変分不等式問題と相補性問題の（基礎）理論とその周辺

林　俊介

プログラム

Chap.1 基礎編 （45分くらいを目標に･･･）

Chap.2 理論･解析編 （75分くらいを目標に･･･）

Chap.3 交通モデル編 （60分くらいを目標に･･･）

今日のお話が有益（楽しめる？）と思われる人

・離散最適化の学生だが，連続最適化も授業以上のことを覗いてみたい人.
（学生時代の私がマトロイドや離散凸解析の基礎を学ぶ感覚？）

・連続最適化でも教科書レベル（LPやKKT条件）のことは理解できている.

・錐とか変分不等式とかは聞いたことある程度.

・連続最適化の方には基礎的なことが多くて退屈かもしれません.

質問はいつでも止めて下さって構いません.

ときどき英語混じりのスライドが入りますがご容赦ください.

ときどき記号の使い方（ベクトル太字など）が変わりますがご容赦下さい.

Chap.1 基礎編

相補性問題や変分不等式問題の定義とその
基礎的な性質．あと錐の話題も･･･

相補性 (complementarity) とは

2つのベクトル $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ が以下の条件を満たすとき，それらは 相補性条件 (complementarity condition) を満たすという.

$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{y} = 0$$

ベクトル不等式（すべての成分が非負）

内積
（1行n列×n行1列 = 1行1列）
（以後，ベクトルはすべて縦）

3つの式をしばしば以下のようにまとめて書く.

$$\boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$$

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{y} = 0 \\ & \iff \quad x_i \geq 0, \ y_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n), \ \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0 \\ & \iff \quad x_i \geq 0, \ y_i \geq 0, \ x_i y_i = 0 \ \ (i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}$$

$$\text{e.g., } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0 \\ 0.002 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 132.88 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

相補性条件は連続最適化における基礎的性質の一つ.

線形計画問題における相補スラック条件

主問題 (P)

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \ \ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

双対問題 (D)

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} \quad & A^\top \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ が (P) と (D) の実行可能解ならば,

$$\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \ = \ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} - (A\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{y} \ = \ (\boldsymbol{c} - A^\top \boldsymbol{y})^\top \boldsymbol{x} \ \geq \ 0 \quad \text{(弱双対性)}$$

$\boldsymbol{x}^*$, $\boldsymbol{y}^*$ が (P) と (D) の最適解ならば，以下の<u>相補スラック条件</u>が成立.

$$\begin{aligned} & A\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}, \\ & \underbrace{\boldsymbol{x}^* \geq \boldsymbol{0}, \ \ \boldsymbol{c} - A^\top \boldsymbol{y}^* \geq \boldsymbol{0}, \ \ (\boldsymbol{x}^*)^\top (\boldsymbol{c} - A^\top \boldsymbol{y}^*) = 0.}_{\text{相補性条件}} \end{aligned}$$

非線形計画問題に対するKKT条件

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimize} & f(\boldsymbol{x}) \\
\text{subject to} & g_1(\boldsymbol{x}) \le 0, \ldots, g_m(\boldsymbol{x}) \le 0 \\
& h_1(\boldsymbol{x}) = 0, \ldots, h_l(\boldsymbol{x}) = 0
\end{array}
$$

※制約関数は制約想定(正則性のようなもの. 詳細略)を満たすとする.

$\boldsymbol{x}^*$ は (P) の局所最適解とする．そのとき，以下を満たすような $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)^\top$ および $\boldsymbol{\mu}^* = (\mu_1^*, \ldots, \mu_l^*)^\top$ が存在する．

Karush-Kuhn-Tucker (KKT)条件

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) + \textstyle\sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{j=1}^l \mu_j^* \nabla h_j(\boldsymbol{x}^*) = \mathbf{0},$$

$$\lambda_i^* \ge 0, \quad g_i(\boldsymbol{x}^*) \le 0, \quad \lambda_i^* g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0, \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

$$h_j(\boldsymbol{x}^*) = 0. \qquad (j = 1, \ldots, l)$$

相補性条件

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) := \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)^\top \in \mathbb{R}^n$$

相補性問題

所与のベクトル関数に対して，相補性条件を満たすような引数ベクトルを求める問題.

非線形相補性問題 (Nonlinear Complementarity Problem: NCP)

$$\begin{array}{rl} \text{Find} & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \\ \text{such that} & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = 0. \end{array}$$

$\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$: given function

⇒ $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = M\boldsymbol{x} + \boldsymbol{q}$ と書ける，すなわちアフィン関数のとき
これを特に線形相補性問題という.

線形相補性問題 (Linear Complementarity Problem: LCP)

$$\begin{array}{rl} \text{Find} & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \\ \text{such that} & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \quad M\boldsymbol{x} + \boldsymbol{q} \geq \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x}^\top (M\boldsymbol{x} + \boldsymbol{q}) = 0. \end{array}$$

$M \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$: given matrix and vector

LCPは二次計画問題(QP)と絡めて研究されてきた歴史がある.（あと，LPの内点法も）

非負変数をもつ最適化問題

→ KKT条件が非線形相補性問題として記述可.

(P) $$\begin{array}{ll} \mathrm{Min} & f(\boldsymbol{z}) \\ \mathrm{s.t.} & \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}) \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{y} = 0$

という**相補性条件**はしばしば

$$\boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$$

と略記される.

KKT conditions

$$\begin{array}{l} \nabla f(\boldsymbol{z}) - \boldsymbol{\mu} - \nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{\mu} \perp \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{\lambda} \perp \boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}) \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) := \left(g_1(\boldsymbol{x}), \, g_2(\boldsymbol{x}) \ldots \, g_m(\boldsymbol{x})\right)^\top \in \mathbb{R}^m$$

$$\nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) := \left[\nabla g_1(\boldsymbol{x}) \;\; \nabla g_2(\boldsymbol{x}) \;\; \cdots \;\; \nabla g_m(\boldsymbol{x})\right]$$

（転置ヤコビ行列） $\in \mathbb{R}^{n \times m}$

$\boldsymbol{\mu}$ を消去

$$\boldsymbol{0} \leq \begin{pmatrix} \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} \nabla f(\boldsymbol{z}) - \nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}) \end{pmatrix} \geq \boldsymbol{0}$$

ここで, $\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix}, \;\; \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) := \begin{pmatrix} \nabla f(\boldsymbol{z}) - \nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}) \end{pmatrix}$ とおけば,

NCP: $\boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{0}$ を得る.

変数に非負制約のない最適化問題

$$
\text{(P)} \quad \begin{aligned} &\text{Min} \quad f(\boldsymbol{z}) \\ &\text{s.t.} \quad \cancel{\boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0},} \quad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}) \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}
$$

KKT conditions

$$
\longrightarrow \quad \begin{aligned} &\nabla f(\boldsymbol{z}) - \nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}) \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{0} \\ &\boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{\lambda} \perp \boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}) \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}
$$

この場合，相補性条件だけでなく，等式条件も混じってくる.

$\Longrightarrow$ 混合相補性問題

混合相補性問題（相補性条件と等式条件が混合した問題）

非線形混合相補性問題 (Nonlinear Mixed Complementarity Problem: NMCP)

$$
\begin{aligned}
\text{Find} \quad & (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\
\text{such that} \quad & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0, \\
& \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

n-dim

m-dim

$\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{G} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$: given functions

FとGがアフィン関数

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &:= M\boldsymbol{x} + N\boldsymbol{y} + \boldsymbol{q} \\
\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &:= L\boldsymbol{x} + P\boldsymbol{y} + \boldsymbol{r}
\end{aligned}
$$

⟹ 線形混合相補性問題 (Linear Mixed Complementarity Problem: LMCP)

相補性問題

関数が線形か非線形か／等式条件が含まれるか否か，で分類.

他に錐相補性問題などもある.（後述）

相補性問題は最適化問題（のKKT条件）を含む.

⇕

相補性問題は他にも，ナッシュ均衡問題や交通均衡問題などど，単独の最適化問題として表現できないような均衡問題に対しても定式化能力を有する.

ナッシュ均衡問題

2-player non-cooperative game

（各プレイヤーは自分の利得に対して勝手に最適化）

Player 1 wants to solve…

$$(\text{P1}_{(\boldsymbol{z})}) \quad \min_{\boldsymbol{y}} \ f_1(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \quad \text{s.t.} \ \boldsymbol{y} \in S_1$$

$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$: Player 1's strategy

$f_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ Player 1's cost function

$S_1 \subseteq \mathbb{R}^n$: Player 1's strategy set

Player 2 wants to solve…

$$(\text{P2}_{(\boldsymbol{y})}) \quad \min_{\boldsymbol{z}} \ f_2(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \quad \text{s.t.} \ \boldsymbol{z} \in S_2$$

$\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^m$: Player 2's strategy

$f_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ Player 2's cost function

$S_2 \subseteq \mathbb{R}^m$: Player 2's strategy set

$\boldsymbol{y}^*$ is an optimum of $(\text{P1}_{(\boldsymbol{z}^*)})$
$\boldsymbol{z}^*$ is an optimum of $(\text{P2}_{(\boldsymbol{y}^*)})$ $\Longrightarrow$ $(\boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{z}^*)$ is called a Nash equilibrium.

ナッシュ均衡の下では，両プレイヤーは単独で戦略を変更する動機をもたない．

相補性問題への定式化（双行列ゲーム＆混合戦略）

Player 1 の解くべき最適化問題

$$(\mathrm{P1}(\boldsymbol{z}))\quad \begin{array}{ll} \underset{y}{\mathrm{Max}} & \boldsymbol{y}^\top A\boldsymbol{z} \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{e}^\top \boldsymbol{y} = 1 \end{array}$$

⇩

Player 1 のKKT条件

$$\boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{y} \perp -A\boldsymbol{z} - \boldsymbol{e}\alpha \geq 0,\quad \boldsymbol{e}^\top \boldsymbol{y} - 1 = 0$$

Player 2 の解くべき最適化問題

$$(\mathrm{P2}(\boldsymbol{y}))\quad \begin{array}{ll} \underset{z}{\mathrm{Max}} & \boldsymbol{y}^\top B\boldsymbol{z} \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{e}^\top \boldsymbol{z} = 1 \end{array}$$

⇩

Player 2のKKT条件

$$\boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{z} \perp -B^\top \boldsymbol{y} - \boldsymbol{e}\beta \geq 0,\quad \boldsymbol{e}^\top \boldsymbol{z} - 1 = 0$$

２つのKKT条件
を併せると･･･

Nash均衡問題と等価な（混合線形）相補性問題

$$\boldsymbol{0} \leq \begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} O & -A \\ -B^\top & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \boldsymbol{e} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}^\top & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{e}^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

N人ゲームの場合，非線形関数の場合も同様.

変分不等式問題 (Variational Inequality Problem: VIP)

ベクトル場に対する安定点を求めるような問題

多くのクラスの問題(相補性問題・ベクトル方程式・凸最適化問題)
をサブクラスとして含む.

→ 変分不等式問題で言える諸性質(解の存在性や唯一性)は
そのままサブクラスの問題に適用できる.

変分不等式問題に直接定式化される均衡問題も多くある.

理論体系がとてもきれい.

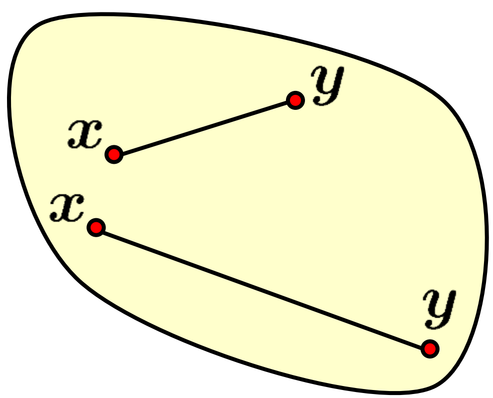
変分不等式問題 (Variational Inequality Problem: VIP)

変分不等式問題

$$\mathrm{VIP}\,(\boldsymbol{F}, S) \qquad \begin{array}{rl} \text{Find} & \boldsymbol{x} \in S \\ \text{such that} & \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})^\top (\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}) \geq 0 \quad (\forall \boldsymbol{x}' \in S) \end{array}$$

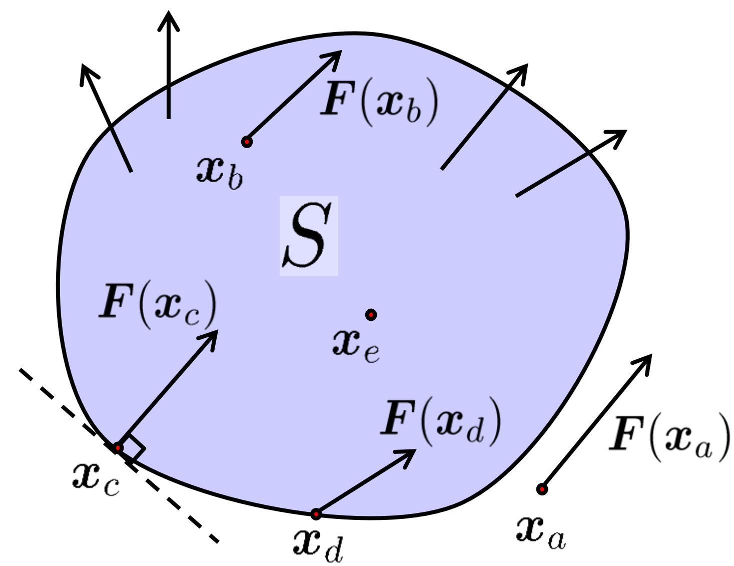
$\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$: given function $\quad S \subseteq \mathbb{R}^n$: given closed convex set

凸集合 (convex set)



$(1-\alpha)\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y} \in S$

$\forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \alpha) \in S \times S \times [0, 1]$



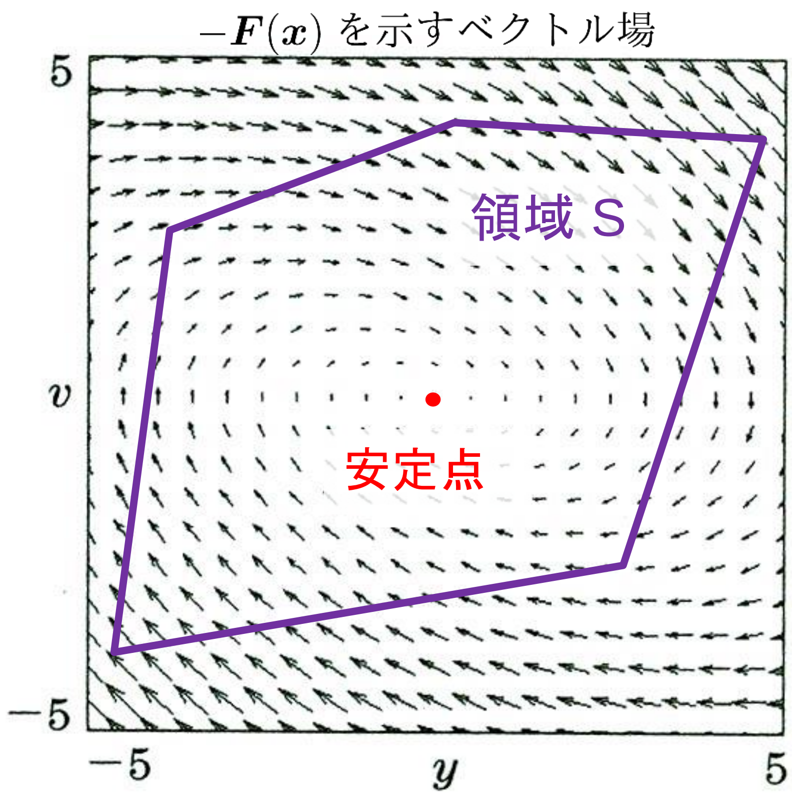
$\boldsymbol{x}_a, \boldsymbol{x}_b, \boldsymbol{x}_d$ ：VIPの解でない

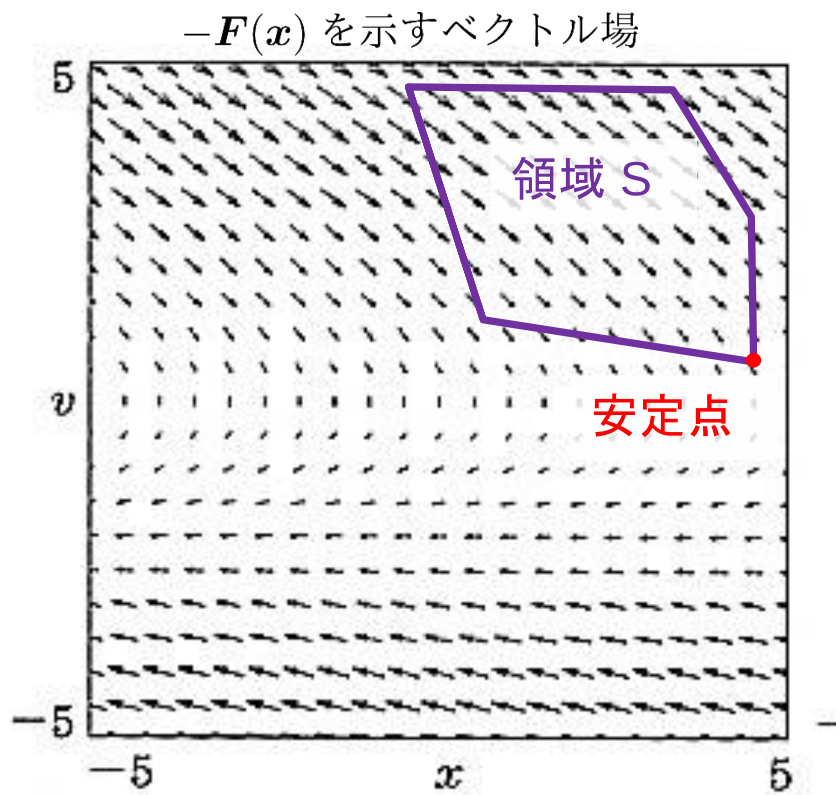
$\boldsymbol{x}_c, \boldsymbol{x}_e$ ：VIPの解

変分不等式問題の解釈

$$\mathrm{VIP}\,(\boldsymbol{F}, S) \qquad \begin{array}{rl} \text{Find} & \boldsymbol{x} \in S \\ \text{such that} & \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})^\top(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}) \geq 0 \quad (\forall \boldsymbol{x}' \in S) \end{array}$$

変分不等式問題は，集合S上で働く力のベクトル場 –F に対する『安定点』を求める問題とも解釈できる.





変分不等式問題に帰着できる問題 (1)

VIPは多くの種類の問題をサブクラスとして含む.

ある凸関数 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が存在して $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \nabla f(\boldsymbol{x})$ とできるとする. このとき,

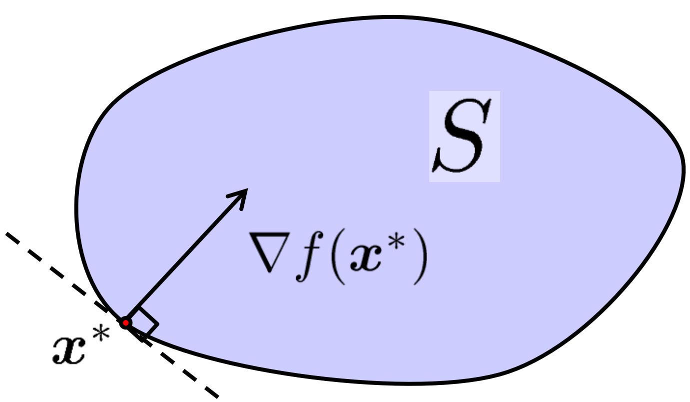
VIP $(\nabla f, S)$

$$\begin{array}{rl} \text{Find} & \boldsymbol{x} \in S \\ \text{such that} & \nabla f(\boldsymbol{x})^\top (\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}) \geq 0 \quad (\forall \boldsymbol{x}' \in S) \end{array}$$

⟺ **等価**
（証明は演習問題）

凸最適化問題

$$\begin{array}{rl} \text{Minimize} & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in S \end{array}$$



※ 電磁気学でいう電磁場とポテンシャルの関係

変分不等式問題に帰着できる問題 (2)

$S = \mathbb{R}^n$ とする. このとき,

VIP $(\boldsymbol{F}, \mathbb{R}^n)$

$$\begin{array}{rl} \text{Find} & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \\ \text{such that} & \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})^\top (\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}) \geq 0 \quad (\forall \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^n) \end{array}$$

等価

$\Longleftrightarrow$

ベクトル方程式

$$\begin{array}{rl} \text{Find} & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \\ \text{such that} & \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \end{array}$$

Note: $\mathbb{R}^n$ に含まれるすべての点は $\mathbb{R}^n$ の内部の点.

$(\boldsymbol{x}' := \boldsymbol{x} \pm \boldsymbol{e}_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$ を考えると簡単に証明可.)

変分不等式問題に帰着できる問題 (3)

$S = \mathbb{R}^n_+$ とする．このとき，

$\mathbb{R}^n_+ := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}\}$

非負ベクトルの集合（非負象限）

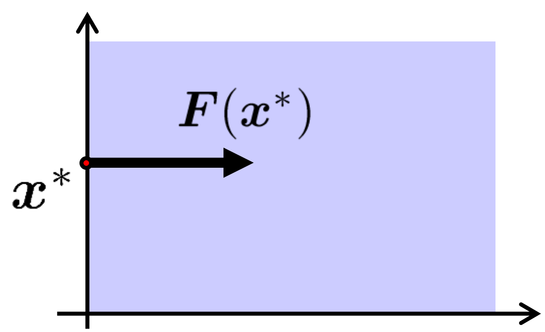
$\mathrm{VIP}\,(\boldsymbol{F}, \mathbb{R}^n_+)$

$$\begin{array}{rl} \text{Find} & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+ \\ \text{such that} & \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})^\top (\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}) \geq 0 \quad (\forall \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^n_+) \end{array}$$

等価 $\Longleftrightarrow$

非線形相補性問題

$$\begin{array}{rl} \text{Find} & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \\ \text{such that} & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0},\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \geq \mathbf{0},\ \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = 0 \end{array}$$



錐 (cone)

$\mathbb{R}^n_+$ や $\mathbb{R}^n$ は特殊な構造をもつ錐ともいえる.
実際, $\mathrm{VIP}\,(\boldsymbol{F}, S)$ の集合Sが錐の場合の議論も重要.

錐の定義

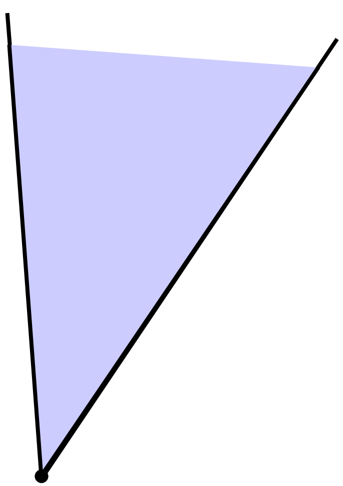
A set $C \subseteq \mathbb{R}^n$ is called a cone if $\alpha \boldsymbol{x} \in C$ for any $\alpha \geq 0$ and $\boldsymbol{x} \in C$.

要は, 原点を始点とした半直線の集合

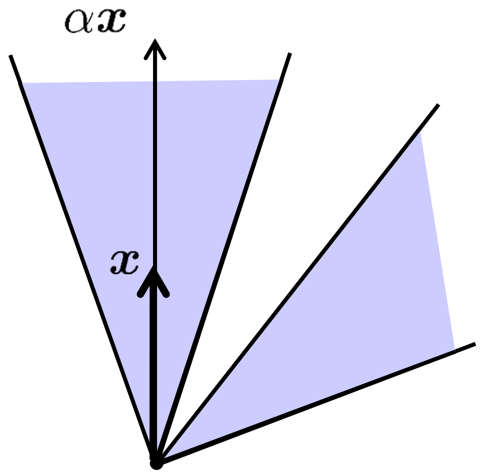
convex cone（凸錐） ——— cone and convex set

closed cone（閉錐） ——— cone and closed set

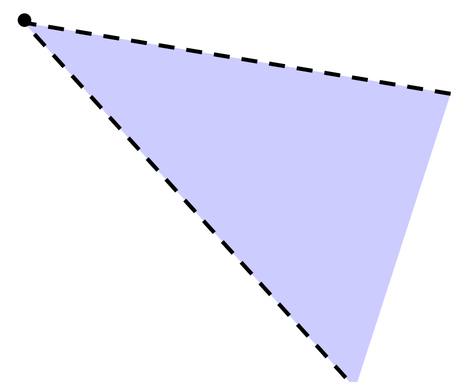
閉凸錐



凸でない閉錐



閉でない凸錐



（余談）錐最適化問題 (conic optimization problem)

通常の線形計画問題 (LP)

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boxed{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+,} \quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

ベクトル ***x*** が非負錐に入ってると見なす.

錐計画問題

非負錐を別の閉凸錐 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ に置き換えた問題を考える.

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{x} \in \mathcal{C}, \quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

二次錐計画問題 (Second-Order Cone Program: SOCP)

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{x} \in \mathcal{K}, \quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

$\mathcal{K}$: 二次錐の直積

（二次錐 — 2-ノルムで特徴づけられる錐）

$$\mathcal{K}^n := \{\boldsymbol{x} \mid x_1 \geq (x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}\}$$

半正定値計画問題 (Semidefinite Program: SDP)

$$\begin{aligned} \min \quad & \langle C, X \rangle \\ \text{s.t.} \quad & X \in \mathcal{S}^{n\times n}_+, \quad \mathcal{A}X = \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

$\mathcal{S}^{n\times n}_+$:半正定値行列の錐

$\mathcal{A} : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^n$:線形写像

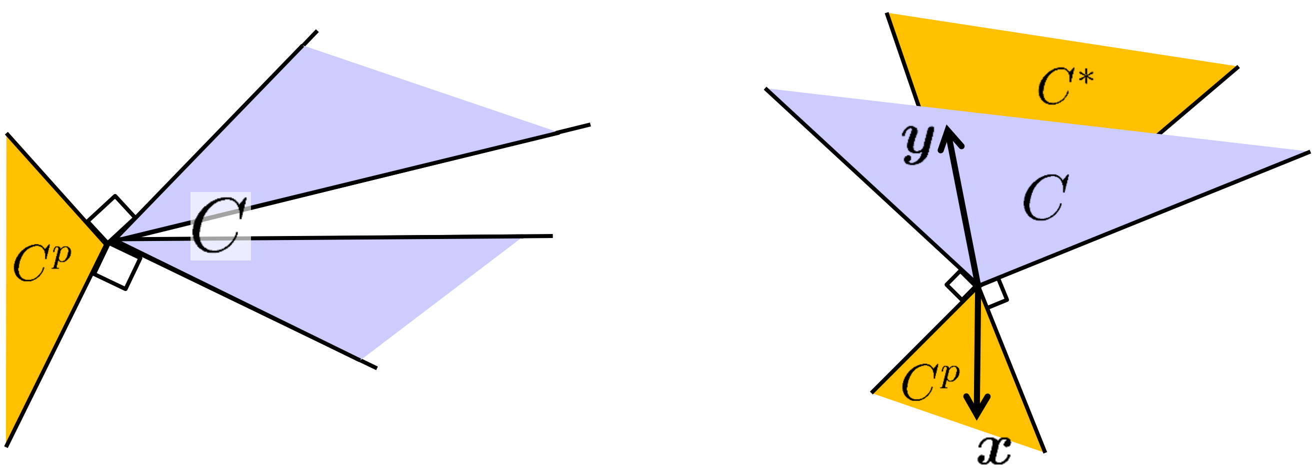
極錐と双対錐 (polar cone and dual cone)

錐 C の極錐 C^p は以下で定義される.

$$C^p := \left\{ \boldsymbol{x} \,\middle|\, \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{y} \le 0 \ \ (\forall \boldsymbol{y} \in C) \right\}$$

錐 C の双対錐 C^* は以下で定義される.

$$C^* := \left\{ \boldsymbol{x} \,\middle|\, \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{y} \ge 0 \ \ (\forall \boldsymbol{y} \in C) \right\} = -C^p$$

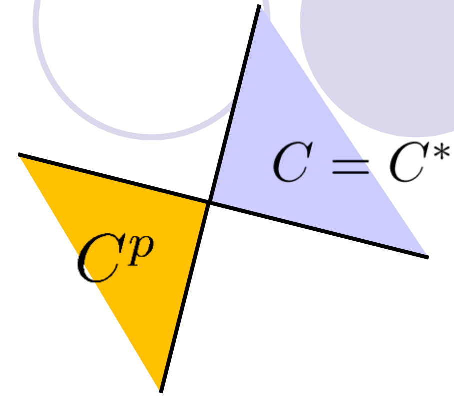


Notice: C^p や C^* は常に閉凸錐. (C の閉凸性には依存しない)
C が閉凸錐ならば $(C^p)^p = (C^*)^* = C$ が成り立つ.

自己双対錐 (self-dual cone)

以下が成り立つとき，錐 C は自己双対錐という.

$$C = C^* = -C^p$$



自己双対錐の例

$$\mathbb{R}^n_+ := \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$$ （非負象限）

$$\mathcal{S}^{n\times n}_+ := \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid X = X^\top,\ X \succeq 0\}$$ (半正定値行列の錐)

$$\mathcal{K}^n := \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_1 \geq (x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}\right\}$$ (二次錐)

もし C が自己双対錐ならば, ユークリッドジョルダン代数とよばれる技法を用いて $C = \mathbb{R}^n_+$ の場合を自然に拡張した解析やアルゴリズム構築が可能.

⟹ $C = \mathcal{K}^n$ or $C = \mathcal{S}^n_+$ の場合の錐最適化問題や錐相補性問題（次頁）が研究されてきた動機のひとつ.

変分不等式問題に帰着できる問題 (4)

$C \subseteq \mathbb{R}^n$ を所与の閉凸錐とする．このとき，

$\mathrm{VIP}(\boldsymbol{F}, C)$

$$\begin{array}{rl} \text{Find} & \boldsymbol{x} \in C \\ \text{such that} & \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})^\top (\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}) \geq 0 \quad (\forall \boldsymbol{x}' \in C) \end{array}$$

等価

（証明は演習問題で）

錐相補性問題 (conic complementarity problem)

双対錐

$$\begin{array}{rl} \text{Find} & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \\ \text{such that} & \boldsymbol{x} \in C,\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \in C^*,\ \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = 0. \end{array}$$

- $C = \mathbb{R}^n_+$ の場合は通常の相補性問題に他ならない．
- また，Cが二次錐や半正定値行列錐のときは，それぞれ二次錐相補性問題 (Second-Order Cone Complementarity Problem)，半正定値相補性問題 (Semi-definite Complementarity Problem) という．

変分不等式問題に帰着できる問題 (4')

$C \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$ を所与の閉凸錐とし，$S = C \times \mathbb{R}^{n_2} \quad (n = n_1 + n_2)$
とする．このとき，$S^* = C^* \times \{\mathbf{0}\}$ であるので，

これも閉凸錐

$\mathrm{VIP}(\boldsymbol{F}, C \times \mathbb{R}^{n_2})$

$$\begin{array}{rl} \text{Find} & \boldsymbol{x} \in C \times \mathbb{R}^{n_2} \\ \text{such that} & \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})^\top(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}) \geq 0 \quad (\forall \boldsymbol{x}' \in C \times \mathbb{R}^{n_2}) \end{array}$$

等価 $\Longleftrightarrow$

$$\begin{array}{rl} \text{Find} & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} = \mathbb{R}^n \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{x} \in C \times \mathbb{R}^{n_2},\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \in C^* \times \{\mathbf{0}\},\ \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = 0. \end{array}$$

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix}$
$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$
$\Longleftrightarrow$

$$\begin{array}{rl} \text{Find} & (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} = \mathbb{R}^n \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{x}_1 \in C,\ \boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \in C^*,\ \boldsymbol{x}_1^\top \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0, \\ & \boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \mathbf{0} \end{array}$$

特に $C = \mathbb{R}^{n_1}_+$ のときは前述の混合相補性問題に他ならない．

VIPに対するKKT条件

VIP $(\boldsymbol{F}, S)$

$$\begin{array}{rl} \text{Find} & \boldsymbol{x} \in S \\ \text{such that} & \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})^\top(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}) \geq 0 \quad (\forall \boldsymbol{x}' \in S) \end{array}$$

凸性の仮定
g_i: convex　h_j: affine

$$\text{where } S := \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{h}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}\}$$

集合 S が所与の関数に対する不等式制約や等式制約として表されるとき，
変分不等式問題に対するKKT条件は以下のように記述される．

KKT conditions for VIP

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*) + \nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{\lambda}^* + \nabla \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{\mu}^* = \boldsymbol{0},$$
$$\boldsymbol{\lambda}^* \geq \boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^*) \leq \boldsymbol{0},\quad (\boldsymbol{\lambda}^*)^\top \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^*) = 0,$$
$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}.$$

制約想定等，適当な仮定の下で VIP $(\boldsymbol{F}, S)$ と上記のKKT条件は等価．

$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ を $\nabla f(\boldsymbol{x})$ で置き換えたら，VIP の KKT 条件は制約付き
最適化問題の KKT 条件と一致．

より一般化されたクラスの問題

一般化変分不等式問題 (Generalized Variational Inequality Problem: GVIP)

$$\begin{array}{rl} \text{Find} & \boldsymbol{x} \in S \text{ and } \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{F}(\boldsymbol{x}) \\ \text{such that} & \boldsymbol{\xi}^\top (\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}) \geq 0 \quad (\forall \boldsymbol{x}' \in S) \end{array}$$

$\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ ―― 所与の点集合写像

例えば，目的関数（利得関数）が微分不可能なゲームに対して劣勾配を用いて均衡状態を定式化

準変分不等式問題 (Quasi-Variational Inequality Problem: QVIP)

$$\begin{array}{rl} \text{Find} & \boldsymbol{x} \in \mathcal{S}(\boldsymbol{x}) \\ \text{such that} & \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})^\top (\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}) \geq 0 \quad (\forall \boldsymbol{x}' \in \mathcal{S}(\boldsymbol{x})) \end{array}$$

$\mathcal{S} : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ ―― 常に閉凸集合となるような点集合写像

相手の戦略により自身の選択可能な戦略集合が変わるようなゲームに対する均衡状態を表現可能.

いずれも本講義では取り扱わない.