# グラフ理論における偶奇性の現象　演習問題

令和元年 (2019 年) 8 月　加納 幹雄　(茨城大学)

**問題 1** 林 $F$ の同じ成分にある *2* つの葉を選び，これを結ぶ道を $P_1$ とする．$F$ から $P_1$ の辺を除去して得られる林を $F - E(P_1)$ と書く．$F - E(P_1)$ の同じ成分にある *2* つの葉を選び，これを結ぶ道を $P_2$ とし，$P_2$ の辺を除去して得られる林を $F - E(P_1) - E(P_2)$ とかく．以下同様の操作を辺がなくなるまで行う．すると $F$ の辺集合は $E(F) = E(P_1) \cup E(P_1) \cup \cdots \cup E(P_n)$ と分解される．この分解に必要な道の個数 $n$ は次式で与えられることを示せ．特に，*2* つの葉の選び方によらず一定である．

$$n = \frac{F \text{ の奇数次数の点の個数}}{2}$$

**問題 2** 連結なオーラー多重グラフ $G$ (i.e., すべての点の次数が偶数であるグラフ）の *1* 点 $s$ を選ぶ．$s$ から出発し，通った辺を消しながら進むと，最後には出発点の $s$ で進めなくなることを示せ．

**問題 3** 連結な多重グラフ $G$ には奇数次数の点が $s$ と $t$ の *2* つあり，他の点はすべて偶数次数であるとする．すると，点 $s$ から出発し，通った辺を消しながら進むと，最後には点 $t$ で進めなくなることを示せ．

**問題 4** 連結なオーラー多重グラフ $G$ の *1* 点 $s$ を選ぶ．$s$ から出発し，通った辺を消しながら進み，今，点 $u$*(*$u \neq s$*)* にいて，その時のグラフを $H$ とする．$H$ において点 $u$ に接続する辺を $e_1, e_2, \ldots, e_m$ とすると，この中に $H$ の切断辺 *(bridge, cut-edge)* となる辺は高々 1 本しかないことを示せ．

**問題 5** 連結な偶数位数の多重グラフは *3* つの奇次数部分グラフに分解できることを示せ．つまり，$G$ の辺を赤，青，緑の *3* 色で着色し，各点において，各色の辺は奇数本接続しているか，または接続していないようにできることを示せ．

**問題 6** 偶数位数の木 $T$ において，辺集合 $F$ を

$$F = \{e \in E(T) : \ T - e \text{ は } 2 \text{ つの奇成分になる} \}$$

とすると，各点 $v$ において $\deg_F(v) = $ 奇数　となることを示せ．

**問題 7** 偶数位数の木 $T$ に $(1, f)$-奇次数因子が存在するための必要十分条件は

$$odd(T - v) \leqq \ f(x) \quad for\ all\ v \in V(T)$$

となることを示せ．なお，$f : V(T) \to \{1, 3, 5, \ldots\}$ であり，$(1, f)$-奇次数因子 $F$ は，任意の点 $x \in V(T)$ において $\deg_F(x) \in \{1, 3, \ldots, f(x)\}$ となる全域部分グラフである．

**問題 8** 偶数位数の連結グラフ $G$ に $(1,f)$-奇次数因子が存在するための必要十分条件は

$$odd(G-S) \leqq f(S) \quad \textit{for all } S \subset V(T)$$

となることを示せ．なお，$f: V(G) \to \{1,3,5,\ldots\}$ であり，十分性の証明には，次の *parity* $(g,f)$*-factor* 定理を使うものとする．

**定理** グラフ $G$ に 2 つの関数 $g,f: V(G) \to \mathbb{Z}$ で $g(x) \le f(x),\ g(x) \equiv f(x) \pmod 2$ *for all* $x \in V(G)$ となるものが定義されている．このとき $G$ に *parity* $(g,f)$*-factor* $F$ $(g(x) \le \deg_F(x) \le f(x),\ \deg_F(x) \equiv f(x) \pmod 2)$ が存在するための必要十分条件は

$$f(S) - g(T) + \deg_G(T) - e_G(S,T) - q(S,T) \ge 0,$$

*for all* $S,T \subset V(G), S \cap T = \emptyset,$ が成り立つことである．ただし，$q(S,T)$ は $G-(S \cup T)$ の成分 $C$ で $f(V(C)) + e_G(V(C),T) \equiv 1 \pmod 2$ となるものの個数である．

**問題 9** 連結グラフ $G$ の偶数次数の点の個数を $m$ とする．すると $G$ には奇次数部分グラフ（すべての点の次数が奇数となる部分グラフ）$H$ で $|H| = |G| - m$ となるものが存在することを示せ．

**問題 10** 連結グラフ $G$ から偶数個の点 $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ をとり，$x_i$ と $y_i$ を結ぶ道を辺集合で表したものを $P(x_i, y_i)$ とする $(P(x_i, y_i) \subset E(G))$．このとき，これらの道の対象差

$$Q = P(x_1,y_1) \triangle P(x_2,y_2) \triangle \cdots \triangle P(x_n,y_n) \ \subset E(G),$$

をとる．ここで辺 $e$ が $Q$ に含まれるのは，$e$ を含む道 $P(x_i,y_i)$ が奇数個あるときである．すると辺集合 $Q$ から誘導される部分グラフ $\langle Q \rangle_G$ は，$x_1, x_2, \ldots, x_n,\ y_1, y_2, \ldots, y_n$ では奇数次数となり，他の点では偶数次数となることを示せ．

# 参考文献


[1] J. Akiyama and M. Kano, *Factors and Factorizations of Graphs*, Lecture Notes in Math. **2031**, Springer, Heidelberg, (2011).