代数的組合せ最適化 part III

1. 劣モジュラ性とCAT(0)空間緩和に基づくアルゴリズム
2. 重み付き(非可換) Edmonds問題（時間があれば）

２部マッチングにおける劣モジュラ性

$G = (U, V; E)$: ２部グラフ

$$\max |M| = n + m - \boxed{\begin{array}{l} \max.\ |X| + |Y| \\ \text{s.t.}\ \ X \cup Y\text{: 安定集合} \\ \quad X \subseteq U, Y \subseteq V \end{array}}$$

M: マッチング

Obs (劣モジュラ性)

- $(X, Y), (X', Y')$: 安定 $\Rightarrow (X \cup X', Y \cap Y'), (X \cap X', Y \cup Y')$:安定
- $|X| + |X'| = |X \cap X'| + |X \cup X'|$

→ ２部マッチングの双対は，劣モジュラ関数最小化とみなせる．

nc-rankにおける劣モジュラ性

$A = \sum_{i=1}^{k} A_i x_i$, A_i: $\mathbb{K}$上$n \times m$行列

Thm (Fortin-Reutenauer 2004)

$$\text{nc-rank}\, A = n + m - \ \text{Max.}\ r + s$$

$$\text{s.t.}\ \ PA_iQ = \begin{array}{c} \\ r \end{array} \begin{bmatrix} * & * \\ \underbrace{0}_{s} & * \end{bmatrix} \quad (\forall i)$$

P, Q: 正則, $\mathbb{K}$上

実は，この問題が
劣モジュラ関数最小化とみなせる

最大消滅部分空間問題 MVSP Maximum Vanishing Subspace Problem

- A_iを２次形式$\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}$とみる

$$(x, y) \mapsto x^T A_i y$$

MVSP: Max. $\dim X + \dim Y$

s. t. $A_i(X, Y) = \{0\} \quad (i = 1,2, \ldots, k)$

$X \subseteq \mathbb{K}^n, Y \subseteq \mathbb{K}^m$: ベクトル部分空間

Obs (劣モジュラ性)

- $(X, Y), (X', Y')$: v. sp. $\Rightarrow (X + X', Y \cap Y'), (X \cap X', Y + Y')$: v. sp.
- $\dim X + \dim X' = \dim X \cap X' + \dim X + X'$

この劣モジュラ性を利用できないか？

古典的 劣モジュラ関数最小化 Grotschel-Lovasz-Schrijver 1981

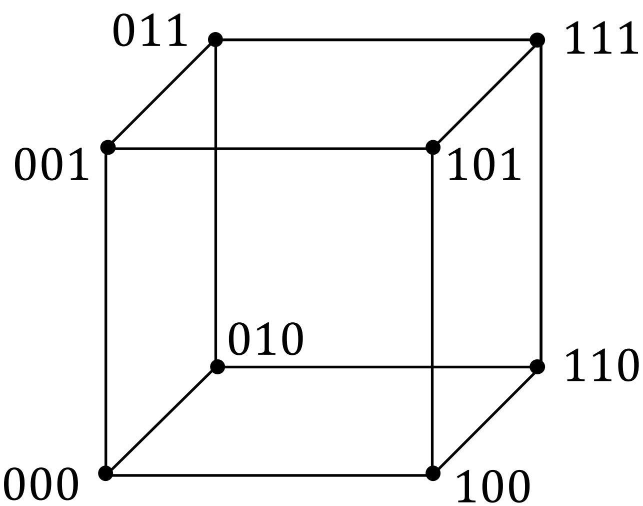
$f: 2^{[n]} \to \overline{\mathbb{R}}$:劣モジュラ $\Leftrightarrow f(X) + f(Y) \geq f(X \cap Y) + f(X \cup Y)$

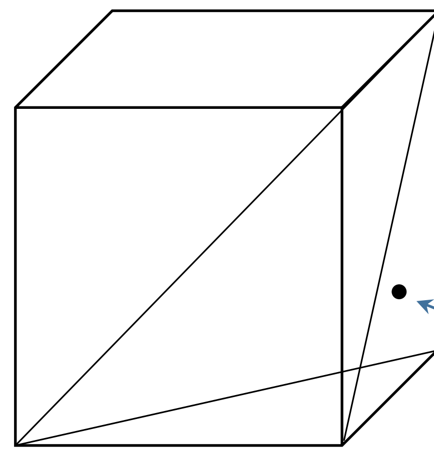
$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$\sim \ f: \{0,1\}^n \to \overline{\mathbb{R}}$

Lovasz拡張

$\bar{f}: [0,1]^n \to \overline{\mathbb{R}}$ 凸関数





$\bar{f}(x) = \lambda_0 f(000) + \lambda_1 f(100)$

$+\lambda_2 f(110) + \lambda_3 f(111)$

$x = \lambda_0(000) + \lambda_1(100)$

$+\lambda_2(110) + \lambda_3(111)$

fの最小化 $=$ $\bar{f}$の最小化

$\bar{f}$の劣勾配

$\leftarrow$ Greedy algorithm

多項式時間アルゴリズム $\Leftarrow$ 楕円体法

Hamada-Hirai 2017のアプローチ

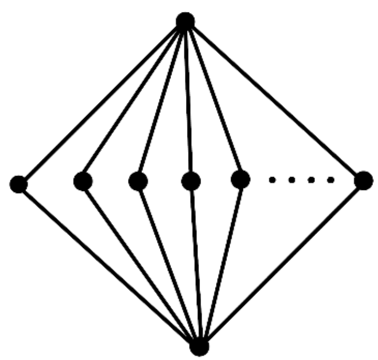
$\mathcal{L}$: モジュラ束

$f: \mathcal{L} \to \overline{\mathbb{R}}$ 劣モジュラ

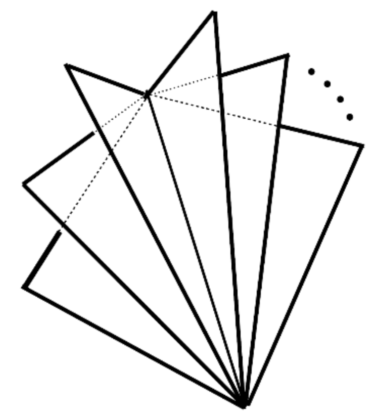
$\Leftrightarrow f(p) + f(q) \geq f(p \wedge q) + f(p \vee q)$

Lovasz拡張

$\bar{f}: \mathcal{L} \to \overline{\mathbb{R}}$ 凸関数



$\mathcal{L}$



CAT(0)空間

オーソスキーム複体 $K(\mathcal{L})$

fの最小化 ＝ $\bar{f}$の最小化

--- MVSPに特化 ---

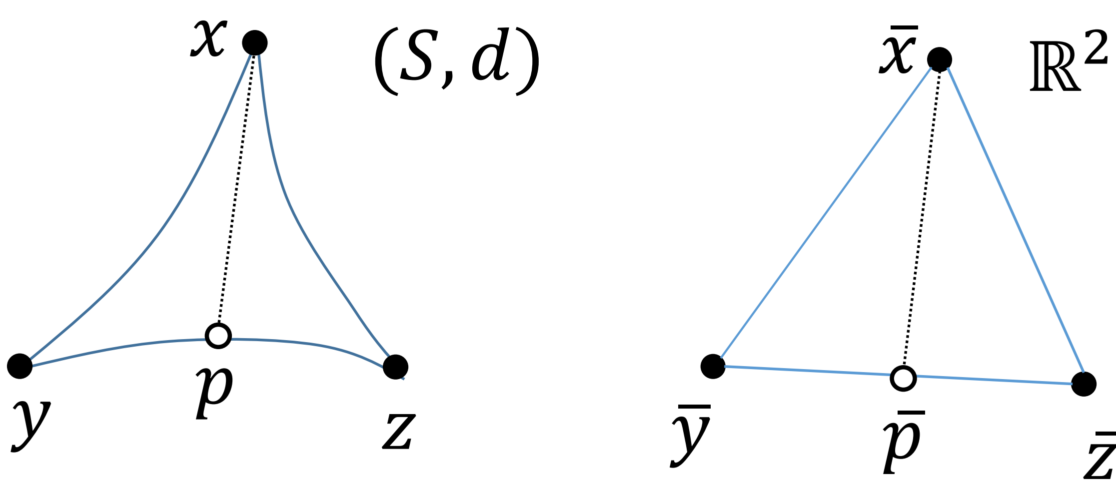
多項式時間アルゴリズム $\Leftarrow$ 分割近接点法

Cartan, Alexandrov, Topogonov,
curvature ≤ 0

CAT(0)空間

Gromov 1987

~ 測地的距離空間 (S, d): ∀３角形が痩せている



$$d(x, y) = \|\bar{x} - \bar{y}\|_2$$
$$d(y, z) = \|\bar{y} - \bar{z}\|_2$$
$$d(z, x) = \|\bar{z} - \bar{x}\|_2$$

$$d(x, p) \leq \|\bar{x} - \bar{p}\|_2$$

例：ユークリッド空間，ツリー，ユークリッド型ビルディング, …

- CAT(0)空間は一意測地的 → 測地的凸性

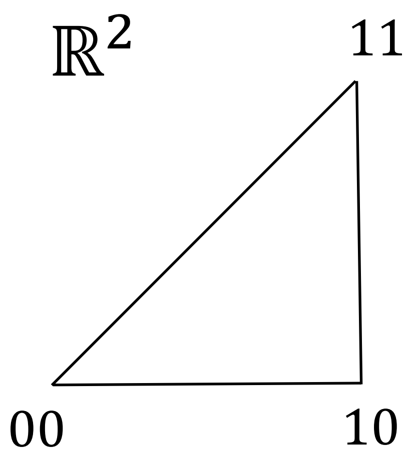
オーソスキーム(orthoscheme)

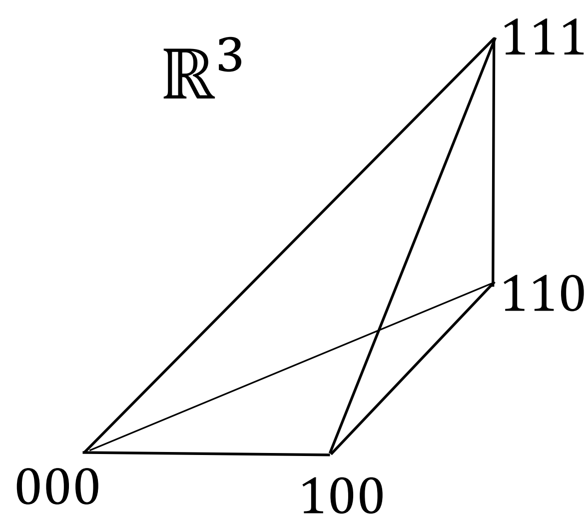
named by Coxeter 1991

Def. n-次元オーソスキーム

$\Leftrightarrow$ n-次元単体，頂点が

$$(0,0,\ldots,0),\ (1,0,\ldots,0),\ (1,1,0,\ldots,0),\ldots,\overbrace{(1,1,1,\ldots,1)}^{n}$$





オーソスキーム複体

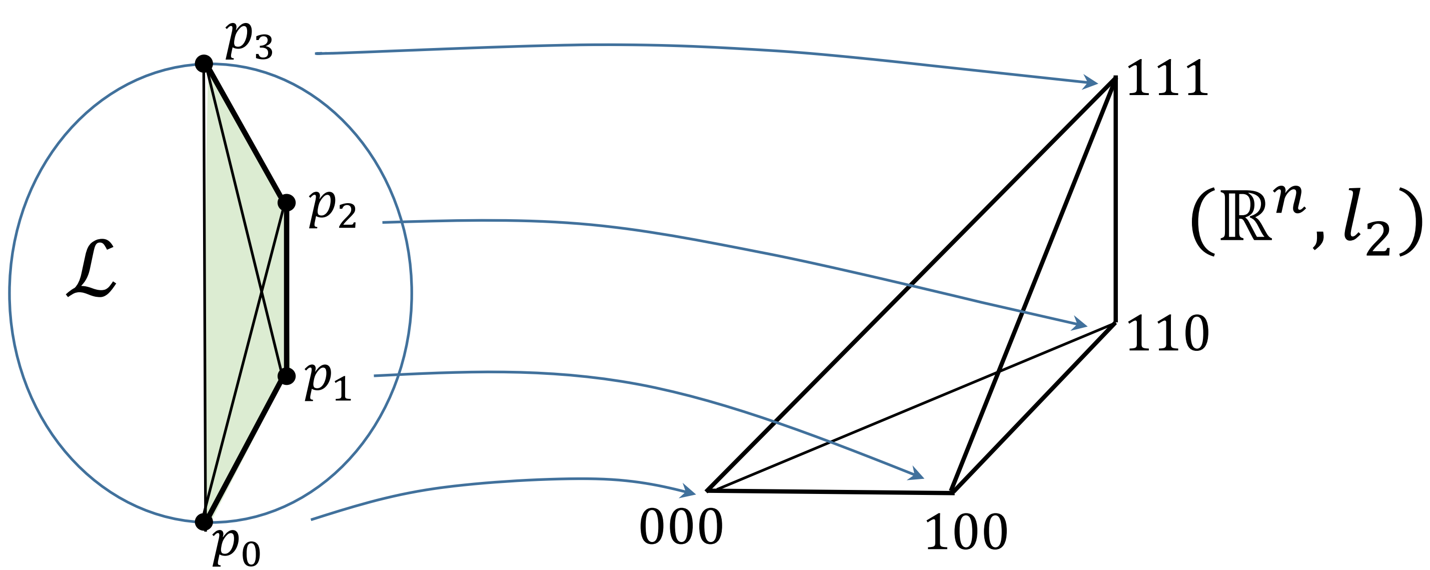
Brady-McCammond 2012

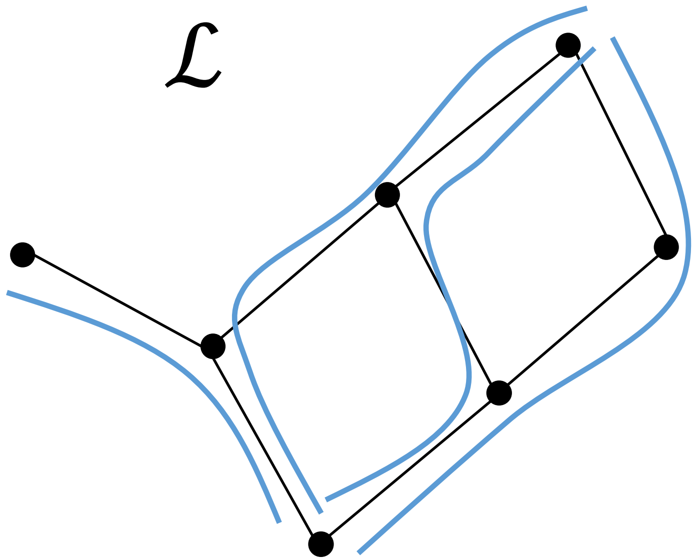
$\mathcal{L}$: 高さ関数をもつ半順序集合

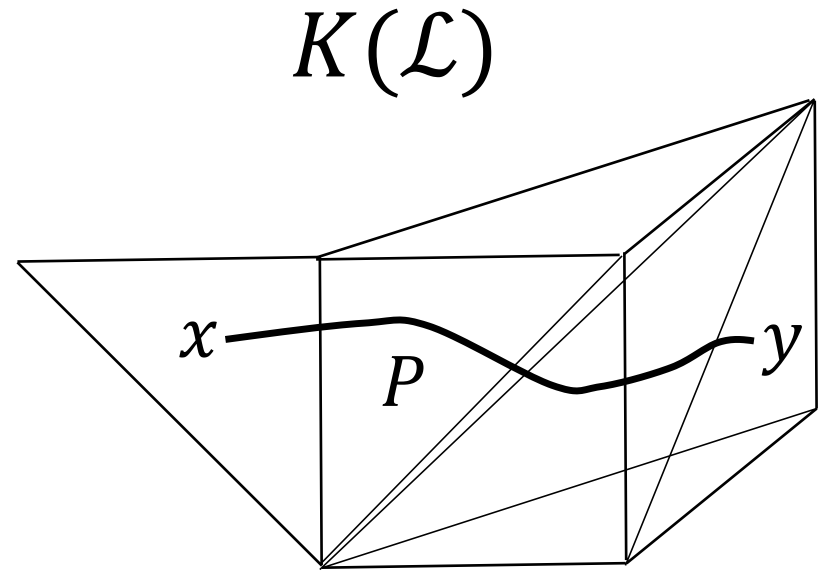
$K(\mathcal{L}) :=$ $\mathcal{L}$の元の凸結合 $\sum_{p\in\mathcal{L}} \lambda(p)p$で

supp λがチェイン となるもの全体

～ 各単体をオーソスキームとして距離を入れる







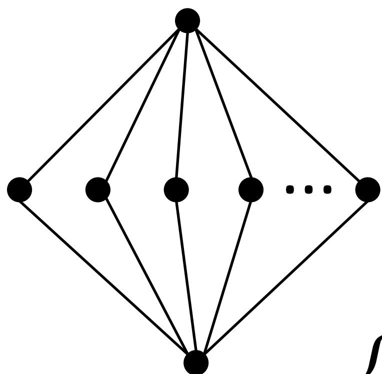
パス $P{:}\,[0,1] \to K(\mathcal{L})$の長さ $d(P)$ が定義される.

２点の距離x, yの距離:

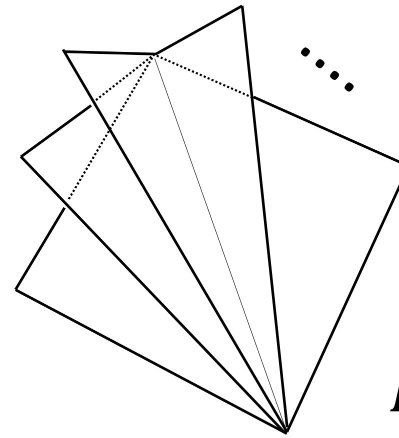
$$d(x, y) \coloneqq \inf\{d(P) \mid P{:}\,(x, y)\text{−path}\}$$

$\to (K(\mathcal{L}), d)$: 測地的距離空間

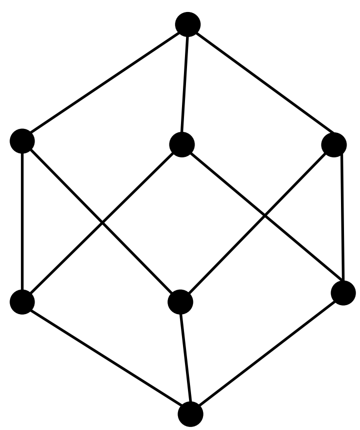
Example



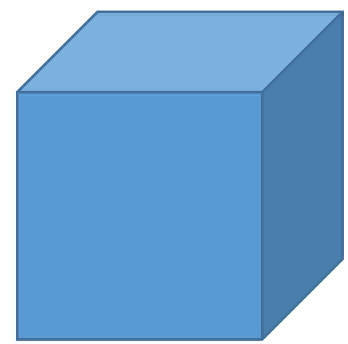
$\mathcal{L}$



$K(\mathcal{L})$

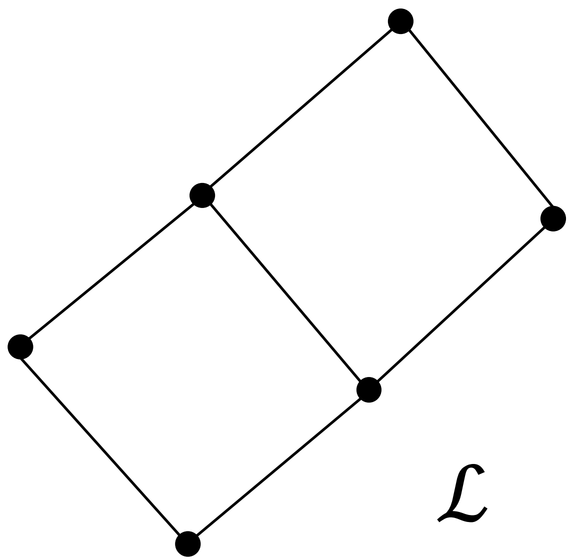


$\mathcal{L} = 2^{\{1,2,\ldots,n\}}$

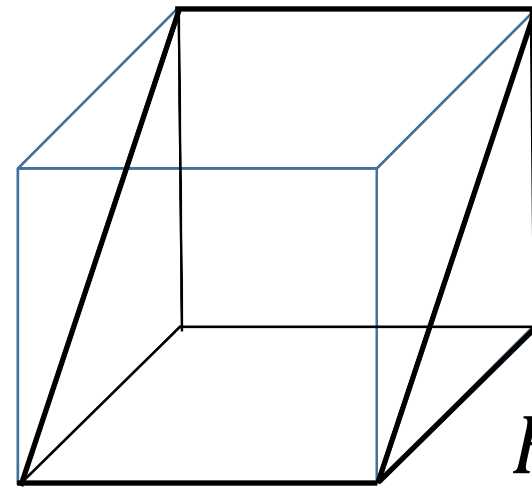


$K(\mathcal{L}) \simeq [0,1]^n$

分配束



$\mathcal{L}$



$K(\mathcal{L})$

Birkhoff

Lem: $\mathcal{L}$ = 半順序集合 $(V, \preccurlyeq)$のイデアル族

$$K(\mathcal{L}) \simeq \{x \in [0,1]^V \mid x(j) \leq x(i) \ (i, j \ \in V: i \preccurlyeq j)\}$$

→ CAT(0)

c.f. 順序多面体 [Stanley 86; Fujishige 84]

$\mathcal{L}$: ランク有限モジュラ束

Thm (Chalopin et al. 2014)　$K(\mathcal{L})$はCAT(0)空間

Def. $f: \mathcal{L} \to \overline{\mathbb{R}}$のLovasz 拡張 $\bar{f}: K(\mathcal{L}) \to \overline{\mathbb{R}}$

$$\bar{f}(x) \coloneqq \textstyle\sum_i \lambda_i f(p_i) \quad (x = \sum_i \lambda_i p_i \in K(\mathcal{L}))$$

Thm (Hirai 2018)

$f: \mathcal{L} \to \overline{\mathbb{R}}$ は劣モジュラ ⇔ $\bar{f}: K(\mathcal{L}) \to \overline{\mathbb{R}}$ は（測地的）凸

証明のポイント

Lem (Birkhoff-Dedekind)

$\forall C, D \subseteq \mathcal{L}$: チェイン， $\exists \mathcal{D} \subseteq \mathcal{L}$: 部分分配束 s.t. $C, D \subseteq \mathcal{D}$

Lem (Chalopin et al. 2014)

$K(\mathcal{D})$ は $K(\mathcal{L})$ 内の凸集合

x, yのsupportチェインを含む部分分配束$\mathcal{D}$をとる.

$\bar{f}$が凸 $\Leftrightarrow \forall x, y \in K(\mathcal{L}), \bar{f}$が$[x, y]$上凸

$\Leftrightarrow \forall x, y \in K(\mathcal{L}), \bar{f}$が$K(\mathcal{D})$上凸， ここで$K(\mathcal{D}) \ni x, y$

$\Leftrightarrow \forall \mathcal{D} \subseteq \mathcal{L}$:部分分配束, $\bar{f}$が$K(\mathcal{D})$上凸

$\Leftrightarrow \forall \mathcal{D} \subseteq \mathcal{L}$:部分分配束, fが$\mathcal{D}$上劣モジュラ$\Leftrightarrow$ fが劣モ

通常のLovasz拡張

MVSP: $\quad \mathrm{Max.} \quad \dim X + \dim Y$

$\mathrm{s.t.} \quad A_i(X,Y) = \{0\} \quad (i = 1,2,\ldots,k),$

$X \subseteq \mathbb{K}^n, Y \subseteq \mathbb{K}^m$: ベクトル部分空間

$\cong \quad \mathrm{Min.} \quad -\dim X - \dim Y + C\sum_i \operatorname{rank} A_i|_{X\times Y}$

$C = n + m + 1$にとれる

$\mathrm{s.t.} \quad (X,Y) \in \mathcal{L} \times \mathcal{M}$

$\mathcal{L}$: $\mathbb{K}^n$のベクトル部分空間のなす束

$\mathcal{M}$: $\mathbb{K}^m$のベクトル部分空間のなす束，逆包含順序

Lem (Iwata,Murota 1995) $\quad (X,Y) \mapsto \operatorname{rank} A_i|_{X\times Y}$は劣モジュラ

$\overline{\text{MVSP}}$: Min. $-\overline{\dim}(x) - \overline{\dim}(y) + C\sum_i \overline{\operatorname{rank} A_i}(x,y)$

s.t. $(x,y) \in K(\mathcal{L}) \times K(\mathcal{M}) = K(\mathcal{L} \times \mathcal{M})$

非可換ランク $\text{nc}-\text{rank}\, A$:

この問題 -- CAT(0)空間$K(\mathcal{L}) \times K(\mathcal{M})$上の凸最適化 -- を解けばよい

特殊性: 目的関数が凸関数の和 $\sum_i f_i$ になっている.

→ 分割近接点法を適用

分割近接点法 Bačák 2014

(X, d): 完備なCAT(0)空間　$f_1, f_2, \ldots, f_N$: 凸関数

目標　$f = \sum_{i=1}^{N} f_i$ の最小化

分割近接点法の更新式：

$$z^{n+1} \coloneqq \operatorname{argmin}_{z \in X} \; f_{n \bmod N}(z) + \frac{1}{\lambda_n} d(z, z^n)^2$$

Thm (Ohta-Pálfia 2015)

f_i: L-リプシッツ, f: ϵ-強凸, $\lambda_n \coloneqq \frac{1}{2\epsilon(n+1)}$

$$\Rightarrow \quad f(z^n) - \min f \leq \frac{\mathrm{poly}(L, N, \epsilon^{-1}, \mathrm{diam}\, X)}{\sqrt{n}}$$

$\overline{\text{MVSP}}$: $\quad$ Min. $-\overline{\dim}(x) - \overline{\dim}\,(y) + C\sum_i \overline{\operatorname{rank} A_i}(x,y)$

s.t. $\quad (x,y) \in K(\mathcal{L}) \times K(\mathcal{M})$

$f_0(x,y) \coloneqq -\overline{\dim}(x) - \overline{\dim}\,(y)$

$f_i(x,y) \coloneqq C\,\overline{\operatorname{rank} A_i}(x,y) \quad (i = 1,2,\ldots,k)$

として分割近接点法 + 収束評価を適用

n =poly 反復後に $\mathrm{obj}(x^n, y^n) - \mathrm{opt} < 1$

$\rightarrow$ objの整数性よりx^n, y^nのsupportのなかに最適解存在

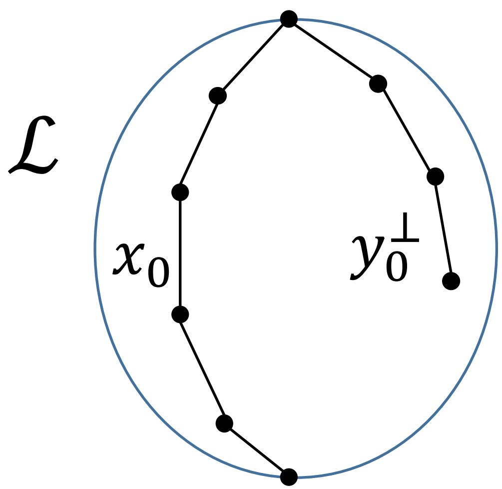
注：本当は強凸性をもたせるため摂動も行う

重要なポイント（分割近接点が実装できる）

$$\text{Min.}\quad C\,\overline{\operatorname{rank} A_i}(x,y)+\frac{1}{\lambda}\{d(x,x_0)^2+d(y,y_0)^2\}$$

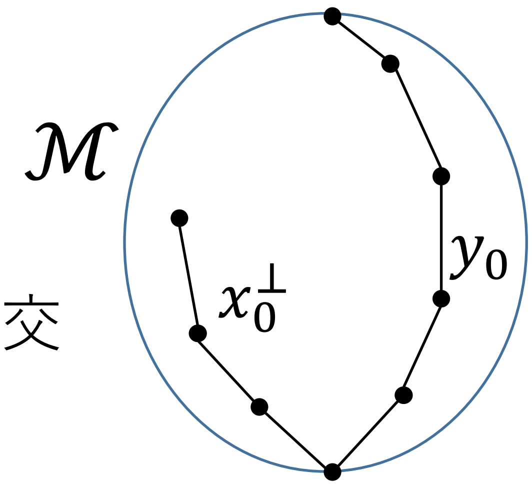
$$\text{s.t.}\quad (x,y)\in K(\mathcal{L})\times K(\mathcal{M})$$

凸2次計画に帰着



$\mathcal{B}$:ブール束
$\supseteq$ nonzero supp. of $x_0, y_0^{\perp}$

$(\cdot)^{\perp}$: A_i-直交



$\mathcal{B}'$:ブール束
$\supseteq$ nonzero supp. of $y_0, x_0^{\perp}$

Lem (Hamada-Hirai 2017)

∃最適解 $(x^*,y^*)\in K(\mathcal{B})\times K(\mathcal{B}')=[0,1]^{m+n}$

良い点・問題点

- コンセプチュアルにシンプル，他の問題にも応用できるかも
- 体$\mathbb{K}$がなんであっても動くが，$\mathbb{K} = \mathbb{Q}$のときは変数(＝ベクトル空間のチェイン)を表現するための基底のビットサイズがバウンドできてない (A_i-直交操作に起因)
- 改良の余地が大いにあり

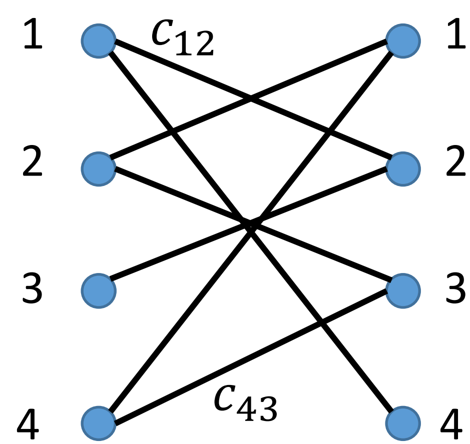
重み付き(非可換) Edmonds問題

問題意識

重み付き２部マッチングなどの「重み付き」の問題を

このように「非可換」線形代数的にとらえることできるか？

例：最大重み完全マッチング問題

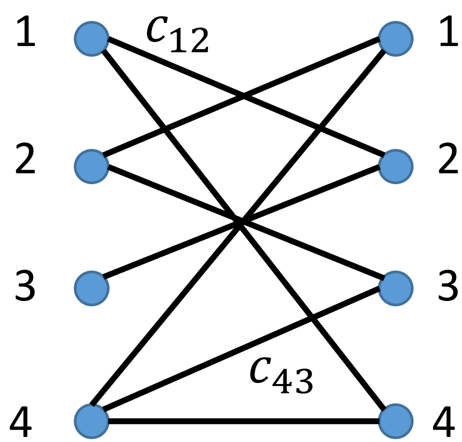


$c_{ij} \in \mathbb{Z}_+$: 枝重み

$$\text{Max. } c(M) := \sum_{ij \in M} c_{ij}$$

s.t. M:完全マッチング

重み付き２部マッチングの代数的解釈



$$A(t) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} & t^{c_{12}}x_{12} & & t^{c_{14}}x_{14} \\ t^{c_{21}}x_{21} & & t^{c_{23}}x_{23} & \\ & t^{c_{32}}x_{32} & & \\ t^{c_{41}}x_{41} & & t^{c_{43}}x_{43} & t^{c_{44}}x_{44} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= \sum_{ij \in E} t^{c_{ij}} E_{ij} x_{ij}$$

完全マッチングの最大重み＝ $\deg \det A(t)$

$$\because \deg \det A = \deg \sum_{M} \pm t^{c(M)} \prod_{ij \in M} x_{ij} = \max_{M} c(M)$$

トロピカル化

重み付き（可換）Edmonds問題

変数付き多項式行列

$$A(t) = A_1(t)x_1 + \cdots + A_m(t)x_m$$

の $\deg\det$ は効率的に計算できるか？

$x_1, x_2, \ldots, x_m$: 変数

$A_1(t), \ldots, A_m(t)$: $n \times n$行列, $\mathbb{K}[t]$上

A: $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_m, t]$上

これの非可換版を考える

$$A(t) = A_1(t)x_1 + \cdots + A_m(t)x_m$$

をどうみるか?

- (歪)多項式環 $\mathbb{K}(\langle x \rangle)$[t] 上の行列とみる

  Ore 環 ---- 右/左 公倍数が存在

  $$\forall p, q, \exists u, v: pu = qv \neq 0$$

- 有理関数斜体(Ore 商環) $\mathbb{K}(\langle x \rangle)$(t)上の行列とみる

  $$p/q = p'/q' \Leftrightarrow \exists u, v,\ pu = p'v, qu = q'v$$

- 次数 $\deg p/q \coloneqq \deg p - \deg q$

Dieudonne 行列式 ～ 斜体上の行列の行列式

A: 斜体$\mathbb{F}$上の正則行列 （今の場合 $\mathbb{F} = \mathbb{K}(\langle x \rangle)(\mathrm{t})$）

Bruhat分解 ～ 斜体上の行列のLU分解

$$A \;=\; L \quad D \quad P \quad U$$

下三角 対角1 ／ 対角行列 ／ 置換行列 ユニーク ／ 上三角 対角1

Dieudonne行列式 ← 乗法群$\mathbb{F}^*$の可換化の元

$$\mathrm{Det}\, A \coloneqq \mathrm{sgn}(P) D_{11} D_{22} \ldots D_{nn} \mod \underbrace{[\mathbb{F}^*, \mathbb{F}^*]}_{\text{交換子群}}$$

A:非正則のときは， $\mathrm{Det}\, A \coloneqq 0$とする

Lem: $\mathrm{Det}\, AB = \mathrm{Det}\, A\, \mathrm{Det}\, B$

重み付き「非可換」Edmonds問題

Hirai 2018

変数付き多項式行列

$$A(t) = A_1(t)x_1 + \cdots + A_m(t)x_m$$

の$\deg \mathrm{Det}$は効率的に計算できるか？

$x_1, x_2, \ldots, x_m$: 変数　$x_i x_j \neq x_j x_i$

$A_1(t), \ldots, A_m(t)$: $n \times n$行列, $\mathbb{K}[t]$上

A: $\mathbb{K}(\langle x_1, x_2, \ldots, x_m \rangle)(t)$上

※ 交換子上では，$\deg$はゼロなので$\deg \mathrm{Det}$はwell-defined

$$\deg (pqp^{-1}q^{-1}) = 0$$

最大最小定理（Fortin-Reutenauerの定理の拡張）

Thm (Hirai 2018)

$$\deg \operatorname{Det} A = \quad \text{Min.} -\deg\det P \ - \ \deg\det \mathrm{Q}$$

$$\text{s.t.}\ \ \deg\,(PA_kQ)_{ij} \leq 0 \ \ (\forall k, \forall ij)$$

P, Q: 正則, $\mathbb{K}(t)$上

弱双対性の証明　c.f. Murota 95

$$\deg (PA_kQ)_{ij} \le 0 \quad (\forall k, \forall ij)$$

$$\Rightarrow \deg (PAQ)_{ij} \le 0 \quad (\forall ij)$$

$$\Rightarrow \deg \mathrm{Det}\, PAQ \le 0$$

$$\Rightarrow \deg (\mathrm{Det}\, P\ \mathrm{Det}\, A\ \mathrm{Det}\, Q) \le 0$$

$$\Rightarrow \deg \mathrm{Det}\, P + \deg \mathrm{Det}\, A + \deg \mathrm{Det}\, Q \le 0$$

$$\Rightarrow \deg \mathrm{Det}\, A \le -\underset{\substack{\parallel \\ \deg \det P}}{\deg \mathrm{Det}\, P} - \underset{\substack{\parallel \\ \deg \det Q}}{\deg \mathrm{Det}\, Q}$$

強双対性 + アルゴリズム (SDA)

$$PAQ = (PAQ)^0 + t^{-1}M$$

proper

$$\| $$

$$(PA_1Q)^0 + (PA_2Q)^0 x_1 + \cdots + (PA_mQ)^0 x_m \quad \text{over } \mathbb{K}(\langle x \rangle)$$

over $\mathbb{K}$

$(PAQ)^0$: $\mathbb{K}(\langle x \rangle)$上で正則 $\Rightarrow$ $\deg \operatorname{Det} PAQ = 0$

$\Rightarrow$ $\deg \operatorname{Det} A = -\deg \det P - \deg \det Q \Rightarrow P, Q$: 最適

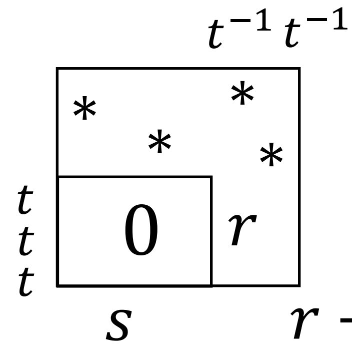
$(PAQ)^0$: $\mathbb{K}(\langle x \rangle)$上で非正則 $\Rightarrow$

We can *augment* $P, Q \to P', Q'$ s.t.

$\deg \det P' + \deg \det Q' > \deg \det P + \deg \det Q$

$(PAQ)^0$: $\mathbb{K}(\langle x \rangle)$上で非正則 $\Rightarrow$ nc$-$rank$(PAQ)^0 < n$

$SPAQT =$



$+t^{-1}M'$

$\exists S, T$: nonsingular over $\mathbb{K}$

$r + s > n$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} I & O \\ O & tI_r \end{pmatrix}}_{P'} SPAQT \underbrace{\begin{pmatrix} I & O \\ O & t^{-1}I_{n-s} \end{pmatrix}}_{Q'} \Rightarrow \deg\,(P'AQ')_{ij} \leq 0$$

$$\deg\det P' + \deg\det Q' = (r + s - n) + \deg\det P + \deg\det Q$$
$$> 0$$

Long-step: use $\begin{pmatrix} I & O \\ O & t^{\alpha}I_r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & O \\ O & t^{-\alpha}I_{n-s} \end{pmatrix}$, $\alpha > 0$

Remarks

- このアルゴリズムは，deg detを計算する
  組合せ緩和法（Murota 1990,1995）の変種とみなせる．

- 双対問題MVMPは，一様モジュラ束(Hirai 2017)という
  モジュラ束上のL凸関数最小化とみなせる．

$\boxed{\text{離散凸解析 } \textit{beyond } \mathbb{Z}^n}$

- さらにアルゴリズムは，L凸関数に対する
  最急降下法(SDA)とみなせる　→ 反復回数の解析

既存のアルゴリズムとの関係

- ２部マッチング $\sum_{ij\in E} t^{c_{ij}} E_{ij} x_{ij}$

  SDA + long-step ≈ ハンガリー法

- 線形マトロイド $\sum_k t^{c_k} a_k a_k^T x_k$

  SDA + long-step ≈ 貪欲アルゴリズム

- 線形マトロイド交差 $\sum_k t^{c_k} a_k b_k^T x_k$

  SDA + long-step ≈ weight splitting algorithm (Frank 1981)

  古江弘樹，卒業論文2019，論文準備中

さらなる展開

Oki 2019

- deg Det を nc-rank に帰着させる方法
- 一般の歪多項式行列の deg Det の計算

  歪多項式環 $R[s;\sigma,\delta]$

$$sa = \sigma(a)s + \delta(a)$$

  例: Weyl代数$\mathbb{C}[x,\partial]$

$$x\partial = \partial x - 1$$

- 微分方程式，制御論への応用

Part III まとめ

- nc-rankにおける劣モジュラ性
- CAT(0)空間の凸最適化をつかうアプローチ
- 重み付き(非可換)Edmonds問題，deg Det

総括

- ２部マッチングのランク解釈からはじまる
  組合せ最適化の一つの展開

- 非可換ランクの概念，アルゴリズムは,
  従来の多面体的手法とは異なる視点を提供し,
  新しい発展の方向性を示しているように感じる.

今後の課題・研究の方向性

- IQSアルゴリズムの簡略化
- 歪対称行列に対する理論:

  非２部マッチング，線形マトロイドマッチングetcに対する枠組み

  cf. Iwata, Kobayashi 2017
- モジュラ束上の劣モジュラ最適化

  cf. Kuivinen 2011, Fujishige, Kiraly, Makino, Takazawa, Tanigawa 2014
- 離散凸解析 *beyond* $\mathbb{Z}^n$
- CAT(0)空間上のアルゴリズムと最適化

  e.g., Hamada, Hirai 2017の洗練・改良
- 剛性理論との関連　c.f. Lovasz 1989，Raz, Wigderson 2019

⋮

関連するセミナー

9/4(木): FIT 林興養「CAT(0)立方複体上の測地線を求める多項式時間アルゴリズム」

9/5(金): 応用数理学会年会 離散システム研究部会オーガナイズドセッション

場所：駒場東大 (古江＋平井が発表)

9/9(月): OR学会「超スマート社会のシステムデザインのための理論と応用」研究部会

平井広志「Algorithmic and combinatorial aspects on CAT(0) spaces」

場所：RIMS

9/9(月)-9/11(水): 平井広志「離散凸解析と最適化」集中講義 場所：RIMS

11/2(土):「離散凸解析と最適化」ワークショップ 場所: RIMS

(岩政＋平井が発表)

11/11-13: Workshop “Buildings, Varieties, Applications” MPI Leipzig, Germany

(大城＋平井が発表, スケーリング関連の発表２件)