

Chap.2 理論・解析編

degree theory を用いた解析

変分不等式問題の解の存在性・唯一性

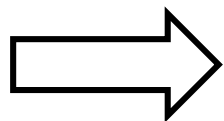
単調・P・強圧性など

変分不等式問題

$$\text{VIP}(F, K) \quad \begin{array}{l} \text{Find } \boldsymbol{x} \in K \\ \text{such that } \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})^\top (\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}) \geq 0 \quad (\forall \boldsymbol{x}' \in K) \end{array}$$

$\boldsymbol{F} : K \rightarrow \mathbb{R}^n$: given function $K \subseteq \mathbb{R}^n$: given closed convex set

VIPは凸最適化問題や相補性問題など多くの問題をサブクラスとして含む.



VIPを包括的に解析・求解できれば,
その手法・結果がそのまま凸最適化
問題や相補性問題に適用可能.

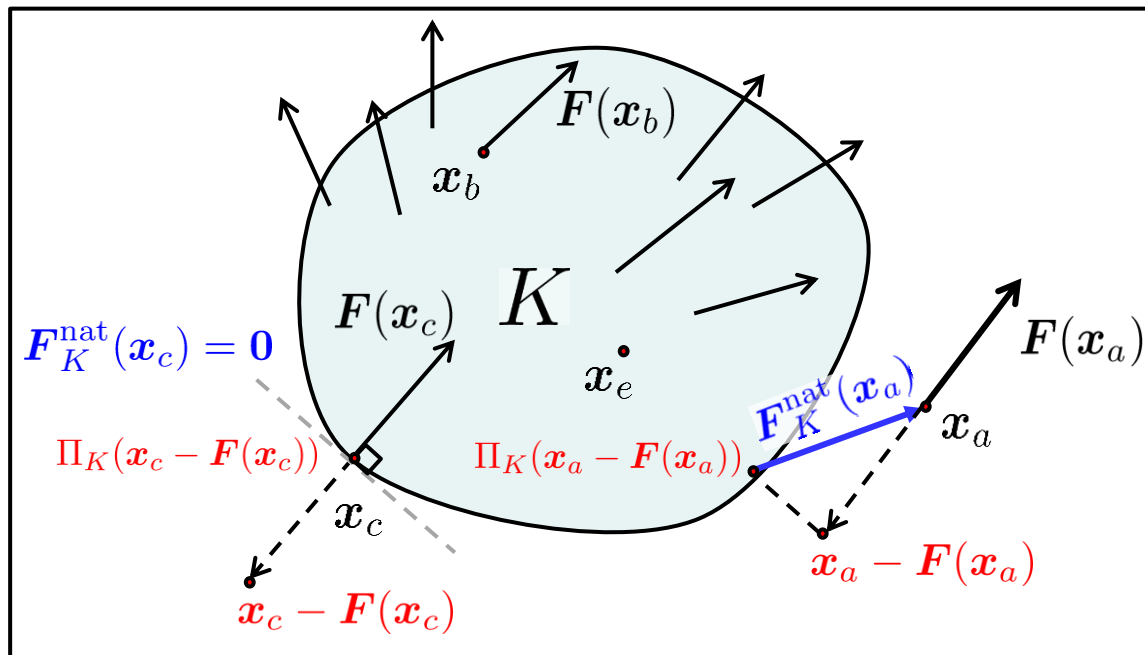
(勿論, より制限されたクラスの問題の方が, その問題独自の構造を用いて, より詳細な解析・求解が期待されるのは言うまでもない.)

残差関数を用いた変換

$\Pi_K(\cdot)$ — K へのユークリッド射影

残差関数 (natural residual / natural map)

$$F_K^{\text{nat}}(x) := x - \Pi_K(x - F(x))$$



$$F_K^{\text{nat}}(x) = 0 \iff x \text{ は } \text{VIP}(K, F) \text{ の解}$$

(証明は演習問題にて)

残差関数の特別なケース

$$\text{VIP}(\mathbf{F}, \mathbb{R}^n) \iff \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

$K = \mathbb{R}^n$ のとき

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_K^{\text{nat}}(\mathbf{x}) &= \mathbf{x} - \Pi_K(\mathbf{x} - \mathbf{F}(\mathbf{x})) \\ &= \mathbf{x} - (\mathbf{x} - \mathbf{F}(\mathbf{x})) = \mathbf{F}(\mathbf{x})\end{aligned}$$

$$\text{VIP}(\mathbf{F}, \mathbb{R}_+^n) \iff \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{F}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}, \mathbf{x}^\top \mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$$

$K = \mathbb{R}_+^n$ のとき

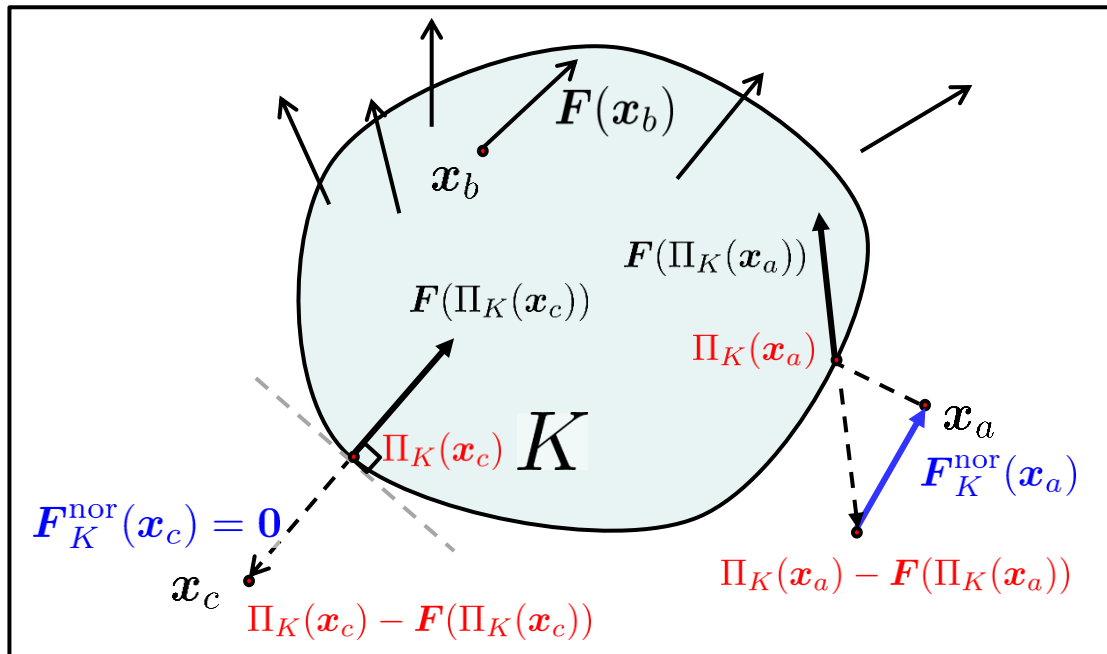
$$\begin{aligned}\mathbf{F}_K^{\text{nat}}(\mathbf{x}) &= \mathbf{x} - \Pi_K(\mathbf{x} - \mathbf{F}(\mathbf{x})) \\ &= \mathbf{x} - \max(\mathbf{0}, \mathbf{x} - \mathbf{F}(\mathbf{x})) \\ &= \mathbf{x} + \min(\mathbf{0}, -\mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x})) \\ &= \min(\mathbf{x}, \mathbf{F}(\mathbf{x}))\end{aligned}$$

NCPの求解アルゴリズムでよく使われるmin function

normal関数 (normal map)

normal 関数 (normal map)

$$\mathbf{F}_K^{\text{nor}}(\mathbf{x}) := \mathbf{F}(\Pi_K(\mathbf{x})) + \mathbf{x} - \Pi_K(\mathbf{x})$$



normal 関数の利点

$\mathbf{F}_K^{\text{nat}}$ の定義域 = $\mathbf{F}$ の定義域

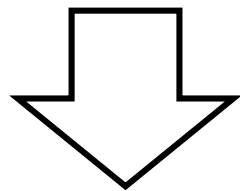


$\mathbf{F}_K^{\text{nor}}$ の定義域 = $\mathbb{R}^n$

(これも証明は演習で)

$$\mathbf{F}_K^{\text{nor}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \iff \Pi_K(\mathbf{x}) \text{ は } \text{VIP}(K, \mathbf{F}) \text{ の解}$$
$$\mathbf{x} = \Pi_K(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\Pi_K(\mathbf{x}))$$

変分不等式問題の解の存在性や解集合の性質を解析するには、非線形方程式 $F_K^{\text{nat}}(x) = 0$ もしくは $F_K^{\text{nor}}(x) = 0$ に対する解集合の性質を解析すればよい.



所与の連続写像 $\Phi : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ に対するベクトル方程式 $\Phi(x) = 0$ の解集合の性質を解析するツールとして、**次数理論 (degree theory)** を導入する.

言葉と記号の定義1 (開集合と閉集合)

Note: $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $S \subseteq \mathbb{R}^n$

中心 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, 半径 $r > 0$ の開球

$$\xleftrightarrow{\text{def}} B(\mathbf{x}, r) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < r\}$$

通常ユークリッドノルム.
(本質的には何でも良い)

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ が集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ の内点

$$\xleftrightarrow{\text{def}} \exists r > 0, B(\mathbf{x}, r) \subseteq S$$

S が開集合 $\xleftrightarrow{\text{def}}$ 任意の $\mathbf{x} \in S$ が S の内点

S が閉集合 $\xleftrightarrow{\text{def}}$ $\mathbb{R}^n \setminus S$ が開集合

i.e., $\{\mathbf{x}^k\} \subseteq S$ である任意の収束列に対して $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^k \in S$

S がコンパクト $\xleftrightarrow{\text{def}}$ S が有界閉集合

本講義では, 特別な断りが無い限り, 有限次元ユークリッド空間を取り扱います.

言葉と記号の定義2 (内部・閉包・境界・etc.)

Note: $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $S \subseteq \mathbb{R}^n$

$\text{int } S$: 集合 S の内部

$\xleftrightarrow{\text{def}}$ 集合 S のすべての内点から成る集合

$\text{cl } S$: 集合 S の閉包

$\xleftrightarrow{\text{def}}$ 集合 S を含むすべての閉集合のうち最小のもの

i.e., $\text{cl } S := \left\{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^k, \{\mathbf{x}^k\} \subseteq S \right\}$

$\text{bd } S$: 集合 S の境界

$\xleftrightarrow{\text{def}}$ $\text{bd } S := \text{cl } S \setminus \text{int } S$

Φ^{-1} : Φ の逆写像
(集合値)

$\xleftrightarrow{\text{def}}$ $\Phi : S \rightarrow T$ および $\mathbf{p} \in T$ に対して

$\Phi^{-1}(\mathbf{p}) := \left\{ \mathbf{x} \in S \mid \Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{p} \right\}$

$\text{SOL}(K, \mathbf{F}) \xleftrightarrow{\text{def}} \text{VIP}(K, \mathbf{F})$ の解集合

i.e., $\text{SOL}(K, \mathbf{F}) = (\mathbf{F}_K^{\text{nat}})^{-1}(\mathbf{0})$

次数理論 (degree theory) とは

- (i) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — 空でない有界な開集合
- (ii) $\Phi : \text{cl } \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ — 連続な関数
- (iii) $p \in \mathbb{R}^n$ — $p \notin \Phi(\text{bd } \Omega)$ を満たすベクトル

i.e., $\text{bd } \Omega$ 上には $\Phi(x) = p$ を満たす点は存在しない.

が与えられたとき, ベクトル方程式

$$\Phi(x) = p$$

引数も関数値もいずれも n 次元ベクトルであることに注意!

の解の存在性を解析するための数学的ツール.

$\deg(\Phi, \Omega, p)$ という指数を用いる. (次頁で定義)

(Note 1) 上記の条件 (i)—(iii) を degree が well-defined であるための『3つの前提』と(本講義では)よぶ.

(Note 2) 実際, 関数は $\mathbb{R}^n$ 全体で定義されていても構わない. その場合, 有界開集合 Ω 上で局所的にベクトル方程式の解析を行うものとする.

degree (次数) の公理

(Φ, Ω, p) が前スライドの(i)-(iii)を満たすとする. このとき, 以下の3つの公理を満たす整数を (Φ, Ω, p) に対するdegree (次数)といい, $\deg(\Phi, \Omega, p)$ と書く.

(A1) 恒等写像の単位性

$$p \in \Omega \implies \deg(I, \Omega, p) = 1 \quad (I: \text{恒等写像})$$

(A2) 加法性

$$\begin{aligned} \Omega_i \subseteq \Omega \ (i = 1, 2), \ \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset, \ p \notin \Phi((\text{cl } \Omega) \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)) \\ \implies \deg(\Phi, \Omega, p) = \deg(\Phi, \Omega_1, p) + \deg(\Phi, \Omega_2, p) \end{aligned}$$

(A3) ホモトピー不変性

$$H : \text{cl } \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \ p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ に対して}$$

$$p(t) \notin H(\text{bd } \Omega, t) \quad \forall t \in [0, 1]$$

$$\implies \deg(H(\cdot, t), \Omega, p(t)) \text{ は任意の } t \in [0, 1] \text{ に対して不変}$$

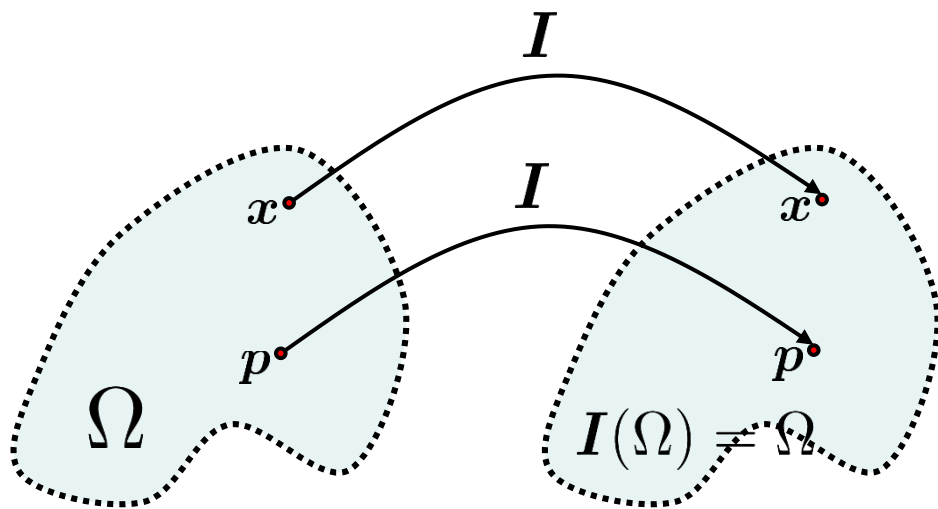
また, $p = 0$ ときは, $\deg(\Phi, \Omega, 0)$ を単に $\deg(\Phi, \Omega)$ と書く.

degree (次数) の公理

(Φ, Ω, p) が前スライドの(i)-(iii)を満たすとする. このとき, 以下の3つの公理を満たす整数を (Φ, Ω, p) に対するdegree (次数) といい, $\deg(\Phi, \Omega, p)$ と書く.

(A1) 恒等写像の単位性

$$p \in \Omega \implies \deg(I, \Omega, p) = 1 \quad (I: \text{恒等写像})$$



$$\deg(I, \Omega, p) = 1$$

また, $p = 0$ ときは, $\deg(\Phi, \Omega, 0)$ を単に $\deg(\Phi, \Omega)$ と書く.

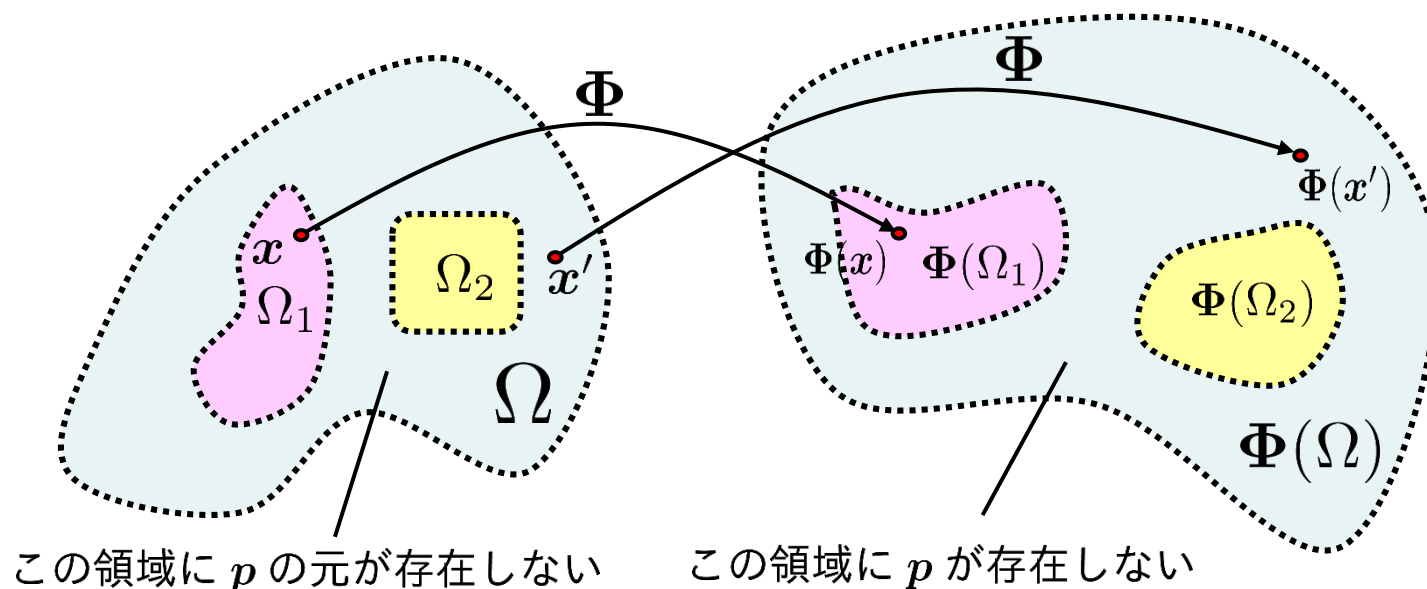
degree (次数) の公理

(Φ, Ω, p) が前スライドの(i)-(iii)を満たすとする。このとき、以下の3つの公理を満たす整数を (Φ, Ω, p) に対するdegree (次数)といい、 $\deg(\Phi, \Omega, p)$ と書く。

(A2) 加法性

$$\Omega_i \subseteq \Omega \ (i = 1, 2), \ \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset, \ p \notin \Phi((\text{cl } \Omega) \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$$

$$\implies \deg(\Phi, \Omega, p) = \deg(\Phi, \Omega_1, p) + \deg(\Phi, \Omega_2, p)$$



また、 $p = 0$ ときは、 $\deg(\Phi, \Omega, 0)$ を単に $\deg(\Phi, \Omega)$ と書く。

degree (次数) の公理

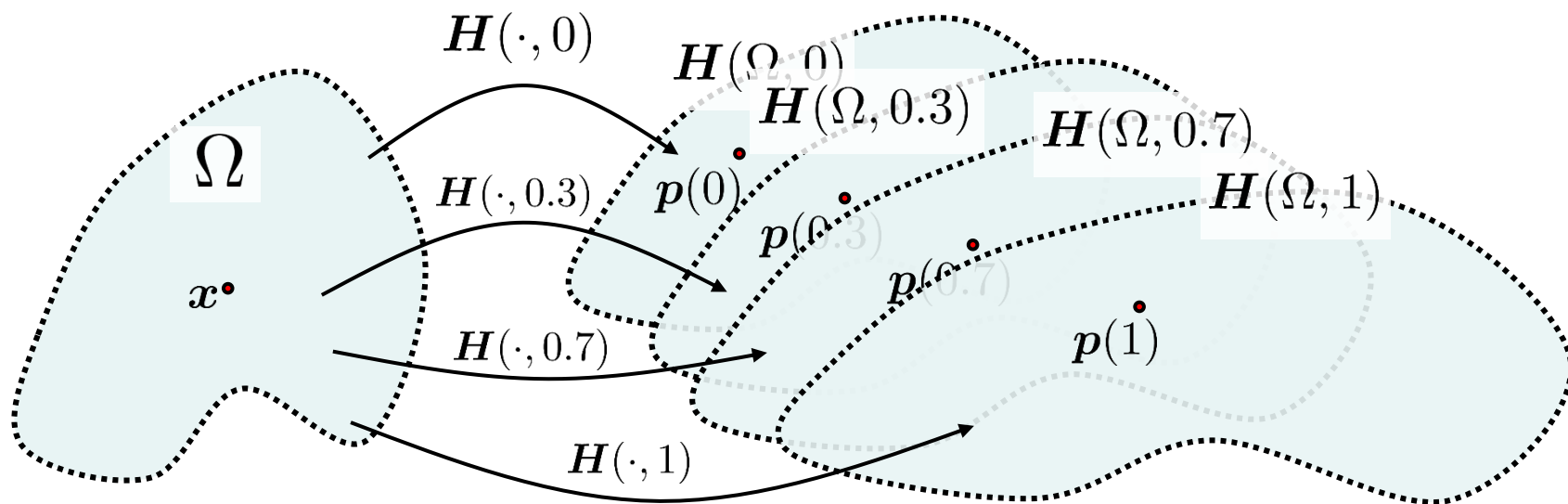
(Φ, Ω, p) が前スライドの(i)-(iii)を満たすとする. このとき, 以下の3つの公理を満たす整数を (Φ, Ω, p) に対する degree (次数) といい, $\deg(\Phi, \Omega, p)$ と書く.

(A3) ホモトピー不変性

$H : \text{cl } \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ に対して

$p(t) \notin H(\text{bd } \Omega, t) \quad \forall t \in [0, 1]$

$\implies \deg(H(\cdot, t), \Omega, p(t))$ は任意の $t \in [0, 1]$ に対して不変



degree (次数) の公理

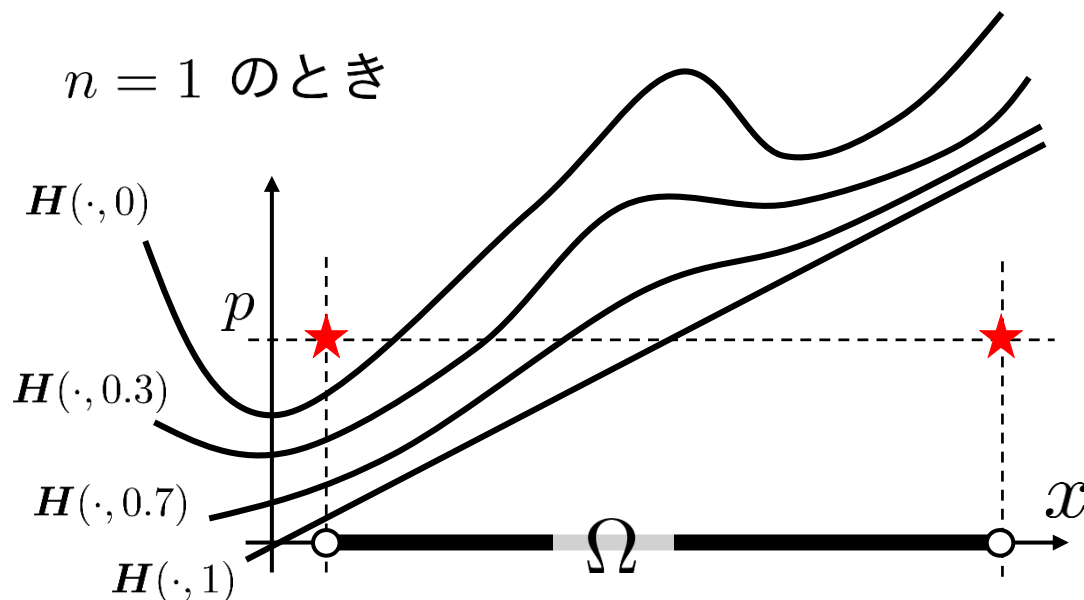
(Φ, Ω, p) が前スライドの(i)-(iii)を満たすとする. このとき, 以下の3つの公理を満たす整数を (Φ, Ω, p) に対するdegree (次数) といい, $\deg(\Phi, \Omega, p)$ と書く.

(A3) ホモトピー不変性

$H : \text{cl } \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ に対して

$$p(t) \notin H(\text{bd } \Omega, t) \quad \forall t \in [0, 1]$$

$\implies \deg(H(\cdot, t), \Omega, p(t))$ は任意の $t \in [0, 1]$ に対して不変



通常, $H(\cdot, 0) := \Phi(x)$ および $H(\cdot, 1) := I(x)$ となるようなホモトピー関数が良く用いられる.

すべての $t \in [0, 1]$ に対して, $H(\cdot, t)$ のグラフは左図の赤星の部分を通ってはならない.

degree の具体例

【アフィン関数の場合】

$n = 1$ のとき

i.e., $(p - b)/a \in \Omega$

$$\Phi(x) = ax + b, \quad p \in \Omega(\Phi), \quad a \neq 0 \implies \deg(\Phi, \Omega, p) = \operatorname{sgn}(a)$$

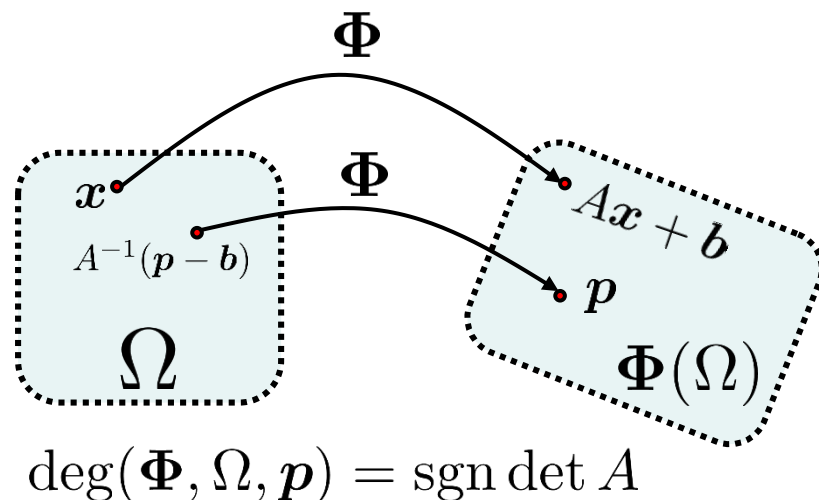
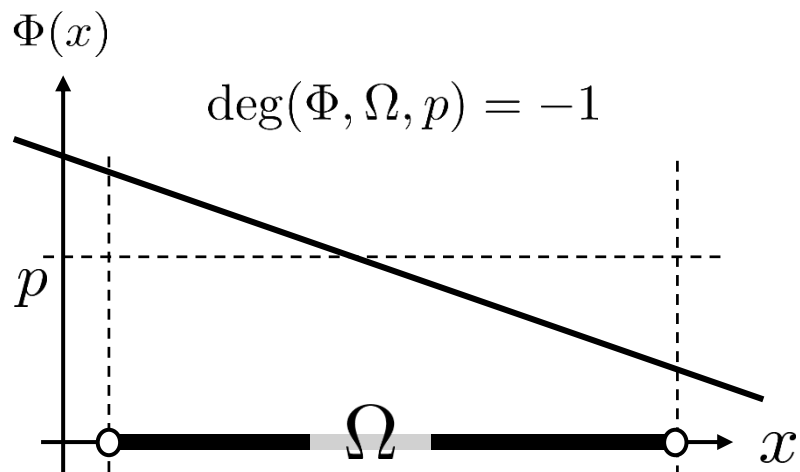
(増加関数なら $\deg=1$, 減少関数なら $\deg = -1$)

$n \geq 2$ のとき

$$\Phi(x) = Ax + b, \quad p \in \Phi(\Omega), \quad \det(A) \neq 0$$

i.e., $A^{-1}(p - b) \in \Omega$

$$\implies \deg(\Phi, \Omega, p) = \operatorname{sgn} \det A$$



degree の具体例

【アフィン関数の場合】

$n = 1$ のとき

i.e., $(p - b)/a \in \Omega$

$$\Phi(x) = ax + b, \quad p \in \Omega(\Phi), \quad a \neq 0 \implies \deg(\Phi, \Omega, p) = \operatorname{sgn}(a)$$

(増加関数なら $\deg=1$, 減少関数なら $\deg = -1$)

$n \geq 2$ のとき

$$\Phi(x) = Ax + b, \quad p \in \Phi(\Omega), \quad \det(A) \neq 0$$

i.e., $A^{-1}(p - b) \in \Omega$

$$\implies \deg(\Phi, \Omega, p) = \operatorname{sgn} \det A$$

【単射の場合】

$$\Phi \text{ は } \operatorname{cl} \Omega \text{ 上で単射} \implies \begin{aligned} &\deg(\Phi, \Omega, p) = 1 \quad (\forall p \in \Phi(\Omega)) \\ &\text{or } \deg(\Phi, \Omega, p) = -1 \quad (\forall p \in \Phi(\Omega)) \end{aligned}$$

Φ は $\operatorname{cl} \Omega$ 上で連続微分可能な単射

$$\implies \deg(\Phi, \Omega, p) = \operatorname{sgn} \det \nabla \Phi(x) \quad (\forall p \in \Phi(\Omega))$$

$x \in \operatorname{cl} \Omega$ は $\nabla \Phi(x)$ が正則な任意の点

1次元の場合

$\text{bd } \Omega = \{\ell, u\}$ ゆえ

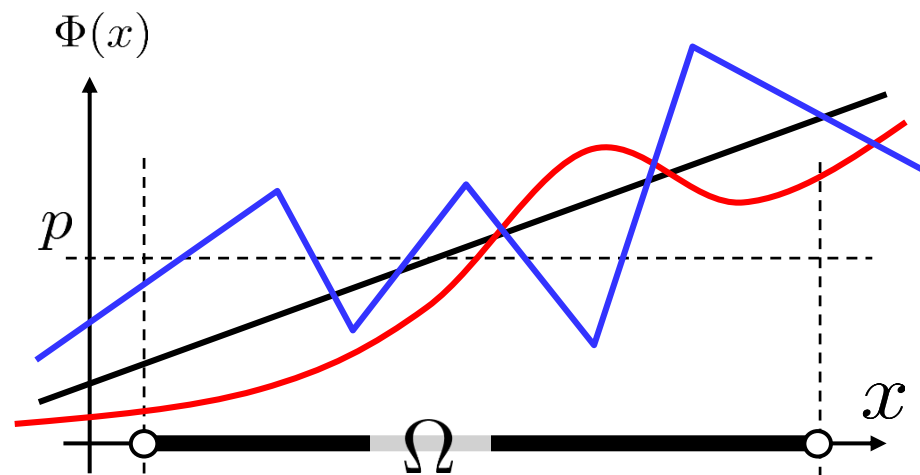
$p \notin \Phi(\text{bd } \Omega) \iff \Phi(\ell) \neq p \text{ and } \Phi(u) \neq p$

$$\Omega = (\ell, u), \quad \Phi(\ell) < p < \Phi(u) \implies \deg(\Phi, \Omega, p) = 1$$

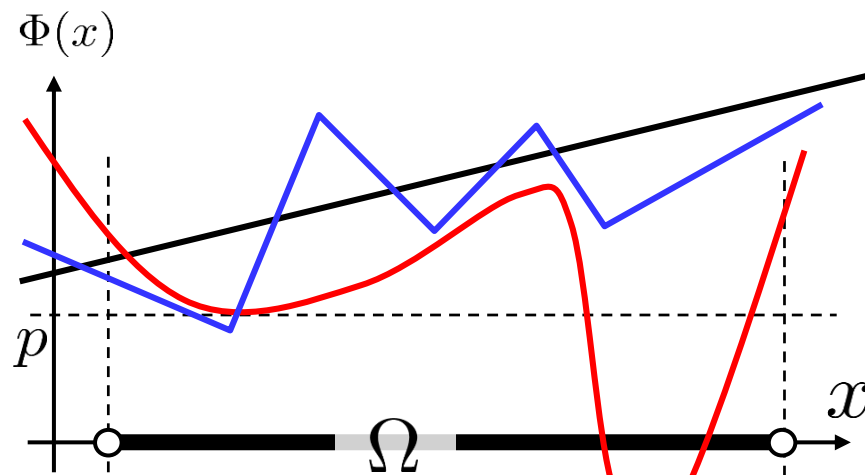
$$\Omega = (\ell, u), \quad \Phi(\ell) > p > \Phi(u) \implies \deg(\Phi, \Omega, p) = -1$$

$$\Omega = (\ell, u), \quad \Phi(\ell) < p, \Phi(u) < p \implies \deg(\Phi, \Omega, p) = 0$$

$$\Omega = (\ell, u), \quad \Phi(\ell) > p, \Phi(u) > p \implies \deg(\Phi, \Omega, p) = 0$$



$$\deg(\Phi, \Omega, p) = 1$$



$$\deg(\Phi, \Omega, p) = 0$$

Ω が複数の开区間の和集合の場合 , $\deg(\Phi, \Omega, p)$ は他の値も取りうる .

degree の満たす性質 1

well-definednessの3前提

- (i) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — 非空・有界・開
- (ii) $\Phi : \text{cl } \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ — 連続
- (iii) $p \notin \Phi(\text{bd } \Omega)$

(a) $\deg(\Phi, \Omega, p)$ の値は整数であり一意に決まる.

$$(b) \deg(\Phi, \Omega, p) = \deg(\Phi - p, \Omega)$$

$$(c) \Phi_a := \Phi(x - a) \text{ のとき, } \deg(\Phi_a, \Omega + a, p) = \deg(\Phi, \Omega, p)$$

$$(d) \Phi(x) = \Upsilon(x) \quad \forall x \in \text{bd } \Omega \text{ ならば, } \deg(\Phi, \Omega, p) = \deg(\Upsilon, \Omega, p)$$

$$(e) \Omega_1, \Omega_2 \text{ — 有界・開} \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$$

$$\implies \deg(\Phi, \Omega_1 \cup \Omega_2, p) = \deg(\Phi, \Omega_1, p) + \deg(\Phi, \Omega_2, p)$$

(f) (Φ, Ω, p) だけでなく (Ψ, Ω', q) も前提 (i)–(iii) を満たす.

$$\implies \deg(\Phi \times \Psi, \Omega \times \Omega', (p, q)) = \deg(\Phi, \Omega, p) \deg(\Psi, \Omega', q)$$

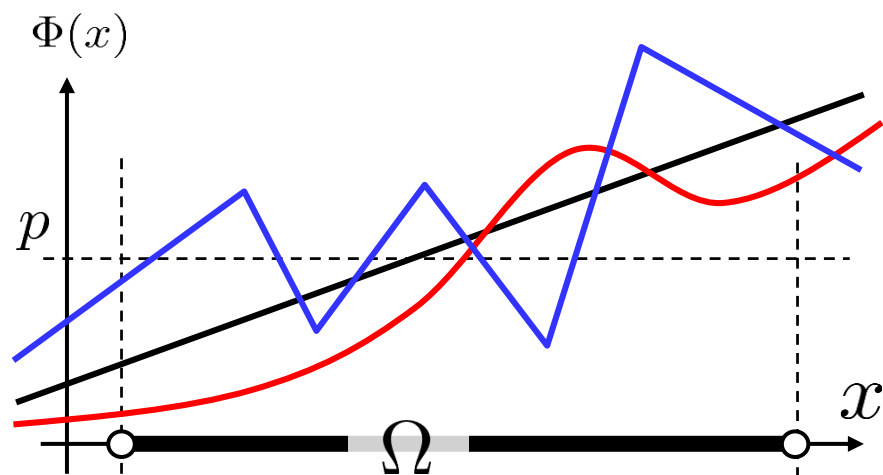
degree と解の存在性

ベクトル方程式 $\Phi(x) = p$ の解の存在性に関して以下が成り立つ.

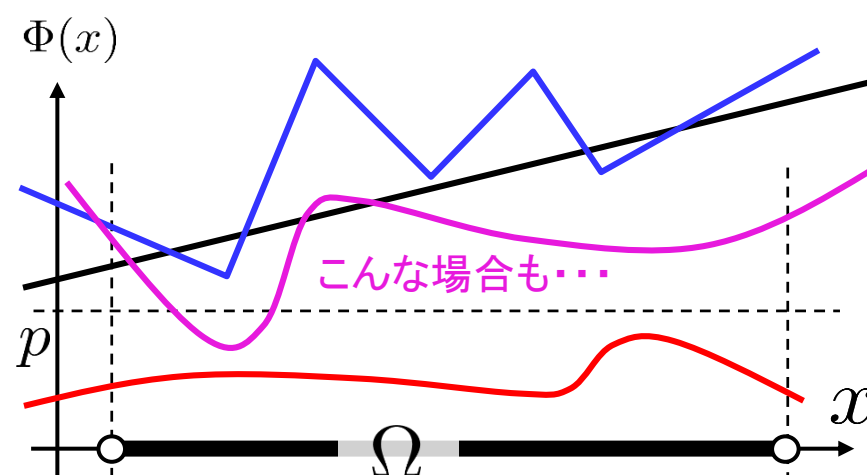
(Φ, Ω, p) が well-definedness の 3 前提を満たすとする. このとき,

$$\deg(\Phi, \Omega, p) \neq 0 \implies \exists \bar{x} \in \Omega, \Phi(\bar{x}) = p$$

$$\text{※対偶} : \deg(\Phi, \Omega, p) = 0 \iff \nexists \bar{x} \in \Omega, \Phi(\bar{x}) = p$$



$$\deg(\Phi, \Omega, p) = 1$$



こんな場合も...

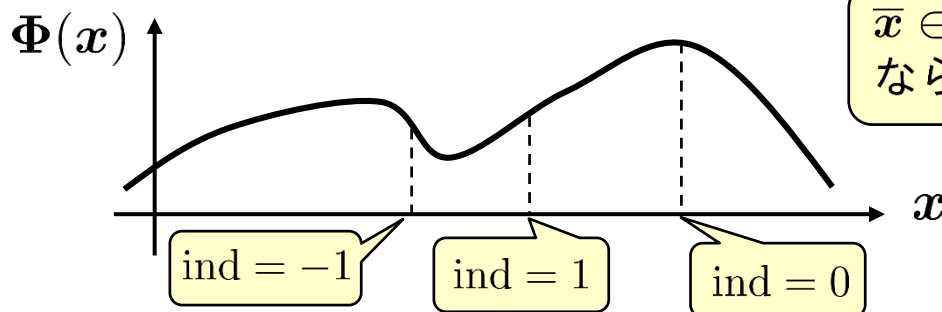
$$\deg(\Phi, \Omega, p) = 0$$

index の定義

$\bar{x} \in \Omega$ が孤立的 p -点 $\longleftrightarrow$ $\text{def} \quad \Phi(\bar{x}) = p$ かつ
 (孤立的 $\Phi(\bar{x})$ -点) $\exists \mathcal{N}': \bar{x}$ の開近傍, $\Phi^{-1}(p) \cap \text{cl } \mathcal{N}' = \{\bar{x}\}$

$\bar{x} \in \Omega$ が孤立的 p -点のとき, index が以下のように定義される.

$$\text{ind}(\Phi, \bar{x}) := \deg(\Phi, \mathcal{N}', p)$$



$\bar{x} \in \Omega$ が孤立的 p -点 ($p = \Phi(\bar{x})$) ならば, $\text{ind}(\Phi, \bar{x})$ は必ず定義される.

さらに...

Φ が $\bar{x}$ で微分可能かつ $\nabla \Phi(\bar{x})$ が正則なとき

$$\text{ind}(\Phi, \bar{x}) = \text{sgn } \det \nabla \Phi(\bar{x})$$

(Note) $\det \nabla \Phi(\bar{x}) = 0$ だからといって $\text{ind}(\Phi, \bar{x}) = 0$ とは限らない.

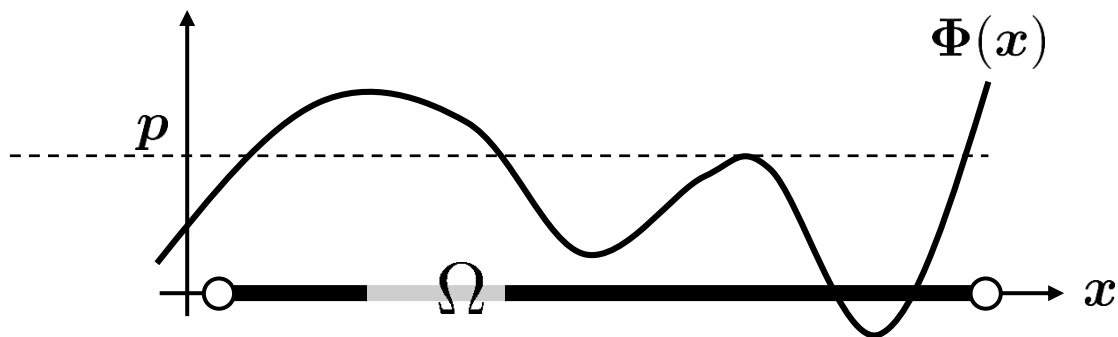
degree と index の関係

well-definednessの3前提

- (i) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — 非空・有界・開
- (ii) $\Phi : \text{cl } \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ — 連続
- (iii) $p \notin \Phi(\text{bd } \Omega)$

さらに $|\Phi^{-1}(p)| < \infty$ とする. このとき,

$$\deg(\Phi, \Omega, p) = \sum_{x \in \Phi^{-1}(p)} \text{ind}(\Phi, x)$$



$$\deg(\Phi, \Omega, p) = 1 - 1 + 0 + 1 = 1$$

VIPの解の存在性

VIP(F, K)

Find $x \in K$

s.t. $F(x)^\top (x' - x) \geq 0 \quad (\forall x' \in K)$

さて、解の存在性を議論するため、次のような集合を導入する。

$x^{\text{ref}} \in K$ に対して

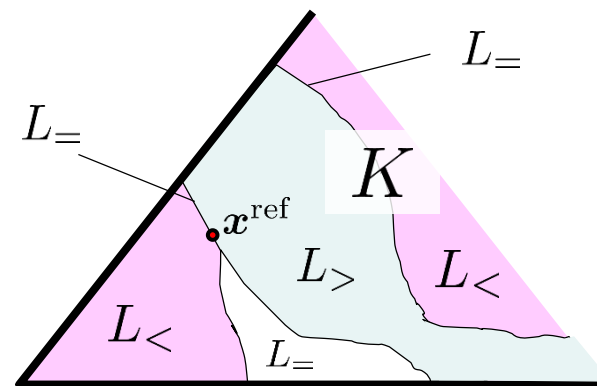
$$L_{<}(x^{\text{ref}}) := \left\{ x \in K \mid F(x)^\top (x - x^{\text{ref}}) < 0 \right\}$$

$$L_{=}(x^{\text{ref}}) := \left\{ x \in K \mid F(x)^\top (x - x^{\text{ref}}) = 0 \right\}$$

$$L_{>}(x^{\text{ref}}) := \left\{ x \in K \mid F(x)^\top (x - x^{\text{ref}}) > 0 \right\}$$

$$L_{\leq}(x^{\text{ref}}) := \left\{ x \in K \mid F(x)^\top (x - x^{\text{ref}}) \leq 0 \right\} = L_{<}(x^{\text{ref}}) \cup L_{=}(x^{\text{ref}})$$

$$L_{\geq}(x^{\text{ref}}) := \left\{ x \in K \mid F(x)^\top (x - x^{\text{ref}}) \geq 0 \right\} = L_{>}(x^{\text{ref}}) \cup L_{=}(x^{\text{ref}})$$



- ・ x^{ref} が変われば、上図の色塗りのパターンも変わる。
- ・ 上記の集合は空集合の可能性もある。

これらの集合が満たす性質

$$K = L_{<} \cup L_{=} \cup L_{>} \quad \text{かつ} \quad (L_{<} \cap L_{=}) = (L_{=} \cap L_{>}) = (L_{>} \cap L_{<}) = \emptyset$$

$$x^{\text{ref}} \in L_{=}(x^{\text{ref}})$$

$$\text{SOL}(K, F) = \left\{ x \in K \mid F(x)^\top (x' - x) \geq 0 \quad (\forall x' \in K) \right\} = \bigcap_{x' \in K} L_{\leq}(x')$$

VIPの解の存在性

VIP(F, K)

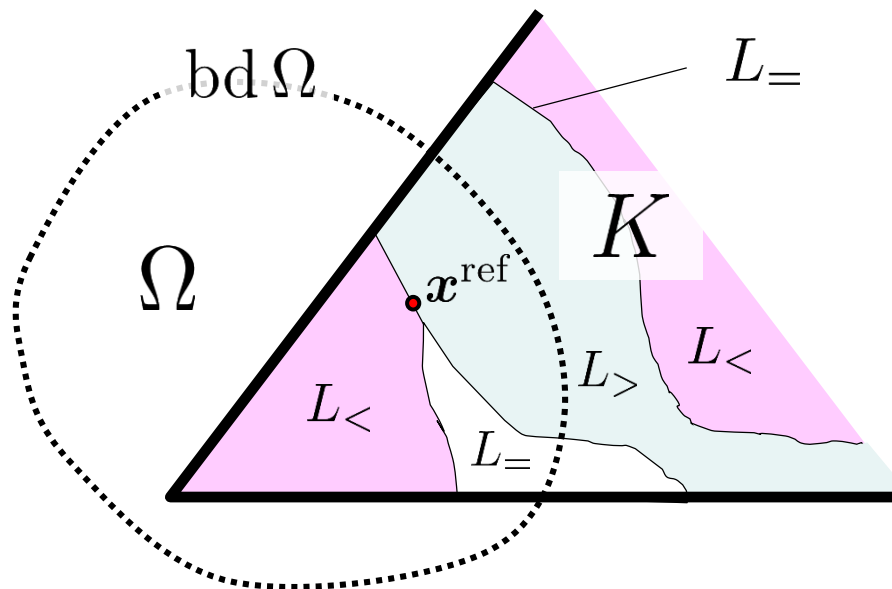
Find $x \in K$

s.t. $F(x)^\top (x' - x) \geq 0 \quad (\forall x' \in K)$

定理 (VIPに解が存在するための十分条件)

条件A: $L_<(x^{\text{ref}}) \cap \text{bd } \Omega = \emptyset$ を満たすような
有界開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ と $x^{\text{ref}} \in K \cap \Omega$ が存在

$\implies \text{SOL}(K, F) \neq \emptyset$



VIPの解の存在性

degree theoryを使った証明の概略

VIP(F, K)

Find $x \in K$

s.t. $F(x)^\top (x' - x) \geq 0 \quad (\forall x' \in K)$

条件A: $L_{<}(x^{\text{ref}}) \cap \text{bd } \Omega = \emptyset$ を満たすような
有界開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ と $x^{\text{ref}} \in K \cap \Omega$ が存在

$\text{SOL}(K, F) = \emptyset$ と仮定 (矛盾を導くため)

$H(x, t) := x - \Pi_K(t(x - F(x)) + (1 - t)x^{\text{ref}})$ ——— ホモトピー関数

$\longrightarrow H(x, 0) = x - x^{\text{ref}}$

$x^{\text{ref}} \in \Omega$ ゆえ $\deg(H(\cdot, 0), \Omega) = 1$

Ω は開集合ゆえ $x^{\text{ref}} \notin \text{bd } \Omega$, i.e., $0 \notin H(\text{bd } \Omega, 0)$

$\longrightarrow H(x, 1) = x - \Pi_K(x - F(x)) = F_K^{\text{nat}}(x)$

$\text{SOL}(K, F) = \emptyset$ の仮定より, $0 \notin F_K^{\text{nat}}(\mathbb{R}^n)$,

i.e., $0 \notin F_K^{\text{nat}}(\text{bd } \Omega) = H(\text{bd } \Omega, 1)$

さらに, いくつかの議論(演習問題)により,

$0 \notin H(\text{bd } \Omega, t) \quad \forall t \in (0, 1)$

よって, degreeのホモトピー不変性より,

$\deg(F_K^{\text{nat}}, \Omega) = \deg(H(\cdot, 1), \Omega) = \deg(H(\cdot, 0), \Omega) = 1$

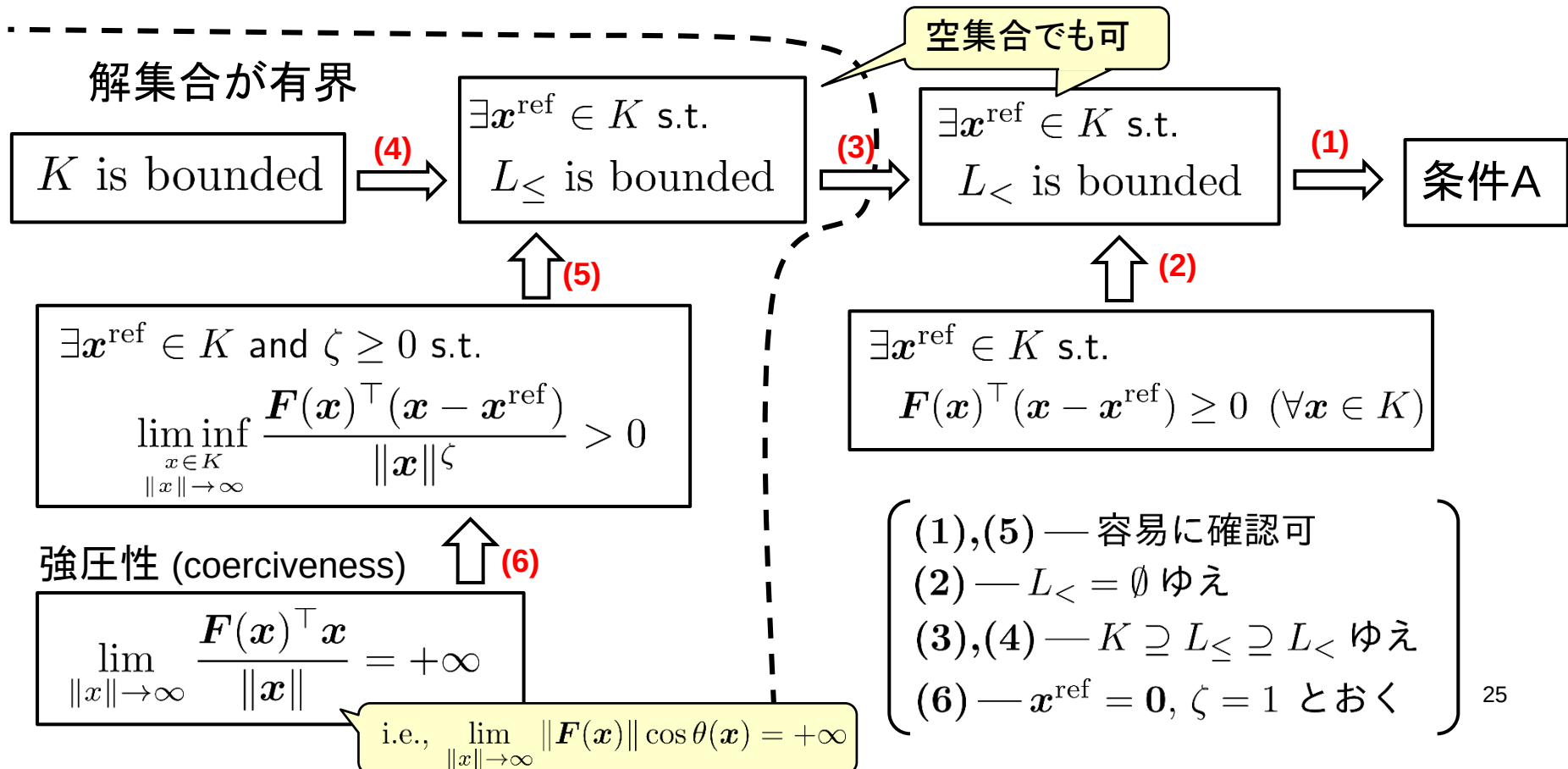
$\longrightarrow \text{SOL}(K, F) = \emptyset$ に矛盾

解釈しやすい十分条件

$$\begin{array}{ll} \text{Find} & x \in K \\ \text{s.t.} & F(x)^\top (x' - x) \geq 0 \quad (\forall x' \in K) \end{array}$$

条件A: $\exists \Omega \subset \mathbb{R}^n$ and $x^{\text{ref}} \in K \cap \Omega$, s.t. $L_{<}(x^{\text{ref}}) \cap \text{bd } \Omega = \emptyset$

→ 一見恣意的でチェックが困難なので、
より解釈しやすくチェックが容易な十分条件を考える。



不動点定理による解析

“ K is bounded $\implies \text{SOL}(K, F) \neq \emptyset$ ” と “ F is coercive $\implies \text{SOL}(K, F) \neq \emptyset$ ”

は元々よく知られた結果で、実はdegree theoryを使わなくても証明可.

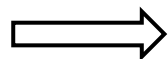
特に前者は**Brouwerの不動点定理**より直ちに成立.

Brouwerの不動点定理 (Brouwer's fixed point theorem)

$H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$: 連続関数

$S \subset \mathbb{R}^n$: コンパクト凸集合

任意の $x \in S$ に対して $H(x) \in S$



$$x^* = H(x^*) \in S$$

を満たす不動点 x^* が存在.

$$H(x) := \Pi_K(x - F(x))$$

equiv.

$$x = H(x) \iff x \in \text{SOL}(K, F)$$

(x is the fixed point of H .)

$$F_K^{\text{nat}}(x) = x - \Pi_K(x - F(x))$$

$$F_K^{\text{nat}}(x) = 0 \iff x \in \text{SOL}(K, F)$$

関数の単調性

VIPの解の唯一性を議論するためには、関数の単調性やP性が重要な役割を果たす.

Definition

Function $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ is said to be

(i) monotone (単調) if

$$(x - y)^\top (F(x) - F(y)) \geq 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n;$$

(ii) strictly monotone (狭義単調) if

$$(x - y)^\top (F(x) - F(y)) > 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \text{ with } x \neq y;$$

(iii) strongly monotone (強単調) if there exists $\sigma > 0$ such that

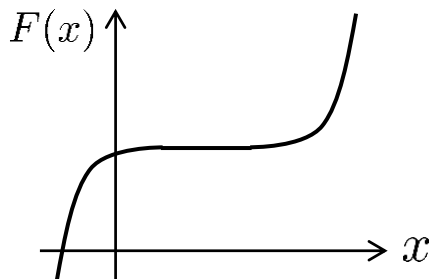
$$(x - y)^\top (F(x) - F(y)) \geq \sigma \|x - y\|^2, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

明らかに “強単調” $\implies$ “狭義単調” $\implies$ “単調”

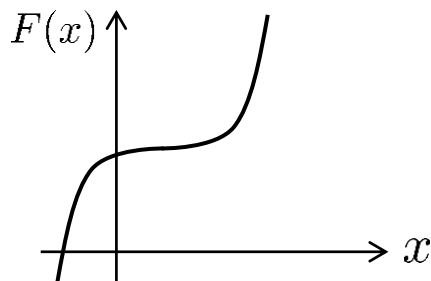
単調関数の図的解釈

examples for $n = 1$

単調関数 (= 単調非減少)

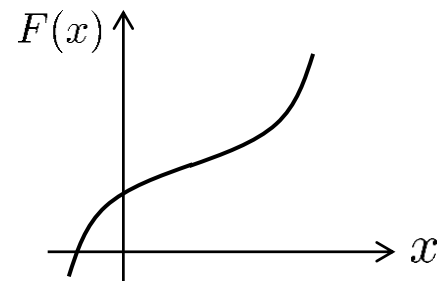


単調関数 (= 単調増加)

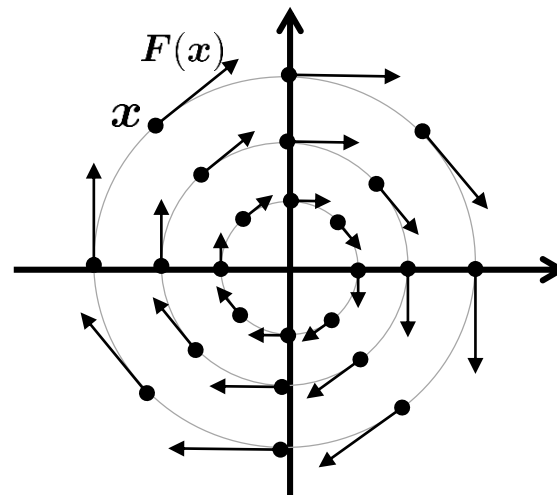
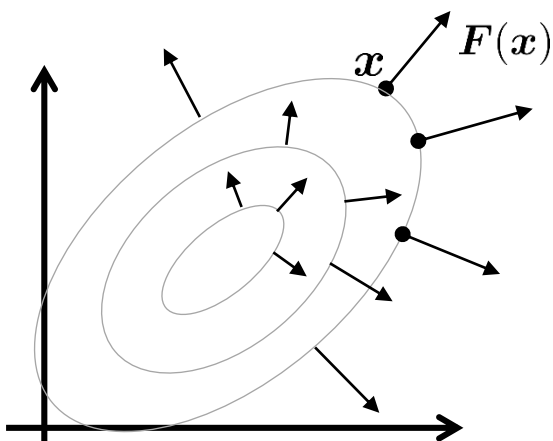


強単調

$(F'(x) \geq \sigma \text{ for all } x)$



examples for $n = 2$



単調性と凸性の関係

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ が二階連続的微分可能とする。このとき、

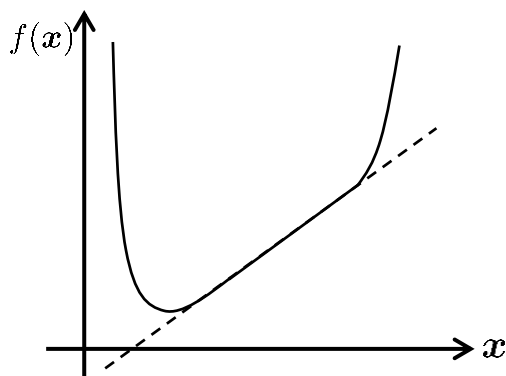
$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ が凸} \iff \nabla f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ が単調}$$

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ が狭義凸} \iff \nabla f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ が狭義単調}$$

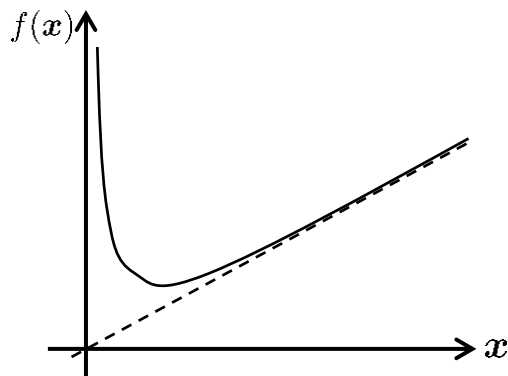
$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ が強凸} \iff \nabla f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ が強単調}$$

※狭義凸関数 —— 凸関数の定義の不等号が狭義に成立

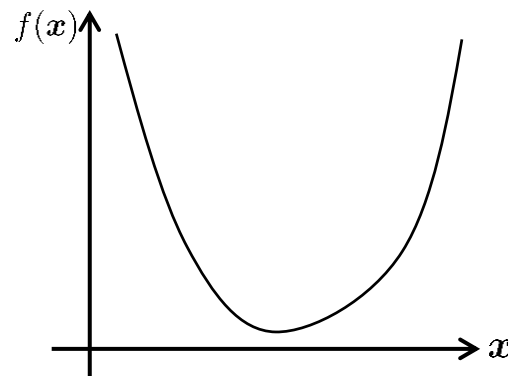
※強凸関数 —— 凸関数 + $\frac{1}{2}\sigma\|x\|^2$ という構造をもつ関数



凸だが狭義凸でない



狭義凸だが強凸でない



強凸

単調性と半正定値性の関係

単調性とヤコビ行列の正定値性に関して以下の関係が成り立つ.

$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ が単調 $\iff \nabla F(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は任意の $x \in \mathbb{R}^n$ で半正定値

$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ が狭義単調 $\iff \nabla F(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は任意の $x \in \mathbb{R}^n$ で正定値

$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ が係数 σ で強単調 $\iff \nabla F(x) - \sigma I$ は任意の $x \in \mathbb{R}^n$ で半正定値
($\sigma > 0$)

$\frac{1}{2}(\nabla F(x) + \nabla F(x)^\top)$ の最小固有値が σ

“狭義単調 $\implies$ 正定値” が成り立たない例は $F(x) = x^3$ ($n = 1$) など

$F(x) = Mx + q$ のときは $\nabla F(x) = M^\top$ なので, F の単調性と行列 M の半正定値性が上記の関係.

単調性と解集合の関係

$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ が単調

$\implies \text{SOL}(K, F)$ は閉凸または空

$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ が狭義単調

$\implies \text{SOL}(K, F)$ は単集合または空
(singleton)

$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ が強単調

$\implies \text{SOL}(K, F)$ は単集合 (すなわち解が唯一存在)

これらより以下のことが観察できる.

F が狭義単調 & 解の存在性条件 (前述の条件Aなど)

$\implies \text{SOL}(K, F)$ は単集合

F が強単調 $\implies F$ が狭義単調かつ強圧的 $\implies \text{SOL}(K, F)$ は単集合

(強単調関数が強圧的であることは容易に示せる.)

関数の性質

集合
補性単調: $(x - y)^\top (F(x) - F(y)) \geq 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n;$ 狭義単調: $(x - y)^\top (F(x) - F(y)) > 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \text{ with } x \neq y;$ 強単調: $(x - y)^\top (F(x) - F(y)) \geq \sigma \|x - y\|^2, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$

Definition

 $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ is said to be(i) P_0 function if, for any $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ with $x \neq y$,

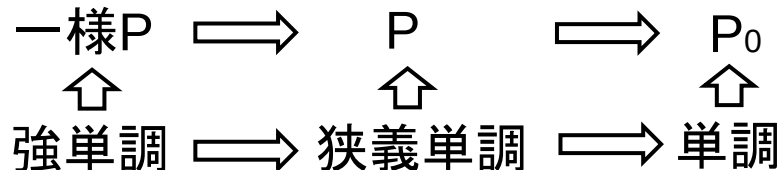
$$\exists i \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ s.t. } x_i \neq y_i \text{ and } (x_i - y_i)(F_i(x) - F_i(y)) \geq 0;$$

(ii) P function if, for any $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ with $x \neq y$,

$$\max_{i \in \{1, \dots, n\}} (x_i - y_i)^\top (F_i(x) - F_i(y)) > 0;$$

(iii) uniformly P function if, for any $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$\max_{i \in \{1, \dots, n\}} (x_i - y_i)^\top (F_i(x) - F_i(y)) \geq \sigma \|x - y\|^2.$$



P関数とP行列および解集合の関係

$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ が P_0 関数 $\iff \nabla F(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は任意の $x \in \mathbb{R}^n$ で P_0 行列

$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ が P 関数 $\iff \nabla F(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は任意の $x \in \mathbb{R}^n$ で P 行列

$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ が係数 σ の一様 P 関数 $\iff \nabla F(x) - \sigma I$ は任意の $x \in \mathbb{R}^n$ で P_0 行列

P_0 行列 $\xleftrightarrow{\text{def}}$ すべての主小行列式が非負
 P 行列 $\xleftrightarrow{\text{def}}$ すべての主小行列式が正

$$\det M_{II} > 0 \quad \forall I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$$

$K = \mathbb{R}_+^n$ または $\mathbb{R}_+^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ のとき (もっと言うと直方体のときも)

$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ が P 関数

$\implies \text{SOL}(K, F)$ は単集合または空

$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ が一様 P 関数

$\implies \text{SOL}(K, F)$ は単集合 (すなわち解が唯一存在)

Cartesian P性

VIP($K, \mathbf{F}$)

Find $\mathbf{x} \in K$

s.t. $\mathbf{F}(\mathbf{x})^\top (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \geq 0 \quad (\forall \mathbf{x}' \in K)$

P性は集合 K が直積構造をもつ場合にも拡張可能.

(解の存在性や一意性についても前スライドと類似の結果が成り立つ. 詳細略)

Definition

Suppose that $K = K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_m$, where $K_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$ ($i = 1, 2, \dots, m$) and $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$. Then, function $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ is said to be

(i) Cartesian P_0 if, for any $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ with $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$,

$$\exists i \in \{1, 2, \dots, m\} \text{ s.t. } \mathbf{x}_i \neq \mathbf{y}_i \text{ and } (\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i)^\top (\mathbf{F}_i(\mathbf{x}) - \mathbf{F}_i(\mathbf{y})) \geq 0;$$

(ii) Cartesian P if, for any $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ with $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$,

$$\max_{i \in \{1, \dots, m\}} (\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i)^\top (\mathbf{F}_i(\mathbf{x}) - \mathbf{F}_i(\mathbf{y})) > 0;$$

(iii) strongly (uniformly) Cartesian P if, for any $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$\max_{i \in \{1, \dots, m\}} (\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i)^\top (\mathbf{F}_i(\mathbf{x}) - \mathbf{F}_i(\mathbf{y})) \geq \sigma \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2.$$

Here, $\mathbf{x} := (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_m}$, and

$\mathbf{F}(\mathbf{x}) := (\mathbf{F}_1(\mathbf{x}), \mathbf{F}_2(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{F}_m(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_m}$.

VIPを解くためのアプローチ

VIPを解くためのアプローチの多くは、等価最適化問題への再定式化をベースとすることが多い。

等価最適化問題の目的関数を**メリット関数**という。

メリット関数

$\theta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ が以下の性質を満たすとき、 $\text{VIP}(K, F)$ に対するメリット関数という。

- (i) $\theta(x) \geq 0$ for all $x \in K$;
- (ii) $\theta(x) = 0$ and $x \in K$ if and only if $x \in \text{SOL}(K, F)$.

$\Psi(x) := \|F_K^{\text{nat}}(x)\|^2$ は典型的なメリット関数のひとつ。

Notice: $F_K^{\text{nat}}(x) = x - \Pi_K(x - F(x))$

$$F^{\text{nat}}(x) = 0 \xLeftrightarrow{\text{equiv.}} x \in \text{SOL}(K, F)$$

VIP(K, F)

Find $x \in K$

s.t. $F(x)^\top (x' - x) \geq 0 \quad (\forall x' \in K)$

メリット関数の例2

Gap function (ギャップ関数)

$$\begin{aligned} g_\infty(x) &:= \sup_{y \in K} \left\{ F(x)^\top (x - y) \right\} \\ &= - \inf_{y \in K} \left\{ F(x)^\top (y - x) \right\} \end{aligned}$$

- (利点)
- 直感的に分かりやすい
 - K が多面体のときはLPを解くことにより関数値の評価ができる.
- (欠点)
- $g_\infty(x) = +\infty$ となるような $x \in K$ が存在しうる.
 - F が微分可能でも, g_∞ は微分可能とは限らない.

VIP(K, F)

Find $x \in K$

s.t. $F(x)^\top (x' - x) \geq 0 \quad (\forall x' \in K)$

メリット関数の例3

Generalized gap function (正則化ギャップ関数)

$$g_\alpha(x) := \max_{y \in K} \left\{ F(x)^\top (x - y) - \frac{1}{2\alpha} \|x - y\|^2 \right\}$$

$\alpha > 0$: given constant

(利点) • 関数値がつねに有限.

• F が微分可能なら, g_α も微分可能.

(欠点) • $x \notin K$ のとき, $g_\alpha(x) < 0$ となりうる.

(すなわち, 無制約最適化問題としての定式化はできない.)

VIP(K, F)

Find $x \in K$

s.t. $F(x)^\top (x' - x) \geq 0 \quad (\forall x' \in K)$

メリット関数の例4

D gap function (Dギャップ関数)

$$g_{\alpha\beta}(x) := g_\alpha(x) - g_\beta(x)$$

$\alpha > \beta > 0$: given constants

$g_\alpha, g_\beta > 0$: generalized gap functions

- (利点)
- 関数値がつねに有限.
 - F が微分可能なら, g_α も微分可能.
 - 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $g_{\alpha\beta}(x) \geq 0$
(無制約最適化問題として定式化可能)

- (欠点)
- (あえて言うなら) 定義が少しややこしい.

メリット関数を用いた求解アプローチの可能性

メリット関数を用いればどんな VIP も最適化アルゴリズムにて求解可能か？

————→ 残念ながら “No”

通常、メリット関数の定義式には射影や最大化の作用素が含まれている。

関数値の評価そのものが一般には容易ではない。（可能であってもひと手間かかる。）

しかしながら、もし集合 K が単純な構造（非負象限・二次錐・半正定値錐など）をもっていれば、射影や最大化を陽に表すことによりメリット関数を容易に計算できることも多い。

それでも、メリット関数を最小化するための点列の生成法は問題構造によって色んな手法が考えられる。