^*(-\lambda) - g^*(A^\top \lambda)$$

共役関数の例:

線形関数

$$f(x) = c^\top x \quad \Rightarrow \quad f^*(y) = \begin{cases} 0 & \text{if } y = c \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

凸2次関数

$$f(x) = \frac{1}{2} x^\top A x \quad \Rightarrow \quad f^*(y) = \frac{1}{2} x^\top A^{-1} x$$

平行移動

$$f(x) = g(x-b) \quad \Rightarrow \quad f^*(y) = g^*(y) + b^\top y$$

分離可能な和

$$f(x^1, x^2) = g_1(x^1) + g_2(x^2) \quad \Rightarrow \quad f^*(y^1, y^2) = g_1^*(y^1) + g_2^*(y^2)$$

Fenchel 双対問題の例

$$\min_{x \in R^n, y \in R} \; C \sum_{t=1}^{T} \max\left\{0, |a_t^\top x + y - b_t| - \varepsilon\right\} + \frac{1}{2}\|x\|^2$$

Support Vector Regression

$$\min \frac{1}{2} \lambda K^\top \lambda - \sum_{t=1}^{T} b_t \lambda_t + \varepsilon \|\lambda\|_1$$

$$\text{s.t.} \quad \sum \lambda_t = 1$$

$$-C \le \lambda_t \le C \quad (t = 1, \ldots, T)$$

$$\lambda_t = \alpha_t - \beta_t, \;\; \alpha_t \ge 0, \;\; \beta_t \ge 0$$

$$\Rightarrow |\lambda_t| = \alpha_t + \beta_t$$

教科書によく出ているLagrange双対問題

$$\min \frac{1}{2} (\alpha - \beta) K^\top (\alpha - \beta) - \sum_{t=1}^{T} b_t (\alpha_t - \beta_t) + \varepsilon \sum_{t=1}^{T} (\alpha_t + \beta_t)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum (\alpha_t - \beta_t) = 1$$

$$0 \le \alpha_t, \beta_t \le C \quad (t = 1, \ldots, T)$$

第3部　概要

1. 双対問題とその応用
2. ゲージ最適化問題の双対問題
    I. ラグランジュ双対問題とFenchel双対問題
    II. Gauge双対問題
    III. 新しいタイプの双対問題
4. まとめ

Gauge 双対問題の動機

数学的興味:

Gauge関数の特性を生かした,

Lagrange双対問題とは違った双対問題はあるか？

工学的動機:

制約条件と目的関数にある定数行列を入れ替えたい.

Gauge最適化

$$\min \ \rho(x)$$

$$\text{s.t.} \quad \kappa(Ax-b) \le \tau$$

Lagrange双対問題

$$\max \ \langle b, \lambda \rangle - \tau \rho^{\circ}(\lambda)$$

$$\text{s.t.} \quad \kappa^{\circ}(A^{\top}\lambda) \le 1$$

- 大規模凸最適化の代表的な解法は, 実行可能集合の射影を計算することが多い.

Gauge双対性 [Freund, 1987]

ρ をgauge関数とし，次の二つの問題を考える.

$$\begin{aligned} &\min\ \rho(x) \\ &\text{s.t.}\quad x \in C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\min\ \rho^{\circ}(y) \\ &\text{s.t.}\quad y \in C^{1} \end{aligned}$$

注意　最小化問題

$$\begin{aligned} &\max\ \frac{1}{\rho^{\circ}(y)} \\ &\text{s.t.}\quad y \in C^{1} \end{aligned}$$

ただし，C は凸集合で，C^{1} を次式で定義する.

$$C^{1} = \left\{ y \,\middle|\, \langle x, y \rangle \geq 1 \ \ \forall y \in C \right\}$$

anti-polar という

$x \in C,\ y \in C^{1}$ のとき，

$$\rho(x)\rho^{\circ}(y) \geq \langle x, y \rangle \geq 1$$

これを弱双対と考える

$$\rho(x) \geq \frac{1}{\rho^{\circ}(y)}$$

Gauge双対問題

[Friedlander, Macedo, and Pong, 2014]

$C = \{x \mid \kappa(Ax - b) \leq \tau\}$ のとき $C^1 = \left\{ A^\top y \;\middle|\; \langle b, y \rangle - \tau\kappa^\circ(y) \geq y \right\}$

Gauge最適化問題

$$\min \ \rho(x)$$
$$\text{s.t.} \quad \kappa(Ax - b) \leq \tau$$

Gauge双対問題

$$\min \ \rho^\circ(A^\top y)$$
$$\text{s.t.} \quad \langle b, y \rangle - \tau\kappa^\circ(y) \geq 1$$

性質

- Lagrange双対の最適値を D_L , Gauge双対の最適値を D_G とすると

$$D_L D_G = 1$$

- Lagrange双対の最適解を λ^*, Gauge双対の最適解を y^* とすると

$$y^* = D_G \lambda^*$$

第3部　概要

1. 双対問題とその応用
2. ゲージ最適化問題の双対問題
   I. ラグランジュ双対問題とFenchel双対問題
   II. Gauge双対問題
   III. 新しいタイプの双対問題
4. まとめ

絶対値計画問題の双対問題 [Mangasarian, 2007]

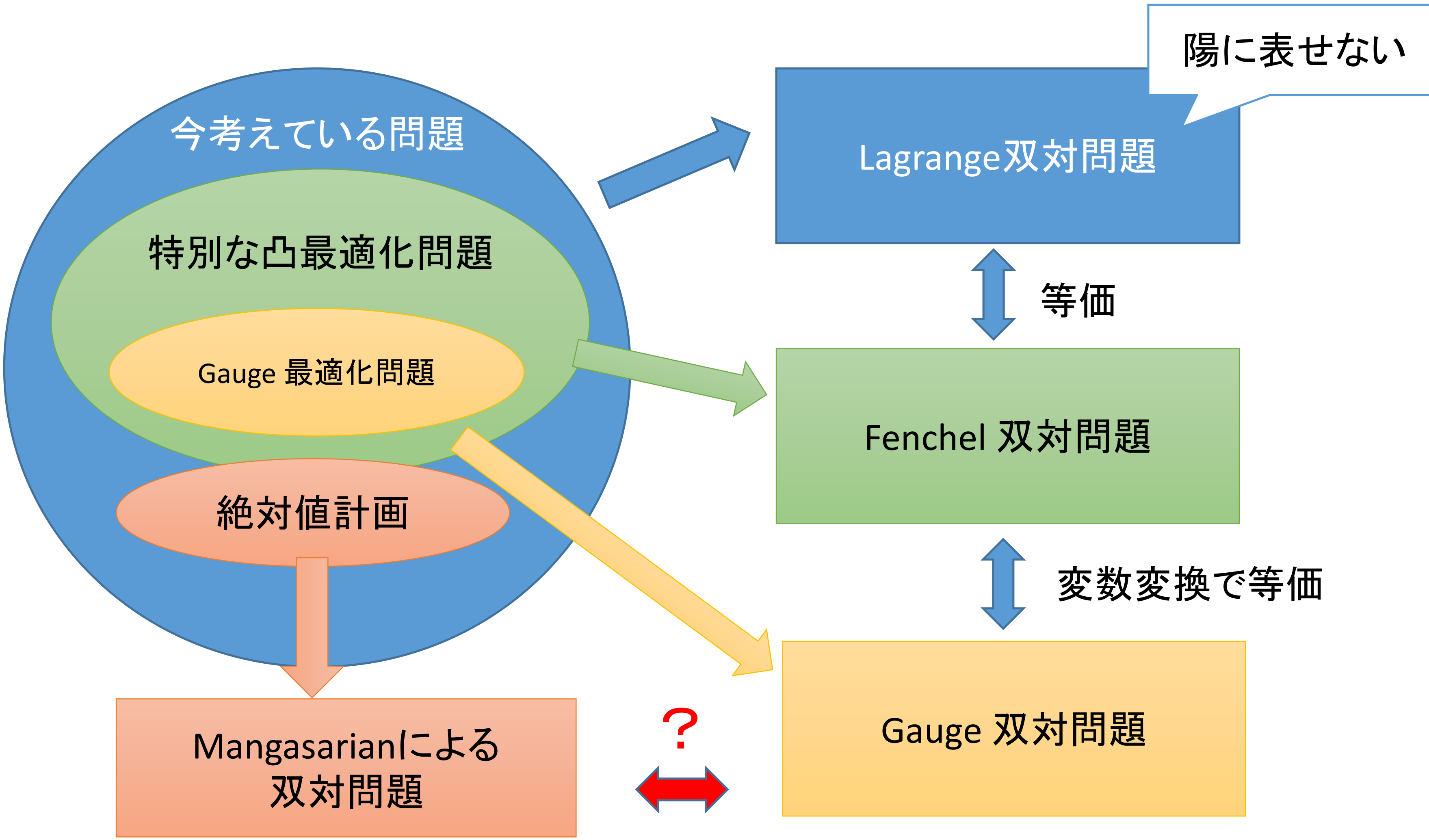
$$\begin{aligned} \min\ & \langle c, x\rangle + \langle d, |x|\rangle \\ \text{s.t.}\ & Ax + B|x| = b \\ & Hx + K|x| \geq e \end{aligned}$$

Mangasarianの双対問題

$$\begin{aligned} \max\ & \langle b, u\rangle + \langle e, v\rangle \\ \text{s.t.}\ & \left|A^\top u + H^\top v - c\right| + B^\top u + K^\top v \leq d \\ & v \geq 0 \end{aligned}$$

- 凸最適化問題(線形計画問題に変換可能)
- 弱双対定理が成り立つ[Mangasarian 2007]

これまでの双対問題のまとめ



一般化ゲージ最適化問題の双対問題の表現

[山中，山下，2018?]

$$
\begin{aligned}
(D_M)\quad & \max\ \langle b,u\rangle+\langle e,v\rangle \\
& \text{s.t.}\quad \Phi^0(A^\top u+H^\top v-c)+B^\top u+K^\top v\le d \\
& \qquad\quad v\ge 0
\end{aligned}
$$

ただし，

$$
\Phi^0(y)=\begin{pmatrix}\phi_1^0(y_1)\\ \phi_1^0(y_2)\\ \vdots \\ \phi_\ell^0(y_\ell)\end{pmatrix},\quad \phi_i^0 \text{ は } \phi_i \text{ の極関数}
$$

- 凸最適化問題
- $A^\top, B^\top, H^\top, K^\top$ は，より一般的には随伴作用素とする

双対問題(D_M)の例: SDP

$$\begin{aligned}\min\ & \langle C, X\rangle \\ \text{s.t.}\ & \langle A_i, X\rangle = b_i\ (i=1,\dots,m) \\ & \delta_{S_+}(X) \le 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\min\ & \langle C, X\rangle + 0\times\delta_{S_+}(X) \\ \text{s.t.}\ & \langle A_i, X\rangle + 0\times\delta_{S_+}(X) = b_i\ (i=1,\dots,m) \\ & \langle 0, X\rangle - \delta_{S_+}(X) \ge -1 \\ & X \in \operatorname{dom}\delta_{S_+}\end{aligned}$$

双対問題

$$\begin{aligned}\max\ & \langle b, u\rangle - v \\ \text{s.t.}\ & \delta_{(S_+)^\circ}\left(\sum_{i=1}^m A_i u_i - C\right) - v \le 0 \\ & v \ge 0\end{aligned}$$

$(S_+)^\circ = -S_+$

$$\begin{aligned}\max\ & \langle b, u\rangle \\ \text{s.t.}\ & C - \sum_{i=1}^m A_i u_i \in S_+\end{aligned}$$

弱双対定理

定理1　[山中，山下　2018?]
x を一般化ゲージ最適化問題の実行可能解とし，
(u,v) を双対問題 (D_M) の実行可能解とする．
このとき

$$\langle c, x\rangle + \langle d, \Phi(x)\rangle \geq \langle b, u\rangle + \langle e, v\rangle$$

- 凸性は仮定していない
- 双対問題の実行可能解なら $A^\top u + H^\top v - c \in \mathrm{dom}\,\Phi^\circ$

弱双対定理の証明

双対問題の実行可能性
ゲージ関数の非負性

$$\langle c,x\rangle+\langle d,\Phi(x)\rangle-\langle b,u\rangle-\langle e,v\rangle$$

$$\geq\langle c,x\rangle+\left\langle \Phi^{\circ}(A^{\top}u+H^{\top}v-c)+B^{\top}u+K^{\top}v,\Phi(x)\right\rangle-\langle b,u\rangle-\langle e,v\rangle$$

$$=\langle c,x\rangle+\left\langle \Phi^{\circ}(A^{\top}u+H^{\top}v-c),\Phi(x)\right\rangle+\langle u,B\Phi(x)\rangle+\langle v,K\Phi(x)\rangle-\langle b,u\rangle-\langle e,v\rangle$$

$$\langle \Phi^{\circ}(y),\Phi(z)\rangle\geq\langle y,x\rangle,\ \forall x\in\mathrm{dom}\,\Phi,\ \forall y\in\mathrm{dom}\,\Phi^{\circ}$$

$$\geq\langle c,x\rangle+\left\langle A^{\top}u+H^{\top}v-c,x\right\rangle+\langle u,B\Phi(x)\rangle+\langle v,K\Phi(x)\rangle-\langle b,u\rangle-\langle e,v\rangle$$

$$=\langle c,x\rangle-\langle c,x\rangle+\langle u,Ax\rangle+\langle v,Hx\rangle+\langle u,B\Phi(x)\rangle+\langle v,K\Phi(x)\rangle-\langle b,u\rangle-\langle e,v\rangle$$

$$=\langle u,Ax+B\Phi(x)-b\rangle+\langle v,Hx+K\Phi(x)-e\rangle$$

$$\geq 0$$

主問題，双対問題の実行可能性

Lagrange双対問題との関係は？

Lagrange関数：

$$L(x,u,v) = \langle c, x\rangle + \langle d, \Phi(x)\rangle + \langle u, d - Ax - B\Phi(x)\rangle + \langle v, e - Hx - K\Phi(x)\rangle$$

Lagrange双対問題の目的関数

$$\omega(u,v) = \inf_{x\in \mathrm{dom}\,\Phi} L(x,u,v) \le L(0,u,v) = \langle b, u\rangle + \langle e, v\rangle$$

Lagrange双対よりも
よい双対問題？
（双対ギャップが小さい？）

$$(D_M) \quad \max\ \langle b,u\rangle + \langle e,v\rangle$$
$$\text{s.t.} \quad \Phi^0(A^\top u + H^\top v - c) + B^\top u + K^\top v \le d$$
$$v \ge 0$$

残念！！

補題1

(u,v) が双対問題 (D_M) の実行可能解のとき

$$\omega(u,v) = \langle b,u \rangle + \langle e,v \rangle$$

$$(D_M)\quad \max\ \langle b,u\rangle + \langle e,v\rangle \quad \text{s.t.}\quad \Phi^0(A^\top u + H^\top v - c) + B^\top u + K^\top v \le d,\quad v \ge 0$$

⇔

$$(D_M)\quad \max\ \omega(u,v) \quad \text{s.t.}\quad \Phi^0(A^\top u + H^\top v - c) + B^\top u + K^\top v \le d,\quad v \ge 0$$

$$(D_L)\quad \max\ \omega(u,v) \quad \text{s.t.}\quad v \ge 0$$

Lagrange双対のほうがよい双対問題？
（双対ギャップが小さい？）

補題1の証明

任意の $x \in \mathrm{dom}\,\Phi$ に対して，

$$\left\langle \Phi^\circ(y), \Phi(x) \right\rangle \geq \left\langle y, x \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
&L(x,u,v)\\
&= \left\langle c - A^\top u - H^\top v, x \right\rangle + \left\langle d - B^\top u - K^\top v, \Phi(x) \right\rangle + \langle u, b\rangle + \langle v, e\rangle\\
&\geq -\left\langle \Phi^\circ\left(A^\top u + H^\top v - c\right), \Phi(x) \right\rangle + \left\langle d - B^\top u - K^\top v, \Phi(x) \right\rangle + \langle u, b\rangle + \langle v, e\rangle\\
&= \left\langle d - B^\top u - K^\top v - \Phi^\circ\left(A^\top u + H^\top v - c\right), \Phi(x) \right\rangle + \langle u, b\rangle + \langle v, e\rangle\\
&\geq \langle u, b\rangle + \langle v, e\rangle
\end{aligned}$$

双対問題の実行可能性
ゲージ関数の非負性

等号は $x = 0$ のときに成り立つ．

よって，

$$\omega(u,v) = \inf_{x \in \mathrm{dom}\,\Phi} L(x,u,v) = \left\langle b, u \right\rangle + \left\langle e, v \right\rangle$$

双対問題(D_M)はラグランジュ双対よりも悪い？？

$$
\begin{aligned}
(D_M)\quad & \max\ \omega(u,v)\\
\text{s.t.}\quad & \Phi^0(A^\top u + H^\top v - c) + B^\top u + K^\top v \le d\\
& v \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(D_L)\quad & \max\ \ \omega(u,v)\\
\text{s.t.}\quad & v \ge 0
\end{aligned}
$$

(D_M) はラグランジュ双対よりも制約条件が多い

⇩

最大値が小さくなる(かも)

⇩

双対ギャップが大きくなる(かも)

よかった！！(次のスライドから)

適当な仮定のもとでは

(D_M) とラグランジュ双対は等価

[山中, 山下 2018]の結果

仮定1
すべての i に対して $\mathrm{dom}\,\phi_i$ は全空間で,
$\phi(x_i)=0 \Rightarrow x_i=0$ が成り立つ

補題2 [山中, 山下 2018]
$v \geq 0$ とする. 仮定1が成り立つとする.
(u,v) が双対問題 (D_M) の実行可能解でなければ
$$\omega(u,v)=\inf_{x\in \mathrm{dom}\,\Phi} L(x,u,v)=-\infty$$

- 絶対値計画は仮定1を満たす.
- 標示関数は仮定1を満たさないので, SDPではこの結果が使えない
- $g(x)=\sum \max\{0,x_i\}$ は仮定1を満たさない.

仮定1を弱めた仮定

仮定２

すべての i に対して，次の(I)と(II)どちらかが成り立つ．

(I)　$d_i \geq 0, B_{ti} = 0 \ \forall t, K_{ti} \leq 0 \ \forall t$

(II)　$\mathrm{dom}\, \phi_i$ が全空間で，$\phi_i(\hat{x}_i) \neq 0$ となる $\hat{x}_i$ が存在．

Remark

- すべての i に対して(I)が成り立てば，一般化ゲージ最適化は凸最適化になる
- (II)は実質的には，「$\mathrm{dom}\, \phi_i$ が全空間」で十分．
もし，$\phi_i(x) = 0 \ \forall x$ であれば，ϕ_iを適当なノルムに置き換えて，ϕ_i にかかる係数 d_i, B_{ji}, K_{ji} を0とすればよい．

新しい仮定のもとでの補題

仮定２のもとで次の補題が成り立つ.

補題３

$v \geq 0$ とする.　仮定２が成り立つとする.

(u, v) が双対問題 (D_M) の実行可能解でなければ

$$\omega(u, v) = \inf_{x \in \mathrm{dom}\,\Phi} L(x, u, v) = -\infty$$

補題3の証明 (記号の定義)

制約条件は $\phi_i^\circ((A^\top u + H^\top v - c)_i) + (B^\top u + K^\top v)_i \le d_i \quad (i = 1, \ldots, \ell)$

この制約条件を満たしていないため，ある j が存在して

$$\phi_j^\circ((A^\top u + H^\top v - c)_j) > d_j - (B^\top u + K^\top v)_j$$

いま， $\alpha_j = (A^\top u + H^\top v - c)_j, \ \beta_j = d_j - (B^\top u + K^\top v)_j$ とおくと

$$\boxed{\phi_j^\circ(\alpha_j) > \beta_j}$$

大事な式(1)

補題3の証明 (ラグランジュ関数の表記)

ラグランジュ関数は以下のように書ける.

$$
\begin{aligned}
L(x,u,v) &= \langle c, x\rangle + \langle d, \Phi(x)\rangle + \langle u, b - Ax - B\Phi(x)\rangle + \langle v, e - Hx - K\Phi(x)\rangle \\
&= \left\langle c - A^\top u - H^\top v, x\right\rangle + \left\langle d - B^\top u - K^\top v, \Phi(x)\right\rangle + \langle u, b\rangle + \langle v, e\rangle
\end{aligned}
$$

いま, $\bar{x} = (0,\ldots,0,\bar{x}_j,0,\ldots,0)$ とすると

$$\Phi(\bar{x}) = (0,\ldots,0,\phi_j(\bar{x}_j),0,\ldots,0)$$

となり, さらに

$$\boxed{L(\bar{x},u,v) = -\left\langle \alpha_j, \bar{x}_j\right\rangle + \beta_j\phi_j(\bar{x}_j) + \langle u, b\rangle + \langle v, e\rangle}$$

大事な式(2)

補題3の証明(流れ)

次の三つの場合にわけ，それぞれで $\omega(u,v)=-\infty$ を示す

場合1: $\phi_j^{\circ}(\alpha_j)\in(0,\infty)$ のとき

場合2: $\phi_j^{\circ}(\alpha_j)=+\infty$ のとき

場合3: $\phi_j^{\circ}(\alpha_j)=0$ のとき

場合1：$\phi_j^{\circ}(\alpha_j) \in (0,\infty)$ のとき

このとき，$\phi_j^{\circ}(\alpha_j)$を定義する最大化問題：

$$\phi_j^{\circ}(\alpha_j) = \sup\left\{\left\langle x_j, \alpha_j \right\rangle \,\middle|\, \phi_j(x_j) \le 1\right\}$$

より，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\phi_j^{\circ}(\alpha_j) - \varepsilon \le \left\langle \alpha_j, x_j(\varepsilon) \right\rangle,\ \phi_j(x_j(\varepsilon)) \le 1$$

となる $x_j(\varepsilon)$が存在する.

さらに，$\phi_j^{\circ}(\alpha_j) > \varepsilon > 0$ となる ε に対して

$$\phi_j^{\circ}(\alpha_j) - \varepsilon \le \left\langle \alpha_j, \overline{x}_j(\varepsilon) \right\rangle,\ \phi_j(\overline{x}_j(\varepsilon)) = 1$$

となる$\overline{x}_j(\varepsilon)$ が存在する.

実際，$0 < \left\langle \alpha_j, x_j(\varepsilon) \right\rangle$ のとき，$x_j(\varepsilon) \ne 0$ であるから，

正斉次性より，$\overline{x}_j(\varepsilon)$の存在性を示せる.

場合1： $\phi_j^\circ(\alpha_j) \in (0,\infty)$ のとき(続き)

いま,

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\min\left\{\phi_j^\circ(\alpha_j) - \beta_j, \phi_j^\circ(\alpha_j)\right\} > 0$$

大事な式(1)

とおく.

さらに, $\bar{x}(t) = (0,\ldots,0,t\bar{x}_j(\varepsilon),0,\ldots,0),\ t \in R$ とすると,

$$\begin{aligned}
L(\bar{x}(t),u,v) &= -\left\langle \alpha_j, t\bar{x}_j(\varepsilon)\right\rangle + \beta_j\phi_j(t\bar{x}_j(\varepsilon)) + \langle u,b\rangle + \langle v,e\rangle \\
&\le -t\left(\phi_j^\circ(\alpha_j) - \varepsilon - \beta_j\phi_j(\bar{x}_j(\varepsilon))\right) + \langle u,b\rangle + \langle v,e\rangle \\
&= -t\left(\phi_j^\circ(\alpha_j) - \beta_j - \varepsilon\right) + \langle u,b\rangle + \langle v,e\rangle \\
&\le -t\frac{\phi_j(\alpha_j) - \beta_j}{2} + \langle u,b\rangle + \langle v,e\rangle
\end{aligned}$$

大事な式(2)

$\phi_j^\circ(\alpha_j) - \varepsilon \le \left\langle \alpha_j, \bar{x}_j(\varepsilon)\right\rangle$

$\phi_j(\bar{x}_j(\varepsilon)) = 1$

$\varepsilon \le \dfrac{\phi_j^\circ(\alpha_j) - \beta_j}{2}$

よって, $\displaystyle\lim_{t\to\infty} L(\bar{x}(t),u,v) = -\infty$

大事な式(1)

場合2: $\phi_j^0(\alpha_j) = +\infty$ のとき

$\phi_j^\circ(\alpha_j) = \sup\left\{ \left\langle x_j, \alpha_j \right\rangle \,\middle|\, \phi_j(x_j) \le 1 \right\}$ より

$$\phi_j(\overline{x}_j^k) \le 1, \ \left\langle \overline{x}_j^k, \alpha_j \right\rangle \to \infty$$

となる点列 $\{\overline{x}_j^k\} \subset \mathrm{dom}\,\Phi$ が存在する.

大事な式(2)

いま, $\overline{x}^k = (0, \ldots, 0, \overline{x}_j^k, 0, \ldots, 0)$ とすると,

$$L(\overline{x}^k, u, v) = -\left\langle \alpha_j, \overline{x}_j^k \right\rangle + \beta_j \phi_j(\overline{x}_j^k) + \left\langle u, b \right\rangle + \left\langle v, e \right\rangle$$

よって, $\displaystyle \lim_{k \to \infty} L(x^k, u, v) = -\infty$

場合3： $\phi_j^\circ(\alpha_j) = 0$ のとき

$\phi_j^\circ(\alpha_j) > \beta_j$ より $\boxed{0 > \beta_j}$

大事な式(1)

(a) j が仮定2の(I)を満たすとき

$$
\begin{aligned}
\beta_j &= d_j - (B^\top u + K^\top v)_j \\
&= d_j - \sum_t B_{tj} u_t - \sum_t K_{tj} v_t \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

$d_j \geq 0,\ B_{tj} = 0\ \forall t,$
$K_{tj} \leq 0\ \forall t,\ v_t \geq 0\ \forall t$

よって矛盾．この場合は存在しない．

場合3：　$\phi_j^\circ(\alpha_j)=0$ のとき $\boxed{0>\beta_j}$

(b)　j が仮定2 の (II) を満たすとき

(b-1) $\alpha_j \neq 0$ のとき

$\phi_j(\varepsilon\alpha_j)\le 1$ となる $\varepsilon>0$ が存在する.

$$\phi_j^\circ(\alpha_j)=\sup\left\{\left\langle x_j,\alpha_j\right\rangle \middle| \phi_j(x_j)\le 1\right\}\ge \varepsilon\left\langle \alpha_j,\alpha_j\right\rangle>0$$

となり矛盾. このような場合は存在しない.

場合3： $\phi_j^{\circ}(\alpha_j)=0$ のとき $\boxed{0>\beta_j}$

(b)　j が仮定2 の (II) を満たすとき

(b-2) $\alpha_j=0$ のとき

仮定より $\phi_j(\hat{x}_j)\neq 0$ となる $\hat{x}_j$ が存在する.

$$\hat{x}(t)=(0,\ldots,0,t\hat{x}_j,0,\ldots,0),\quad t\in R$$

とすると,

大事な式(2)

$$L(\hat{x}(t),u,v)=-\left\langle \alpha_j,t\hat{x}_j\right\rangle+\beta_j\phi_j(t\hat{x}_j)+\left\langle u,b\right\rangle+\left\langle v,e\right\rangle$$
$$=t\beta_j\phi_j(\bar{x}_j)+\left\langle u,b\right\rangle+\left\langle v,e\right\rangle$$

よって, $\omega(u,v)=-\infty$

Lagrange双対問題との等価性

定理2
仮定2を満たすとする.
さらに，ラグランジュ双対問題が最適解をもつとする.

このとき，(D_M)とラグランジュ双対問題の最適値
および最適解が一致する.

- 凸性は仮定していない

定理の証明

Lagrange双対

$$\max \quad \omega(u,v)$$
$$\text{s.t} \quad v \geq 0$$

補題3 ⇔

$$\max \quad \omega(u,v)$$
$$\text{s.t} \quad \Phi^{\circ}(A^{\top}u + H^{\top}v - c) + B^{\top}u + K^{\top}v \leq d$$
$$v \geq 0$$

補題1 ⇕

(D_M)

$$\max \quad \langle b,u\rangle + \langle e,v\rangle$$
$$\text{s.t} \quad \Phi^{\circ}(A^{\top}u + H^{\top}v - c) + B^{\top}u + K^{\top}v \leq d$$
$$v \geq 0$$

双対問題の双対問題

双対問題

$$
\begin{aligned}
&\max\ \langle b,u\rangle+\langle e,v\rangle\\
&\text{s.t.}\quad \Phi^{\circ}(A^{\top}u+H^{\top}v-d)+B^{\top}u+K^{\top}v\le d\\
&\qquad\quad v\ge 0
\end{aligned}
$$

主問題

$$
\begin{aligned}
&\min\ \langle c,x\rangle+\langle d,\Phi(x)\rangle\\
&\text{s.t.}\quad Ax+B\Phi(x)=b\\
&\qquad\quad Hx+K\Phi(x)\ge e
\end{aligned}
$$

双対問題の双対問題

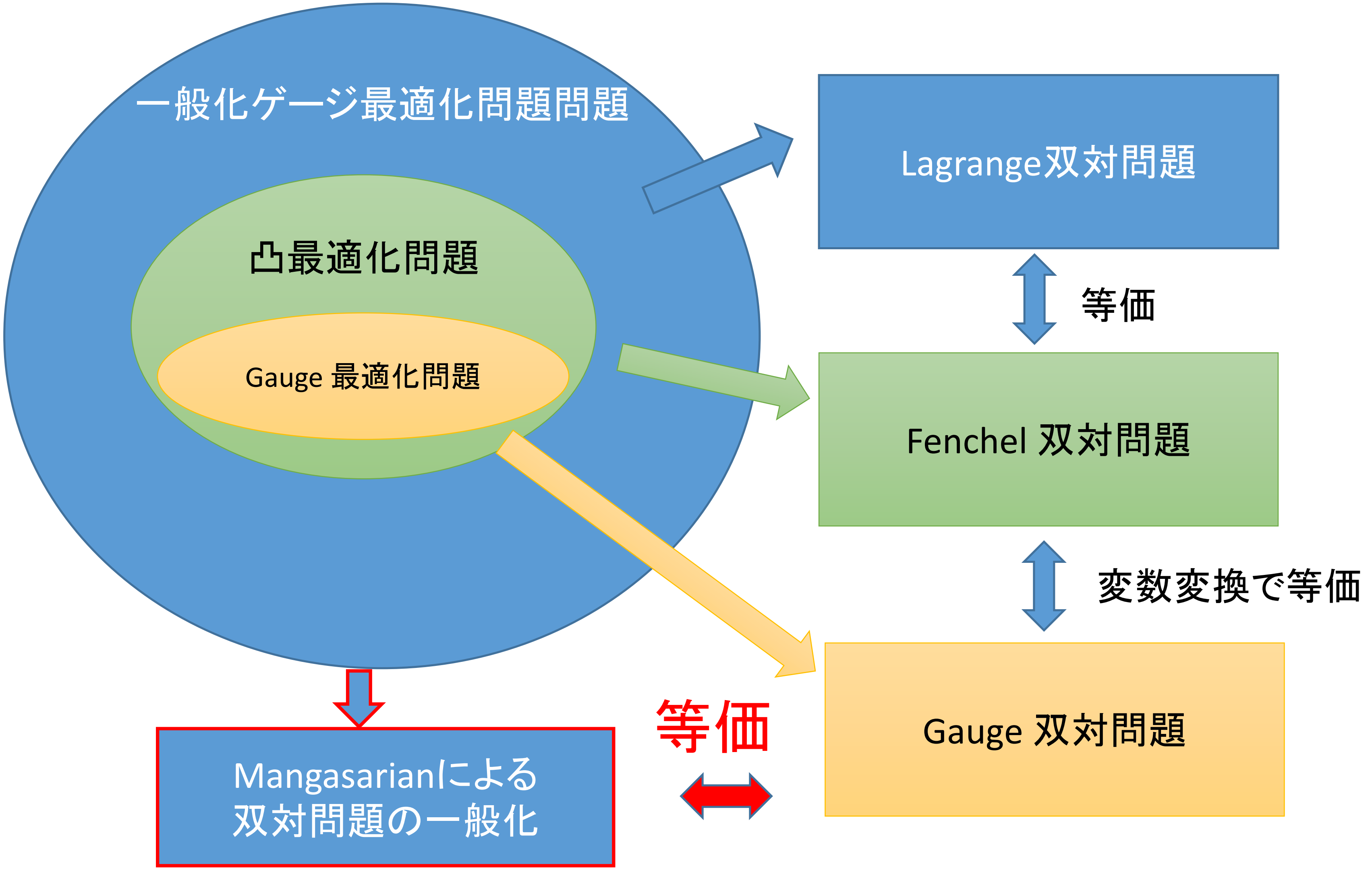
$$
\begin{aligned}
&\min\ \langle c,x\rangle+\langle d,z\rangle\\
&\text{s.t.}\quad Ax+Bz=b\\
&\qquad\quad Hx+Kz\ge e\\
&\qquad\quad \Phi(x)\le z
\end{aligned}
$$

凸な場合

$B=0$
$d\ge 0$
$K_{ij}\le 0\ \forall i,j$

$$
\begin{aligned}
&\min\ \langle c,x\rangle+\langle d,\Phi(x)\rangle\\
&\text{s.t.}\quad Ax+B\Phi(x)=b\\
&\qquad\quad Hx+K\Phi(x)\ge e
\end{aligned}
$$

双対問題の関係


一般化ゲージ最適化問題問題
凸最適化問題
Gauge 最適化問題
Lagrange双対問題
等価
Fenchel 双対問題
変数変換で等価
Gauge 双対問題
等価
Mangasarianによる
双対問題の一般化

非凸な場合の残念な結果

０－１変数をもつ問題は単なる連続緩和.

$$\begin{aligned} &\min \langle c, x\rangle \\ &\text{s.t.} \quad Hx \le e \\ &\qquad x_i = \frac{1}{2}(y_i + 1), \quad |y_i| = 1 \ \ (i = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

⇓ 双対の双対

$$\begin{aligned} &\min \langle c, x\rangle \\ &\text{s.t.} \quad Hx \le e \\ &\qquad x_i = \frac{1}{2}(y_i + 1), \quad {\color{red}|y_i| \le 1} \ \ (i = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

＊0-1制約以外が凸な場合でも同様

まとめ

- 1次式とノルム(ゲージ関数)で構成された最適化問題を紹介した
- それらの問題は，双対ノルム(極関数)が陽に表せるとき，双対問題が陽に書き下せる.
- 適当な仮定(仮定2)のもとで，その双対問題はラグランジュ双対問題と等価になる.

今後について

- 双対性を利用したモデル化や解法の開発.

ノルムと一次式で構成された最適化問題とその双対問題

参考文献とその他の話題

京都大学大学院情報学研究科
山下信雄

参考文献

凸解析(Convex Analysis)

[1] R.T. Rockafellar, Convex Analysis,
Princeton University Press, Princeton, 1970.

*共役関数と双対性．凸集合の関係など，ゲージ関数の基本的な性質

[2] 福島雅夫，非線形最適化の基礎，朝倉書店， 2001.

*凸関数の共役関数の諸性質．Lagrange双対問題とFenchel双対問題.

参考文献

絶対値計画問題(Absolute Value Programming)

[3] O. L. Mangasarian, Absolute value programming,
Computational Optimization and Applications, Vol. 36, pp. 43-53, 2007.
*絶対値計画問題の定義と双対問題. 弱双対性の証明.

[4] O. L. Mangasarian,
Linear complementarity as absolute value equation solution,
Optimization Letters, Vol. 8, pp. 1529-1534, 2014.
*線形相補性問題と絶対値方程式の関係.

なお, 絶対値方程式の論文は多々ある.

参考文献

Gauge optimization problem and Gauge duality.

[5] M. Freund, Dual gauge programs, with applications to quadratic programming and the minimum-norm problem, Mathematical Programming, Vol. 38, pp. 47-67, 1987.

* Gauge duality の元論文

[6] M. P. Friedlander, I. Macedo, and T. K. Pong, Gauge optimization and duality, SIAM Journal on Optimization, Vol. 24, pp. 1999-2022, 2014.

*Gauge最適化問題の定義とその双対性. Gauge関数の諸性質

[7] A. Y. Aravkin, J. V. Burke, D. Drusvyatskiy, M. P. Friedlander, and K. MacPhee, Foundations of gauge and perspective duality, *arXiv:1702.08649*, 2017.

*非負の凸関数のGauge関数への変換とその諸性質.

gauge dualの解と主問題の解の関係

参考文献

一般化ゲージ最適化問題とその双対性

[8] S. Yamanaka and N. Yamashita, Duality of nonconvex optimization with positively homogeneous functions, to appear in Computational Optimization and Applications.

＊一般化ゲージ最適化問題とその双対問題．Lagrange双対との等価性
凸性は仮定せず，ゲージ関数よりも一般的な正斉次関数で議論．
ただし，正斉次関数の実効定義域は全空間としている

[9] S. Yamanaka and N. Yamashita, Duality of optimization problems with gauge functions, *arXiv:1712.04690*, 2017.

＊未完成．論文[7]の内容を一般化ゲージ最適化問題に

[10] 加茂寛也，山下信雄，正斉次最適化問題の一般化とその双対問題，2018年秋季研究発表会，日本オペレーションズリサーチ学会，2018.

＊ 9月にOR学会で発表予定．[8]の内容を錐制約に拡張

その他の話題

- 数学的な話

- さらなる一般化の話

  ゲージ関数の一般化
  - 非負性，正斉次性がない一般の凸関数
  - 非凸な関数

  問題の一般化
  - 不等式制約から錐制約

数学的な話題
[Rockafellar, 1970]

ゲージ関数の定義: C を0を含む凸集合とする.

$$f(x) = \inf\left\{\lambda \geq 0 \,\middle|\, x \in \lambda C\right\}$$

極集合(polar set)の定義:

$$C^{\circ} = \left\{y \,\middle|\, \langle x, y\rangle \leq 1 \ \forall x \in C\right\}$$

C が錐のとき $C^{\circ} = \left\{y \,\middle|\, \langle x, y\rangle \leq 0 \ \ \forall x \in C\right\}$

極関数:

$$f^{\circ}(y) = \inf\left\{\mu \geq 0 \,\middle|\, \langle x, y\rangle \leq \mu f(x) \ \forall x\right\}$$

より一般的な凸関数への拡張

Gauge関数：　正斉次かつ非負な凸関数

- 非負でない凸関数　⇒　非負な凸関数 ＋ 1次関数

$y \in \mathrm{dom}\ f,\ \eta \in \partial f(y)$ として

$$f(x) = \underbrace{f(x) - f(y) - \langle \eta, x - y \rangle}_{\text{非負な凸関数}} + \underbrace{f(y) + \langle \eta, x - y \rangle}_{\text{1次関数}}$$

- 非負な凸関数 ⇒ 正斉次な凸関数

$$\hat{f}(x, x_0) = \begin{cases} x_0 f\left(\dfrac{x}{x_0}\right) & \text{if } x_0 > 0 \\ f^{\infty}(x) & \text{if } x_0 = 0,\ x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x_0 = x = 0 \\ +\infty & \text{otherwiase} \end{cases}$$

f^{∞} は　f　の
recession function

例： $f(x)=\|x\|^2,\ \ \hat{f}(x_0,x)=\dfrac{1}{x_0}\|x\|^2$

$$\hat{f}^{\circ}(y_0,y)=\sup\left\{\langle x,y\rangle+x_0y_0\ \middle|\ \frac{1}{x_0}\|x\|^2\le 1\right\}$$

- $y_0>0$ のとき $\hat{f}^{\circ}(y_0,y)=+\infty$
- $y_0=0,\ y\neq 0$ のとき $\hat{f}^{\circ}(y_0,y)=+\infty$
- $y_0=0,\ y=0$ のとき $\hat{f}^{\circ}(y_0,y)=0$
- それ以外のとき： KKT条件を書くと

$$y+2\lambda x=0,\ y_0-\lambda=0,\ \lambda(\|x\|^2-x_0)=0$$

$$\Rightarrow\quad \lambda=y_0,\ x=-\frac{y}{2y_0},\ x_0=\frac{\|y\|^2}{4y_0^2}$$

$$\Rightarrow\quad \hat{f}^{\circ}(y_0,y)=\left\langle y,-\frac{y}{2y_0}\right\rangle+y_0\frac{\|y\|^2}{4y_0^2}=-\frac{\|y\|^2}{4y_0}$$

例：$f(x)=\|x\|^2,\ \hat{f}(x_0,x)=\dfrac{1}{x_0}\|x\|^2$

主問題

$$\min \|x\|^2 \quad \text{s.t.} \quad Hx \ge e$$

$$\min \frac{1}{x_0}\|x\|^2 \quad \text{s.t.} \quad x_0 = 1,\quad Hx \ge e$$

$$\begin{aligned} &\min \langle 0, \bar{x}\rangle + \langle 1, \hat{f}(\bar{x})\rangle \\ &\text{s.t.} \quad (1\ \ 0)\bar{x} + 0\times \hat{f}(\bar{x}) = 1 \\ &\qquad\ (0\ H)\bar{x} + 0\times \hat{f}(\bar{x}) \ge e \end{aligned}$$

Lagrange双対問題

双対問題

双対問題

$$\begin{aligned} &\max -\frac{1}{4}\|H^T v\|^2 + \langle e, v\rangle \\ &\text{s.t.} \quad v \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\max u + \langle e, v\rangle \\ &\text{s.t.} \quad -\frac{1}{4}\|H^T v\|^2 \ge u \\ &\qquad\ 0 \ge u \\ &\qquad\ v \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\max u + \langle e, v\rangle \\ &\text{s.t.} \quad \hat{f}^{\circ}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ H^T \end{pmatrix} v\right) \le 1 \\ &\qquad\ v \ge 0 \end{aligned}$$

正斉次最適化問題 [山中, 山下 2018] (positively homogeneous optimization)

$$
\begin{aligned}
&\min \langle c, x\rangle + \langle d, \Phi(x)\rangle \\
&\text{s.t.} \quad Ax + B\Phi(x) = b \\
&\qquad\quad Hx + K\Phi(x) \geq e
\end{aligned}
$$

$$
\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x_1) \\ \phi_2(x_2) \\ \vdots \\ \phi_\ell(x_\ell) \end{pmatrix}
$$

ただし $\phi_i : V_i \to R \cup \{+\infty\}$ $(i = 1, \ldots, \ell)$ は

- 正斉次
- 非負
- $\phi_i(0) = 0 \ (i = 1, \ldots, \ell)$

凸性を仮定していない

正斉次最適化問題の性質

- 極関数 ϕ_i° を同じように定義でき，
  $$\phi_i(x)\phi_i^\circ(y) \geq \langle x, y \rangle$$
- (D_M) を構成でき，適当な仮定のもとでLagrange双対と等価

例：$\phi_i(x) = \|x\|_p \quad (0 < p < 1),\ \phi_i^\circ(y) = \|y\|_\infty,\ \phi_i^{\circ\circ}(x) = \|x\|_1$

凸でない

$$\begin{aligned} \min \quad & \|x\|_p \\ \text{s.t.} \quad & \|Ax - b\| \leq \varepsilon \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{双対の双対}} \quad \begin{aligned} \min \quad & \|x\|_1 \\ \text{s.t.} \quad & \|Ax - b\| \leq \varepsilon \end{aligned}$$