

代数的組合せ最適化

Edmonds問題の最近の発展について

平井広志

東京大学 大学院情報理工学系研究科

数理情報学専攻

hirai@mist.i.u-tokyo.ac.jp

組合せ最適化セミナー

京都大学数理解析研究所

2019年8月7日

組合せ最適化の発展

- 1960年代: J. Edmonds --- 多項式時間アルゴリズム,
最大最小定理, 良い特徴付け, **多面体的方法**,
マトロイド, 劣モジュラ関数, ...
- 1970年代: PとNP
- 1980年代: Grotschel-Lovasz-Schrijver
⋮
多面体的パラダイム: 問題 $X \in P \approx$ 良いLP定式化を持つ

A.Schrijver: *Combinatorial Optimization---Polyhedra and Efficiency*, 2003.
---- 多面体的方法による組合せ最適化の集大成

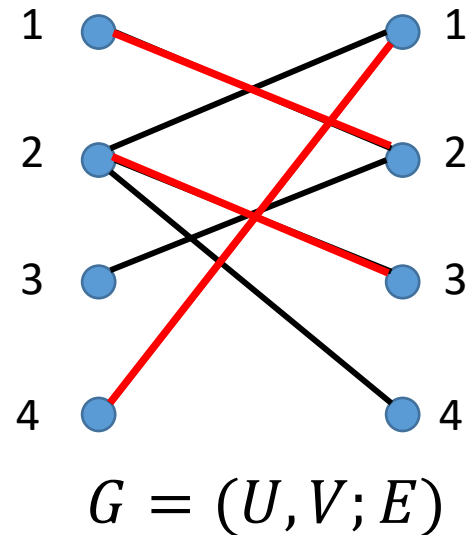
今回のセミナー:
多面体的方法とは異なる**代数的視点**からのアプローチ

代数的組合せ最適化 part I

非可換Edmonds問題

1. 導入：2部マッチング，行列式，ランク
2. Edmonds 問題
3. 非可換Edmonds問題
 - 非可換ランク(nc-rank)
 - Fortin-Reutenauerの定理，MVSP
 - Wong sequence

導入：2部マッチング，行列式，ランク

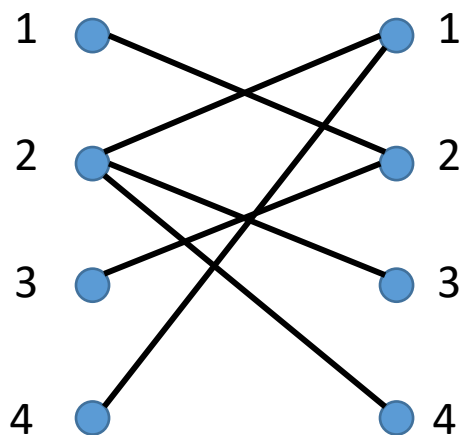


最大マッチング問題：

最大サイズ（枝数）のマッチングを求めよ

- 最大最小定理（König-Egerváry, Hall）
- 多項式時間アルゴリズム（増加道アルゴリズム）

最大マッチング問題の線形代数的解釈



$$G = (U, V; E)$$

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} & & & \\ & x_{12} & & \\ x_{21} & & x_{23} & x_{24} \\ & x_{32} & & \\ & & & x_{41} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$A := \sum_{ij \in E} E_{ij} x_{ij}$$

Lem: G の最大マッチング数 = rank A

ランクの復習 + 証明

$A: n \times m$ 行列, 体 $\mathbb{K}$ 上

$\text{rank } A := \mathbb{K}$ 上線形独立な列 (行) の最大数

$$= \min \{r \mid \exists B \in \mathbb{K}^{n \times r}, C \in \mathbb{K}^{r \times m}: A = BC\}$$

$$= \max \{r \mid \exists r \times r \text{ 正則部分行列}\}$$

$$= \max \{r \mid \exists r \times r \text{ 部分行列 } A': \det A' \neq 0\}$$

(Lemの証明) $G = (U, V; E): |U| = |V| = n$

$$\det A = \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1, \dots, n} A_{i\sigma(i)} = \sum_{\sigma: \forall i, i\sigma(i) \in E} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1, \dots, n} x_{i\sigma(i)}$$

$$= \sum_M \text{sgn}(\sigma) \prod_{ij \in M} x_{ij} \begin{cases} \neq 0 & \text{if } M \text{ exists} \\ = 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

完全マッチング

Edmonds問題

Edmonds 1967

変数付き行列

$$A = A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_kx_k$$

のランクは効率的に計算できるか？

$x_1, x_2, \dots, x_k$: 変数

$A_1, \dots, A_k$: 行列, 体 $\mathbb{K}$ 上

A : 多項式環 $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_k]$ 上

↓

有理関数体 $\mathbb{K}(x_1, x_2, \dots, x_k)$

- 2部マッチング問題の代数的拡張
 - いくつかの重要なPに属する組合せ最適化問題を含む
- 変数 x_i に $\mathbb{K}$ の値を代入するとGaussの消去法で簡単
 - $|\mathbb{K}| = \text{大}$: 乱択多項式時間アルゴリズム (Lovasz 79)
 - $\mathbb{K}$, 一般 : NP困難 (Buss et al. 1999)
- 未解決 : 決定性多項式時間アルゴリズム
- 回路計算量の関係 (Kabanets-Impagliazzo 2004)

非可換 Edmonds問題

Ivanyos-Qiao-Subrahmanyam 2015

変数付き行列

$$A = A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_kx_k$$

のランクは効率的に計算できるか？

非可換ランク
nc-rank

$x_1, x_2, \dots, x_k$: 変数 $x_ix_j \neq x_jx_i$

$A_1, \dots, A_k$: 行列, 体 $\mathbb{K}$ 上

A : 非可換環 $\mathbb{K}\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle$ 上

$\downarrow$

自由斜体 $\mathbb{K}(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle)$

nc-rank in **P** !!

- Garg-Gurvits-Oliveira-Wigderson 2015: $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$
→ part II
- Ivanyos-Qiao-Subrahmanyam 2015: $\mathbb{K}$ 任意
→ part I (いまから)
- Hamada-Hirai 2017: $\mathbb{K}$ 任意, bit-size unbounded
→ part III

$A_1, \dots, A_k$: 行列, 体 $\mathbb{K}$ 上, $x_1, x_2, \dots, x_k$: 非可換変数, $x_i x_j \neq x_j x_i$

$$A = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_k x_k \in \mathbb{K}\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle$$

のランクとは？

非可換ランクの定義I (自由環上の行列としてのinner rank)

$$\text{nc-rank } A := \min \{r \mid \exists B \in \mathbb{K}\langle x \rangle^{n \times r}, C \in \mathbb{K}\langle x \rangle^{r \times m} : A = BC\}$$

非可換ランクの定義II (**自由斜体**上の行列としてのrank)

$$\text{nc-rank } A := \text{rank } A, \text{ where } A \in \mathbb{K}(\langle x \rangle)^{n \times m}$$

2つの定義は一致する (Cohn)

斜体 (skew field, division ring) とは

逆元をもつ環, i.e., $\forall a \neq 0, \exists a^{-1}, a^{-1}a = aa^{-1} = 1$

～ 積演算が可換とは限らない体

例：四元数体

$A: n \times m$ 行列, 斜体 $\mathbb{F}$ 上

A : 正則 $\Leftrightarrow \exists$ 逆行列 $A^{-1}: AA^{-1} = A^{-1}A = I$ (このとき $n = m$)

$\text{rank } A := \mathbb{F}$ 上右(左)線形独立な列(行)の最大数

$$= \min \{ r \mid \exists B \in \mathbb{F}^{n \times r}, C \in \mathbb{F}^{r \times m}: A = BC \}$$

$$= \max \{ r \mid \exists r \times r \text{ 正則部分行列} \}$$

$$= \max \{ r \mid \exists r \times r \text{ 部分行列 } A': \text{Det } A' \neq 0 \}$$

自由斜体 (free skew field) とは

～有理関数体 $\mathbb{K}(x_1, x_2, \dots, x_k)$ の非可換アナログ

$$\frac{x_2 x_3 + 5}{x_1^2 + 2x_3 - 3}$$

- **Rational expression** constructed from $+, -, \times, (\cdot)^{-1}, x_i, a \in \mathbb{K}$

例: $p = ((x_2 x_3) + 1)((x_2(x_1(x_1 x_2^{-1}))) + ((2x_3) - 3))^{-1}$

- $p \sim q \Leftrightarrow p(X_1, X_2, \dots, X_k) = q(X_1, X_2, \dots, X_k)$
($\forall d, \forall X_i \in \mathbb{K}^{d \times d} : p, q \text{ defined}$)

Thm (Amitsur 1966)

$\mathbb{K}(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle) := \{ \text{all rational expressions} \} / \sim$ is a skew field

非可換 Edmonds問題 (再掲)

変数付き行列

$$A = A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_kx_k$$

のランクは効率的に計算できるか？

非可換ランク
nc-rank

$x_1, x_2, \dots, x_k$: 変数 $x_ix_j \neq x_jx_i$

$A_1, \dots, A_k$: 行列, 体 $\mathbb{K}$ 上

A : 非可換環 $\mathbb{K}\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle$ 上

↓

自由斜体 $\mathbb{K}(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle)$

Fortin-Reutenauerの定理

～非可換ランクの双対定理

$$A = A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_kx_k, \quad A_i: n \times m \text{ 行列, 体 } \mathbb{K} \text{ 上}$$

Thm (Fortin-Reutenauer 2004)

$$\text{nc-rank } A = n + m - \text{Max. } r + s$$

注：この値は
 $\max(n, m)$ 以上

$$\text{s.t. } PA_iQ = \begin{array}{|c|c|} \hline * & * \\ \hline * & * \\ \hline \end{array} \quad (\forall i)$$

r s

P, Q : 正則, $\mathbb{K}$ 上

注: この双対問題MVSP自体は, Lovasz 1989や分割行列の研究 (Ito,Iwata,Murota 1994) にでてきている.

証明の簡単な方向 ($\leq$) $A = A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_kx_k$

$$PA_iQ = \begin{array}{cc|c} * & * & * \\ \hline & 0 & * \end{array} \begin{array}{l} n-r \\ r \end{array} \quad (\forall i)$$

$S \quad m-s$

$$\Rightarrow PAQ = \begin{array}{cc|c} & B & C \\ \hline & 0 & D \end{array} \begin{array}{l} r \\ s \end{array} = \begin{array}{cc|c} & I & C \\ \hline & 0 & D \end{array} \begin{array}{l} n-r \quad m-s \\ r \\ s \end{array} \begin{array}{cc|c} & B & 0 \\ \hline & 0 & I \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{nc-rank } A \leq n + m - r - s$$

Cor: $\text{rank } A \leq \text{nc-rank } A$

Prop (Fortin-Reutenauer 2004) $\text{nc-rank } A \leq 2\text{rank } A$

組合せ最適化からの興味

- 2部マッチングや線形マトロイド交差に対応する $A = \sum_i A_i x_i$ で,
 $\text{rank } A = \text{nc-rank } A$ が成立
- Fortin-Reutenauerの公式 $\Rightarrow$ 組合せ最適化の最大最小定理
c.f. 多面体的パラダイム LP-duality $\Rightarrow$ min-max
- $\text{rank } A < \text{nc-rank } A$ となるケース
歪対称行列, 非2部マッチング, 線形マトロイドマッチング, ...
- モジュラ束上の劣モジュラ最適化 (part III)

König-Egerváry from Fortin-Reutenauer

$G = (U, V; E)$: 2 部グラフ

$$n + m - \text{Max. } r + s$$

$$\text{s.t. } P \begin{array}{c} j \\ \hline \begin{array}{c} 1 \end{array} \\ i \end{array} Q =_r \begin{array}{c} \begin{array}{cc} * & * \\ & * \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 0 \end{array} \\ s \end{array} \quad (\forall e = ij \in E)$$

P, Q : permutation matrices

$$= n + m - |\text{最大安定集合}|$$

$$= |\text{最小頂点カバール}|$$

Ivanyos-Qiao-Subrahmanyamのアルゴリズム

キーアイデア

- Wong sequence $\sim$ ベクトル空間交互道

正方

- $A = \sum_i A_i x_i$: nc-正則

クロネッカー積

$$\Leftrightarrow \exists d, \exists D_i \in \mathbb{K}^{d \times d}, \det(\sum_i A_i \otimes D_i) \neq 0$$

- d のバウンド(Derksen-Makam 2015) $\leftarrow$ 不変式論の結果

ここでは, Wong sequenceの考え方を紹介する

$A = A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_kx_k$, $A_i: n \times m$ 行列, 体 $\mathbb{K}$ 上
 行列空間 $\mathcal{A} := \{ \sum_i A_i z_i \mid z_i \in \mathbb{K} \} \subseteq \mathbb{K}^{n \times m}$

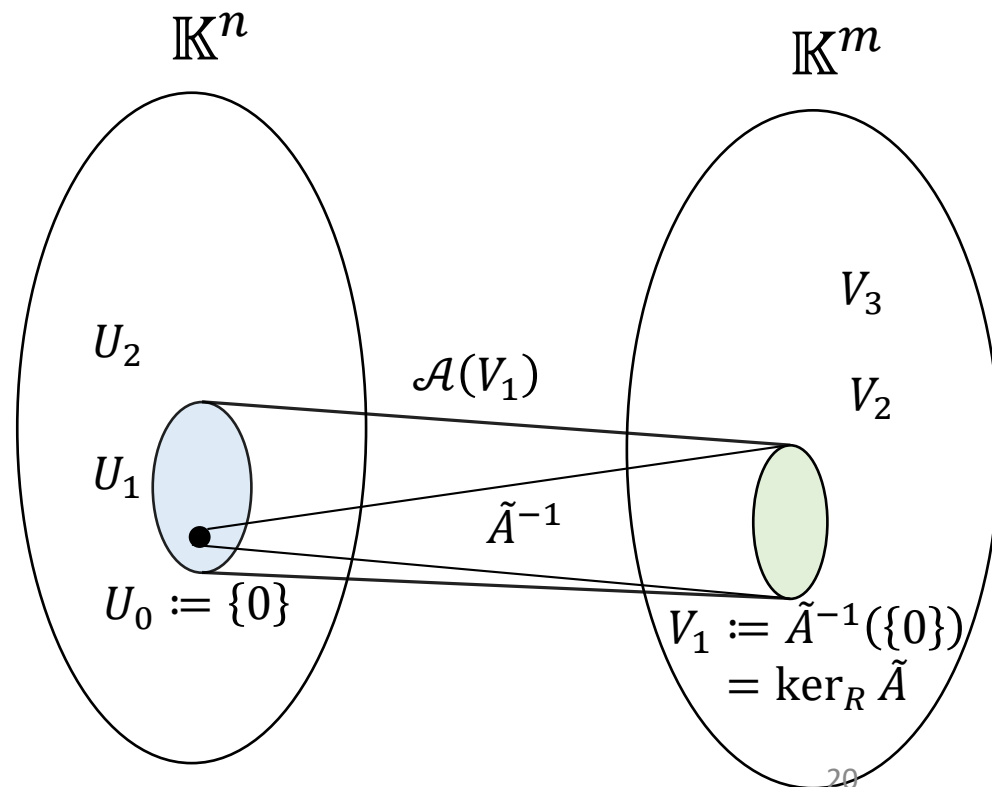
Obs. $\text{nc-rank } A \geq \text{rank } A \geq \text{rank } \tilde{A} \ (\forall \tilde{A} \in \mathcal{A})$

Wong sequence w.r.t. $\tilde{A} \in \mathcal{A}$

$$U_0 := \{0\} \subseteq \mathbb{K}^n$$

$$V_j := \tilde{A}^{-1}(U_j)$$

$$U_{j+1} := \mathcal{A}(V_j) = \sum_i A_i V_j$$



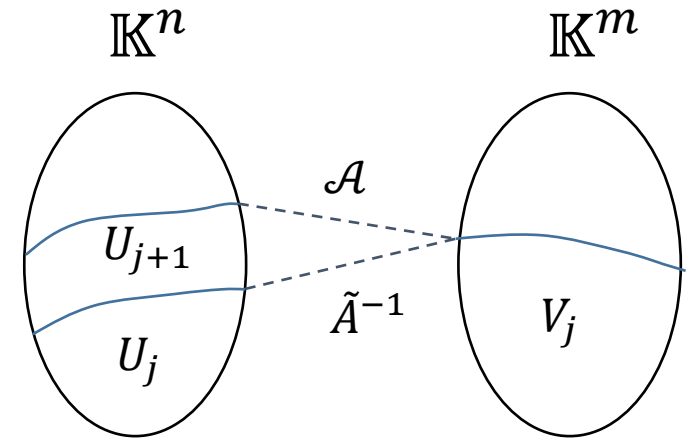
行列空間 $\mathcal{A} := \{ \sum_i A_i z_i \mid z_i \in \mathbb{K} \} \subseteq \mathbb{K}^{n \times m}$

Wong sequence w.r.t. $\tilde{A} \in \mathcal{A}$

$$U_0 := \{0\} \subseteq \mathbb{K}^n$$

$$V_j := \tilde{A}^{-1}(U_j)$$

$$U_{j+1} := \mathcal{A}(V_j) = \sum_i A_i V_j$$



Lem: $U_0 \subseteq U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots$

$$\because V_{j+1} = \tilde{A}^{-1} \left(\mathcal{A}(V_j) \right) \supseteq \tilde{A}^{-1} \left(\tilde{A}(V_j) \right) \supseteq V_j$$

$\tilde{A} \in \mathcal{A}$

$$U_\infty := \lim_{j \rightarrow \infty} U_j$$

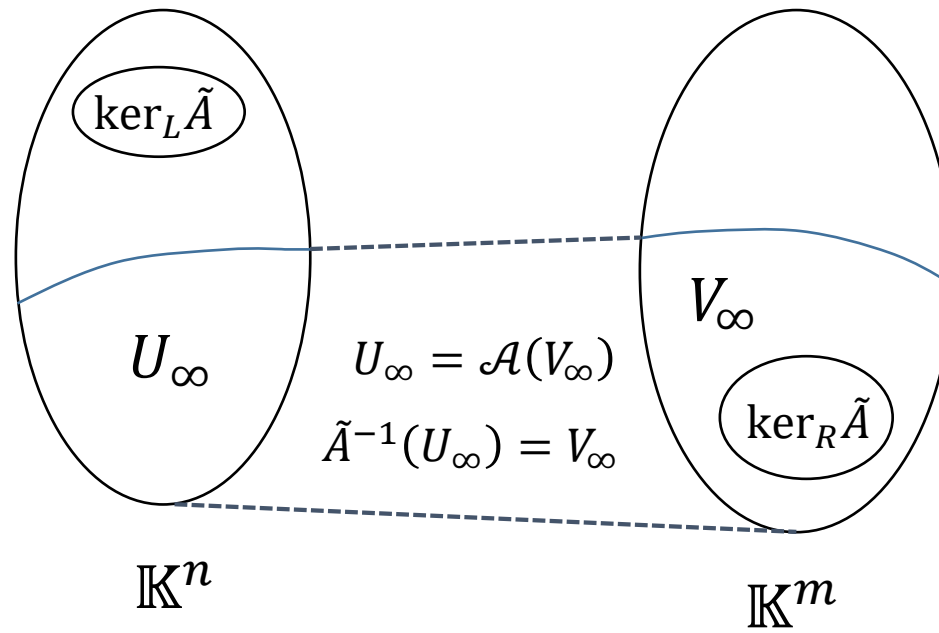
$$V_\infty := \lim_{j \rightarrow \infty} V_j$$

最適性の十分条件

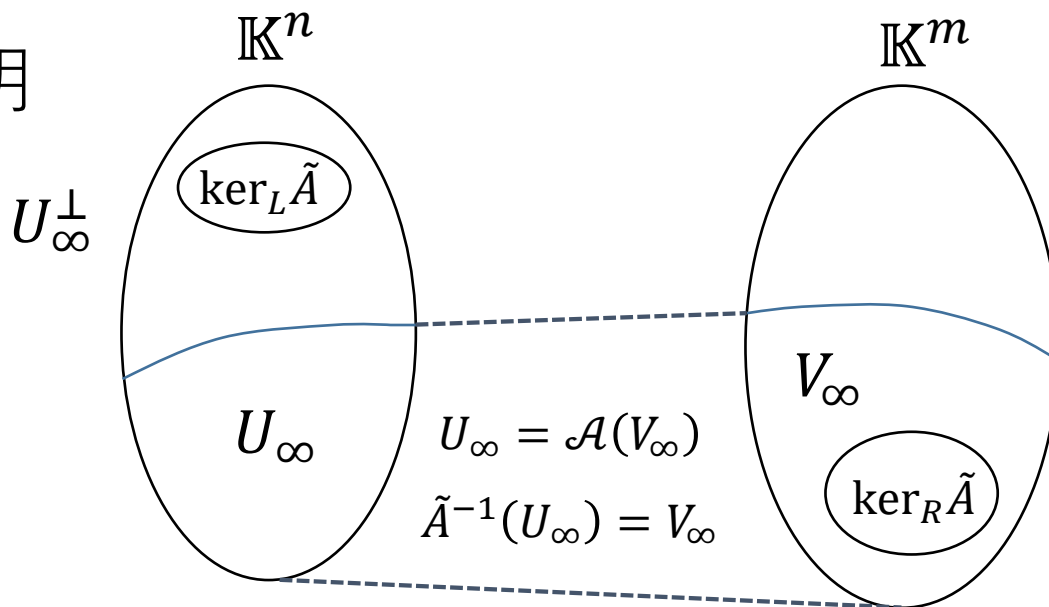
Lem (Ivanyos, Karpinski, Qiao, Santha 2015)

$$U_\infty \subseteq \text{Im } \tilde{A} \quad (\Leftrightarrow U_\infty^\perp \supseteq \ker_L \tilde{A})$$

$$\Rightarrow \text{rank } \tilde{A} = \text{nc-rank } A = \text{rank } A$$



証明



$P \in \mathbb{K}^{n \times n}, Q \in \mathbb{K}^{m \times m}$: 正則行列, P は $U_\infty^\perp$ の基底を含む, Q は V_∞ の基底を含む

$$P^T A_i Q = \begin{array}{c|c} & V_\infty \\ \hline U_\infty & \begin{array}{cc} * & * \end{array} \\ \hline U_\infty^\perp & \begin{array}{cc} 0 & * \end{array} \end{array}$$

($\forall i$)

$$P^T \tilde{A} Q = \begin{array}{c|c} & V_\infty \\ \hline U_\infty & \begin{array}{cc} * & * \end{array} \\ \hline U_\infty^\perp & \begin{array}{cc} s & 0 \end{array} \end{array}$$

列 full rank

$\begin{array}{c} * \\ 0 \end{array}$ $\ker_L \tilde{A}$

r

$$\text{rank } \tilde{A} = \text{rank } P^T \tilde{A} Q = n - s + m - r \geq n - \text{rank } A$$

IQSアルゴリズム概略

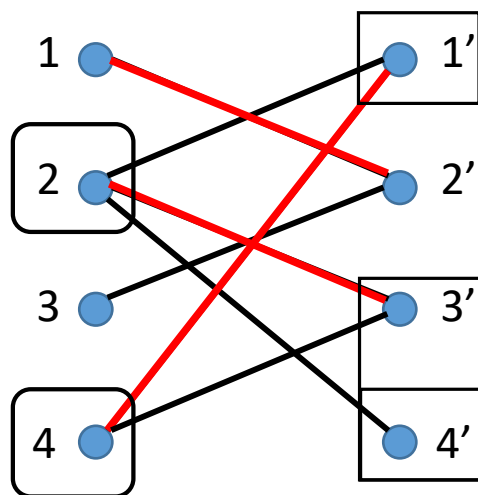
行列空間 $\mathcal{A} := \{ \sum_i A_i z_i \mid z_i \in \mathbb{K} \} \subseteq \mathbb{K}^{n \times m}$

1. $\tilde{A} \in \mathcal{A}$
2. Wong sequence w.r.t. $\tilde{A} \in \mathcal{A}$ を計算し, U_∞ を得る.
3. $U_\infty \subseteq \text{Im } \tilde{A}$ なら, $\text{rank } \tilde{A} = \text{nc-rank } A$ (終了)
4. $U_\infty \not\subseteq \text{Im } \tilde{A}$ なら,
 - $\tilde{A}$ を更新して, rank を増加させる,
 - 行列空間をブローアップ: $\sum_i A_i z_i \Rightarrow \sum_i A_i \otimes Z_i$,
 - 体 $\mathbb{K}$ も拡大するかも.

※ ビットサイズも考慮する必要あり.

難解であり, これ以上立ち入らない

増加道アルゴリズムとの関係



$$\mathcal{A} := \{ \sum_{ij \in E} E_{ij} z_{ij} \mid z_{ij} \in \mathbb{K} \}$$

Ψ

$$\tilde{A} = \sum_{ij \in M} E_{ij} =$$

	1'	2'	3'	4'
1				
2		1		
3			1	
4	1			

$$V_0 = \ker_R \tilde{A} = \mathbb{K}e_{4'}$$

$$U_1 = \mathbb{K}e_2$$

$$V_1 = \mathbb{K}e_{4'} + \mathbb{K}e_{3'}$$

$$U_2 = \mathbb{K}e_2 + \mathbb{K}e_4 = U_\infty \subseteq \text{Im } \tilde{A}$$

$$V_2 = \mathbb{K}e_{1'} + \mathbb{K}e_{4'} + \mathbb{K}e_{3'} = V_\infty$$

- この場合, マッチングに対応する $\tilde{A}$ で増加道探索に一致する.
(一般の $\tilde{A} \in \mathcal{A}$ では, U_i, V_i はぐちゃぐちゃ)
- さらに $U_\infty \not\subseteq \text{Im } \tilde{A}$ なら, $\tilde{A}$ の更新してrank増加 i.e., $M := M\Delta P$.
よって増加道アルゴリズムが実現できる.
(rank $A = \text{nc-rank } A$ であっても $\tilde{A}$ の更新は一般に容易でない)
- 線形マトロイド交差のときは, Edmondsのアルゴリズムを実現できる.
(石川巧, 卒業論文2018)
- Wong sequenceの考え方は増加道タイプのアルゴリズムの設計の指針と
統一的理解につながるかもしれない.

2 x 2 型分割行列

$$A = \begin{pmatrix} A_{11}x_{11} & A_{12}x_{12} & \cdots & A_{1m}x_{1m} \\ A_{21}x_{21} & A_{22}x_{22} & \cdots & A_{2m}x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}x_{n1} & A_{n2}x_{n2} & \cdots & A_{nm}x_{nm} \end{pmatrix}$$

ここで, $A_{ij} \in \mathbb{K}^{2 \times 2}$

- $\text{rank } A = \text{nc-rank } A$ (Iwata, Murota 1995の結果より)

Hirai-Iwamasa (準備中): Wong sequenceのアイデアに基づいた
組合せ的多項式時間アルゴリズム

part I まとめ

- 2部マッチングの拡張としてのEdmonds問題
- 非可換Edmonds問題
- 非可換ランク
- Fortin-Reutenauerの定理
- IQSアルゴリズムとWong sequence