グラフ理論における偶奇性に関連する現象
（1回目の講義）

加納 幹雄 （Mikio Kano）
茨城大学 名誉教授

講義の　概略

1回目　　入門的な話
証明の多くを演習問題とします

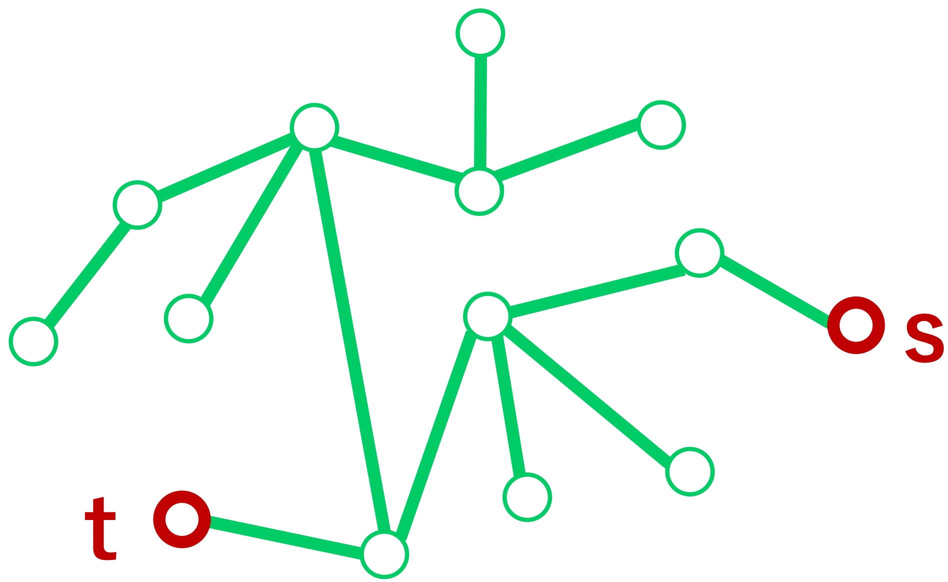
2回目　　マッチングと1-因子の一般化
に関連する話

3回目　　因子＝ある性質をもつ全域部分グラフ
最近の因子理論のなかで
偶奇性に関連するものの紹介

木の道分解

木Tから２つの葉（次数１の点）を勝ってにとり、
この２点を結ぶ道P1をとり、P1の辺をTから除去して
林T−P1をつくる。

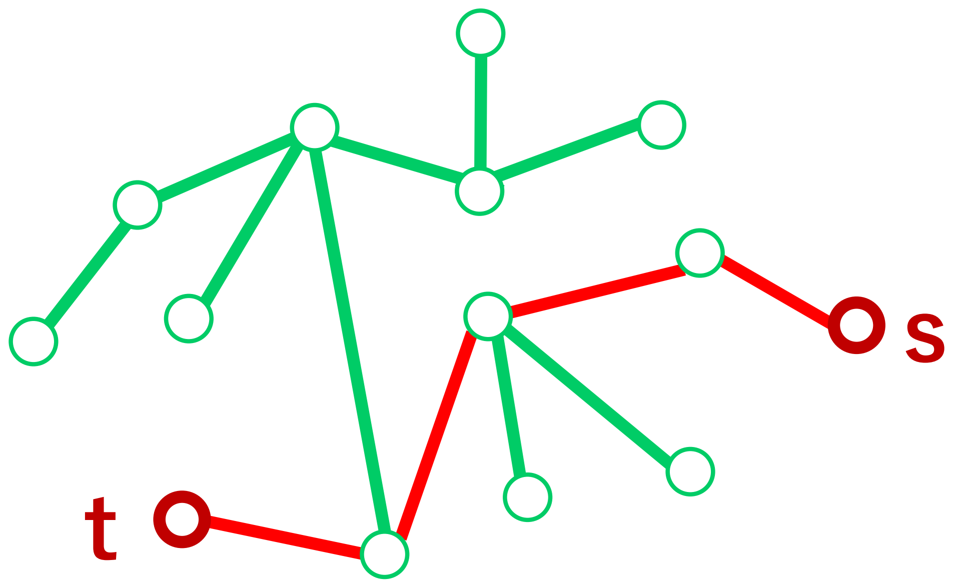
木の道分解



木 T

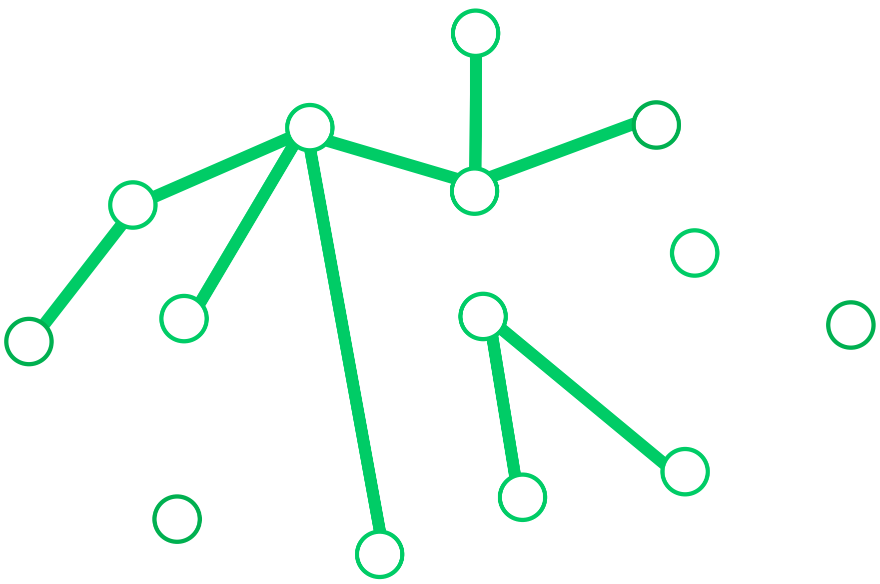
2つの葉 s と t をとる

木の道分解



木 T　　　s と t を結ぶ道P1

木の道分解



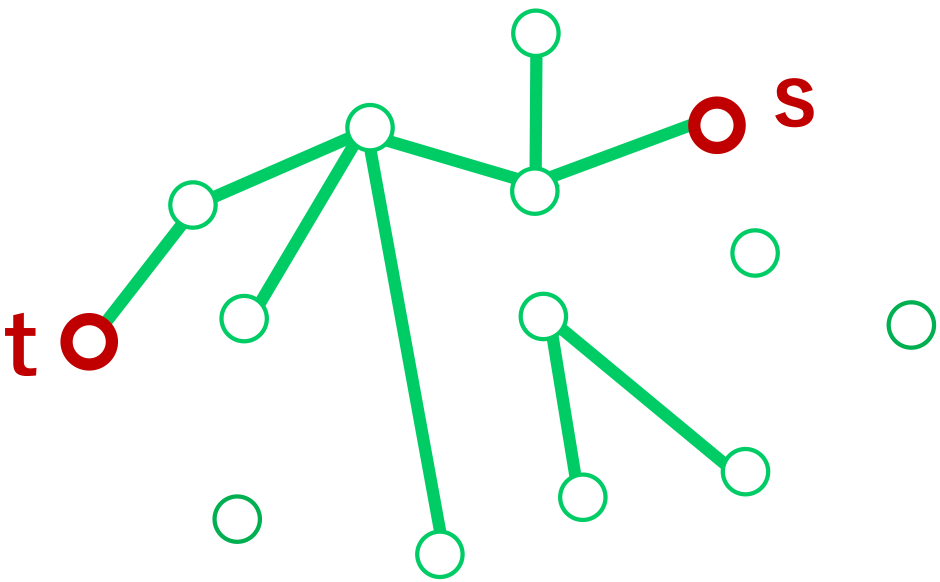
林 T-P1

木の道分解

林 T−P1 の同じ成分にある葉を2つとり、
これを結ぶ道を P2 とする。
林 T−P1 から P2の辺 を除去して
林 T−P1−P2 をつくる。

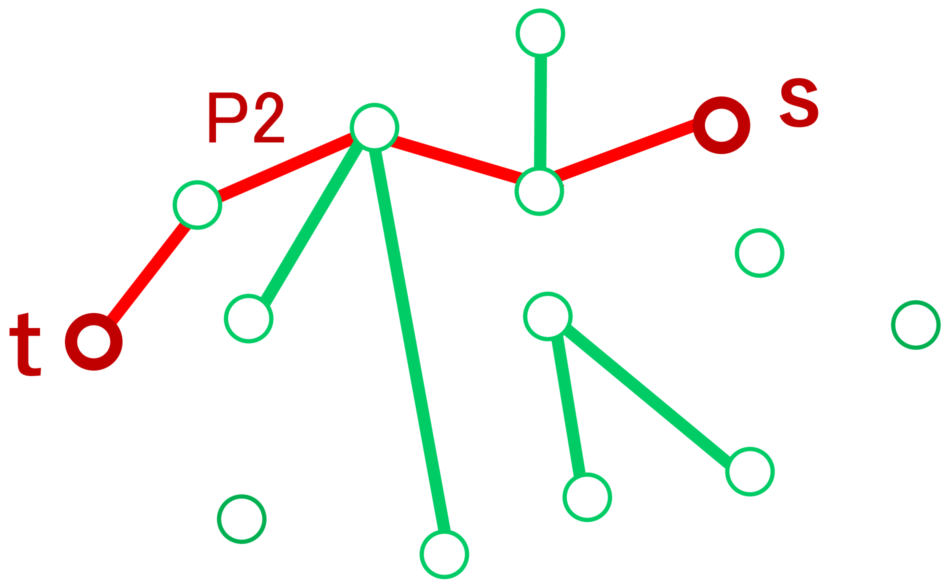
以下同様の操作をする。

木の道分解



林 T-P1

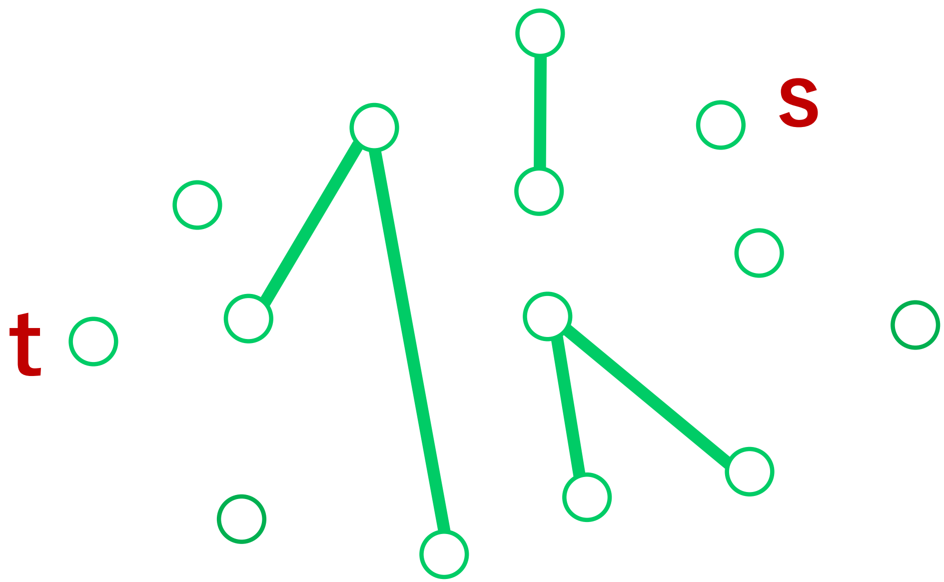
木の道分解



ｓとｔを結ぶ道P2

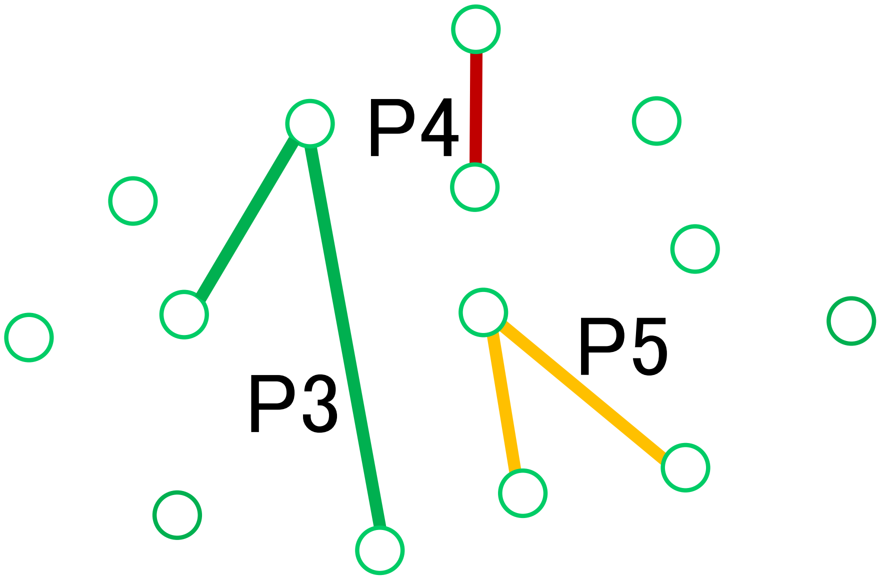
林 T−P1

木の道分解



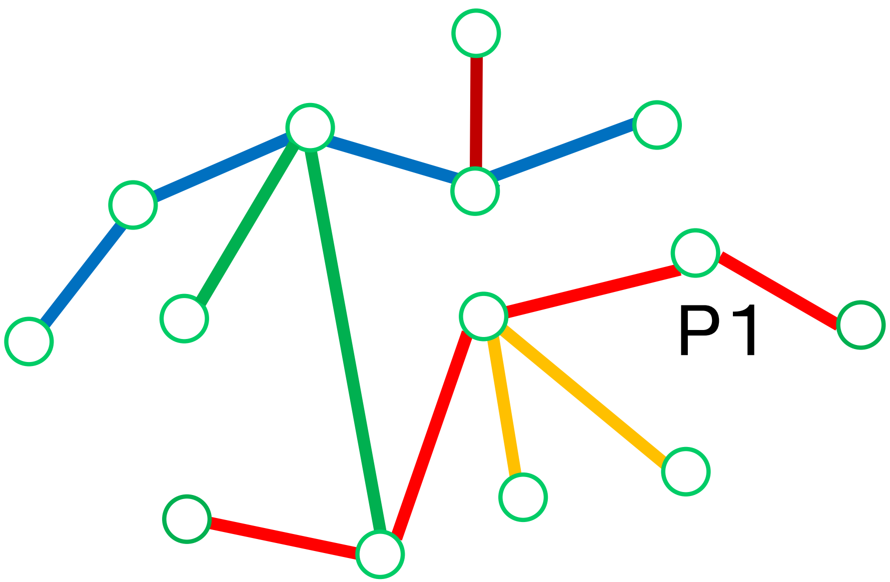
林 T−P1−P2

木の道分解



林の3個の道　P3、P4、P5

木の道分解



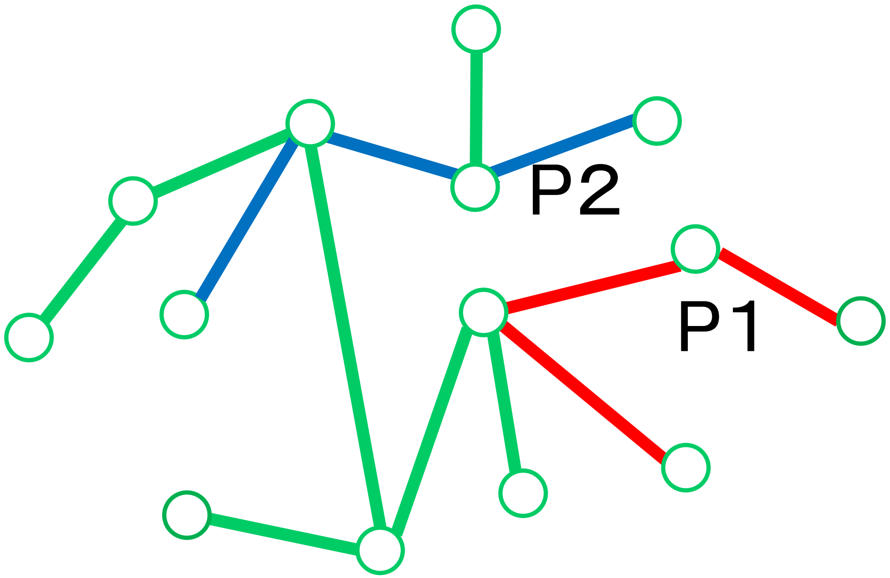
木 T

T ＝ P1∪P2∪P3∪P4∪P5

と5個の道に分解される

木の道分解

別の道分解

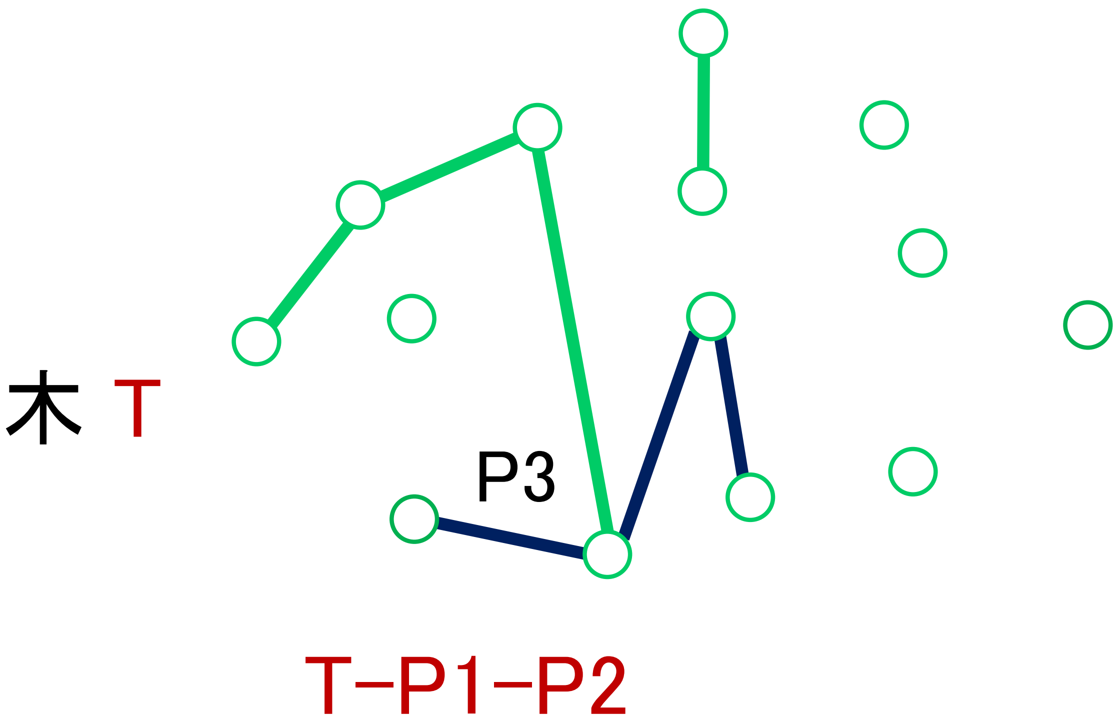


木 T

T の2つの道 P1 と P2

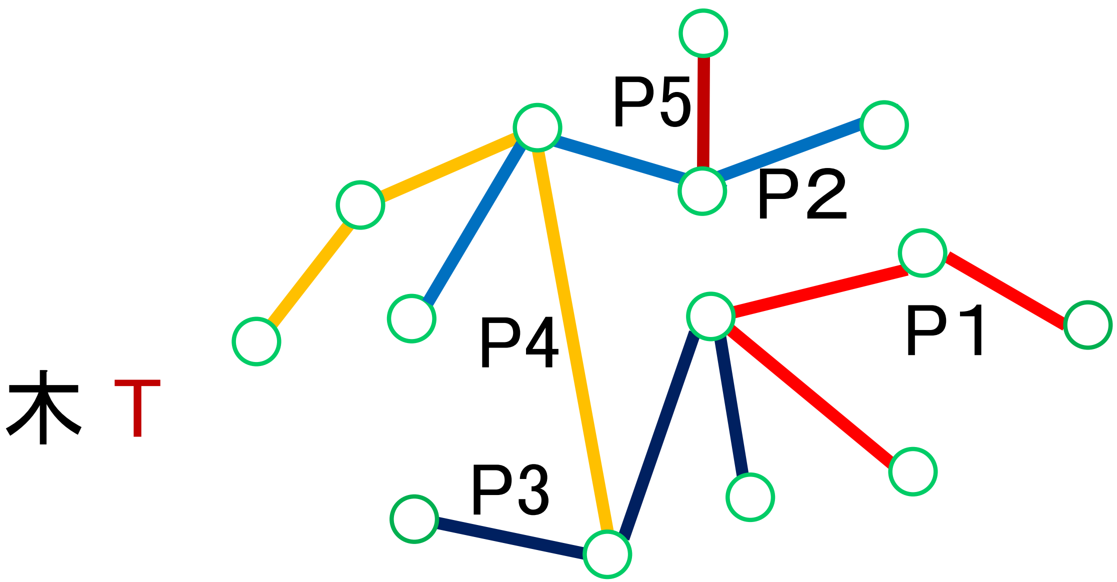
木の道分解

別の道分解



木の道分解

別の道分解



T ＝ P1∪P2∪P3∪P4∪P5

と5個の道に分解される

木の道分解

このように同じ成分にある2つの葉を勝手に選び、
これを結ぶ道を除去することにより

木はいくつかの道に分解できる。

定理　木を上のように葉を結ぶ道で分解するとき、
道の個数は葉の選び方によらず一定である。

この事実は何とか証明できたが、やや複雑であった

木の道分解

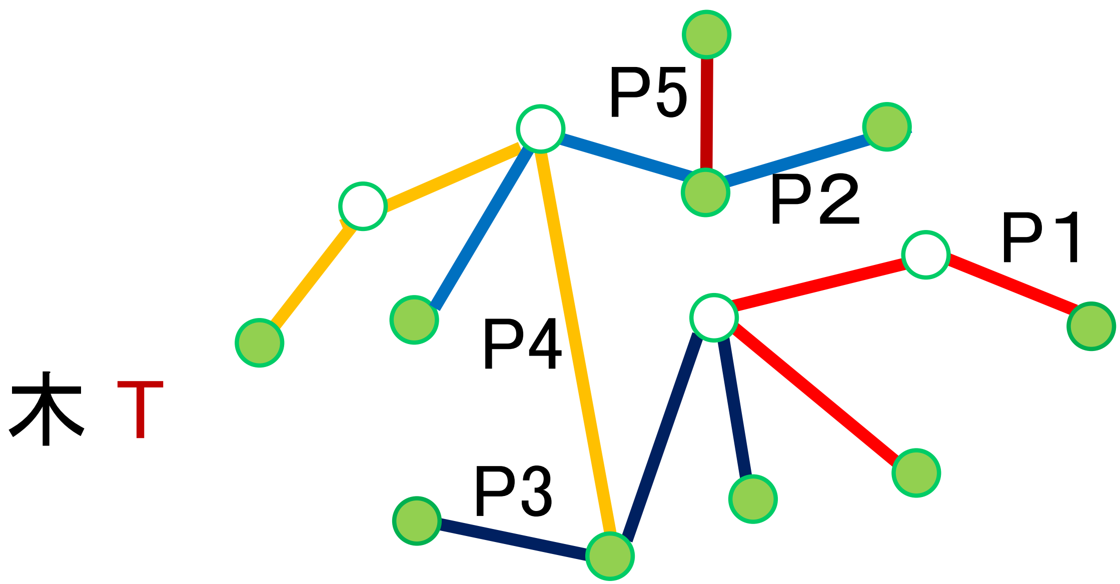
定理　木Tを葉を結ぶ道で分解するとき、

$$\text{道の個数} = \frac{\text{T の奇数次数の点の個数}}{2}$$

である。

木の道分解

木のある道分解



Tの奇数次数の点の個数 = #{●} = 10

10/2 = 5個 の道に分解される

木の道分解

定理　木Tを葉を結ぶ道で分解するとき、

$$\text{道の個数} = \frac{\text{Tの奇数次数の点の個数}}{2}$$

である。

加納＋太田（慶応大学）の定理とよんでもよい
しかし、上記の公式を太田先生に指摘されて
論文として発表する意欲は消失

この証明は演習問題とする

下記の教科書の中で発表しました

発展問題

8.1 木 T を二つの葉を結ぶ道を用いて分解するとき，道の数は T の奇数次数の点の数の半分に等しいことを示せ．

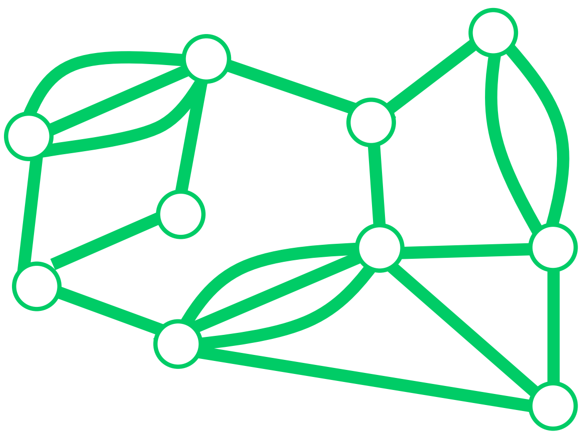
ヒントは表示から除いた。解答は巻末にある

扱うグラフ

グラフ　は有限グラフで

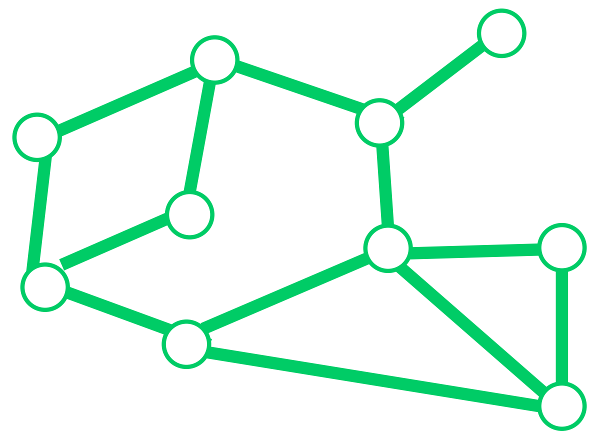
　　　ループはなく　多重辺は許す

ループも多重辺もないグラフは　単純グラフとよぶ



グラフ

（一般には多重グラフともいう）



単純グラフ

グラフの記号

G : **連結グラフ**;　　V(G) = Gの点集合 ;

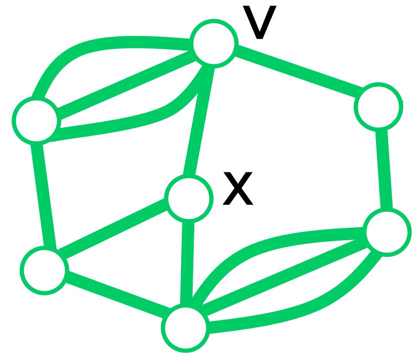
E(G) = Gの辺集合 ;　　|G| = |V(G)| = G の位数

G の部分グラフ H において

$\deg_H(v)$ = 点v の H における次数

= v に接続するHの辺の数

Gの位数
=|G|=7



$\deg_G(v)=5$

$\deg_G(x)=3$

グラフ G（多重グラフともいう）

グラフの記号

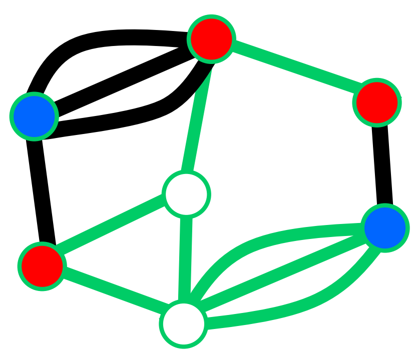
$X, Y \subset V(G)$, $X \cap Y = \Phi$ 対して

$E_G(X,Y)=$ Xの点とYの点を結ぶGの辺の集合

$= \{ xy \in E(G) : x \in X,\ y \in Y \}$

$e_G(X,Y)=$ Xの点とYの点を結ぶGの辺の個数

$= |E_G(X,Y)|$



グラフ G（多重グラフ）

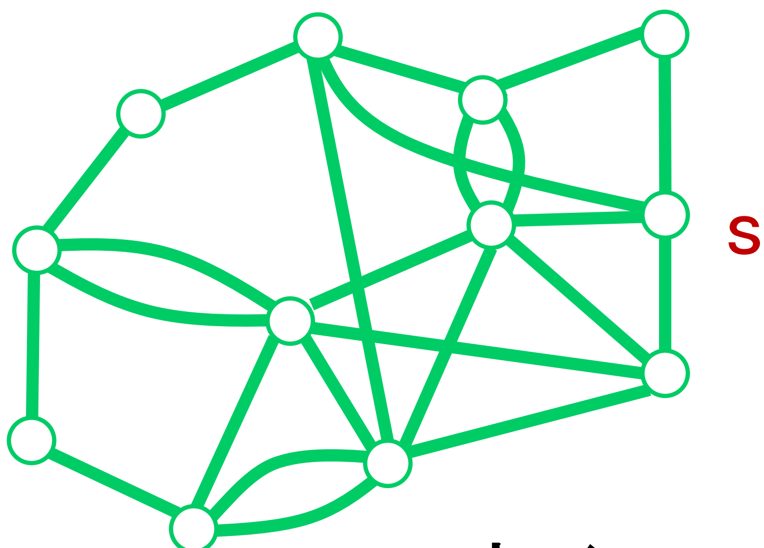
$X=\{\quad\}$, $Y=\{\quad\}$

$E_G(X,Y)= \{\quad\}$

$e_G(X,Y)= 5$

帰宅・配達　問題

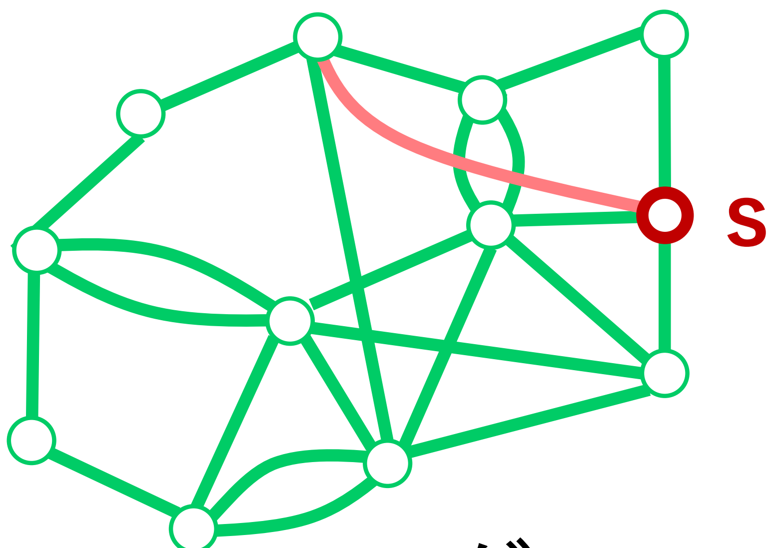
オイラーグラフG（すべての点が偶数次数のグラフ）
出発点sから 通った辺を削除しながら
勝ってに進む。すると 出発点 s で進めなくなる。



オイラーグラフ G

帰宅・配達　問題

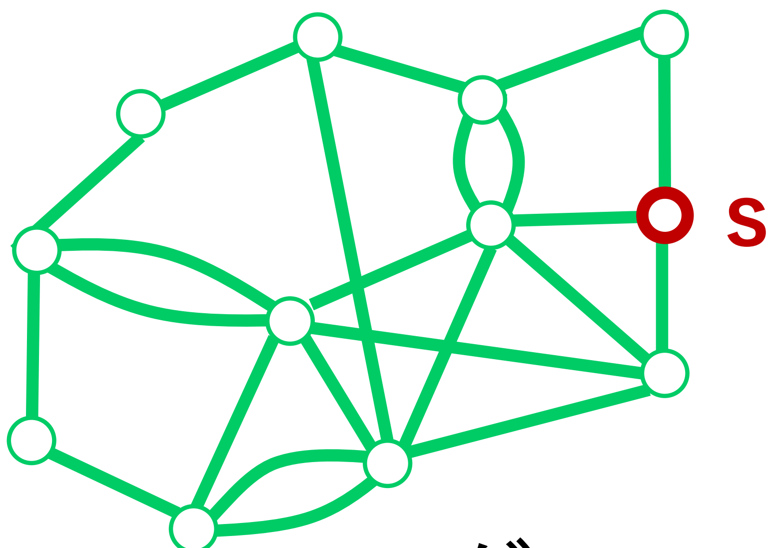
オイラーグラフG（すべての点が偶数次数）
出発点sから 通った辺を削除しながら
勝ってに進む。すると 出発点s で進めなくなる。



グラフ G

帰宅・配達　問題

オイラーグラフG（すべての点が偶数次数）
出発点sから 通った辺を削除しながら
勝ってに進む。すると 出発点s で進めなくなる。

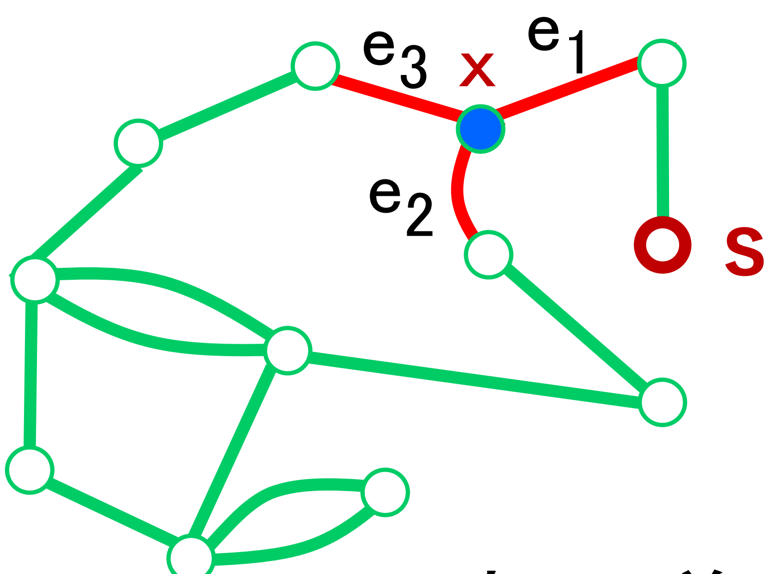


グラフ G

帰宅･配達　問題

アルゴリズムを少し改良するとGのオイラー回路を求めることができる(全部の辺を通ってsに戻る)。

今、点xにいるとする。 xに接続する残った辺を$e_1,e_2,\cdots,e_m$とする。



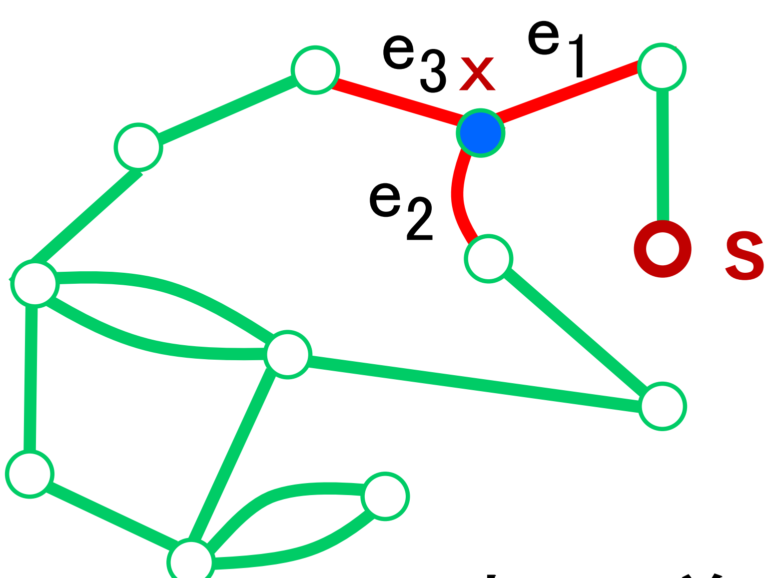
点xに着いた状態

帰宅・配達　問題

点xに接続する辺の1つをe_aとする。

もしe_aが切断辺(cut−edge)でないならe_aに進む。

もしe_aが切断辺ならe_a以外の任意辺に進む。



e_1 は切断辺

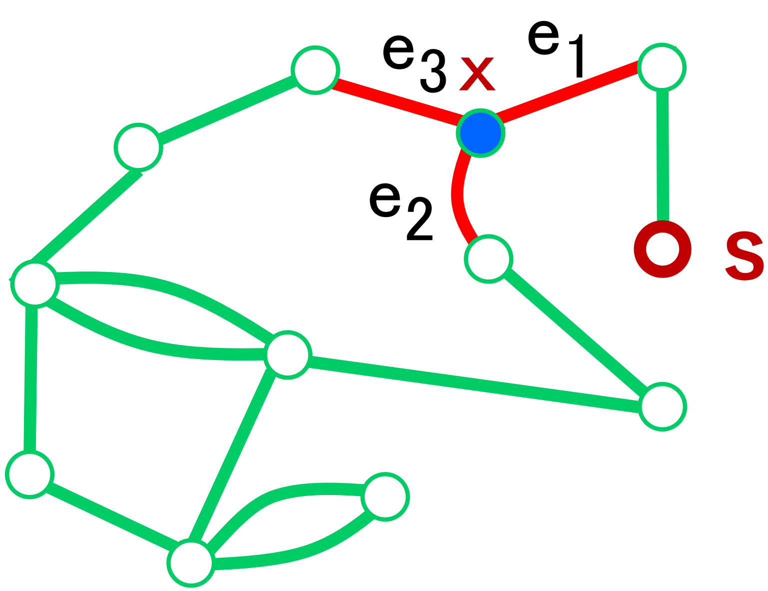
e_2,e_3 は切断辺でない

点xに着いた状態

帰宅・配達　問題

点xに接続する辺の1つをe_aとする。

もしe_aが切断辺(cut-edge)でないならe_aに進む。
もしe_aが切断辺ならe_a以外の任意辺に進む。



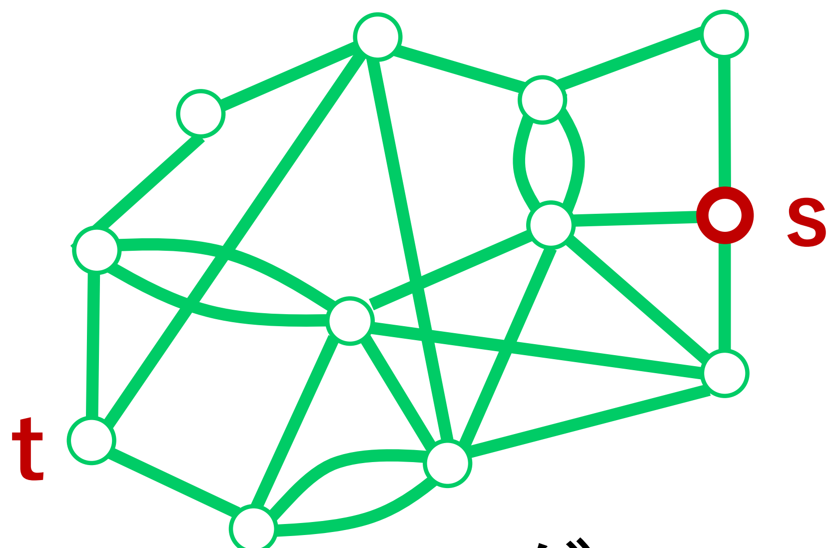
点xに着いた状態

e_1は切断辺
e_2,e_3は切断辺でない

xに接続する切断辺は1本以下であることを示せ。
演習問題

帰宅・配達　問題

２点s,tは奇数次数で、他の点は偶数次数のグラフG
点sから出発し、通った辺を削除しながら
勝ってに進む。すると 点t で進めなくなる。

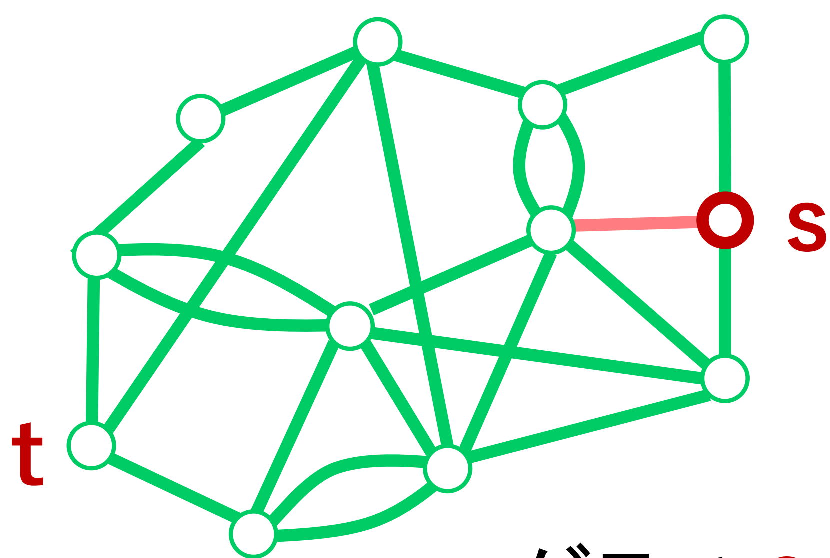


2点sとtが
奇数次数

グラフ G

帰宅・配達　問題

２点s,tは奇数次数で、他の点は偶数次数のグラフG
点sから出発し、通った辺を削除しながら
勝ってに進む。すると 点t で進めなくなる。

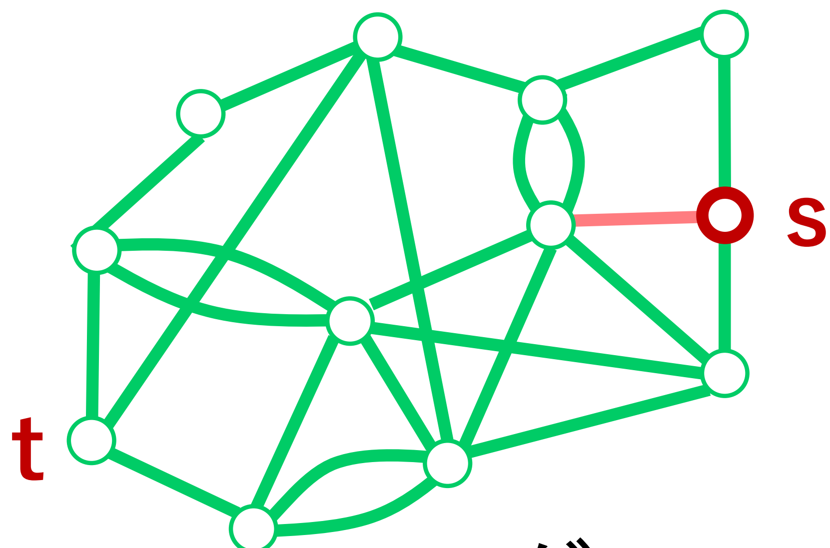


2点sとtが
奇数次数

グラフ G

帰宅・配達　問題

２点s,tは奇数次数で、他の点は偶数次数のグラフG
点sから出発し、通った辺を削除しながら
勝ってに進む。すると 点t で進めなくなる。



2点sとtが
奇数次数

グラフ G

帰宅・配達問題の証明

帰宅・配達問題は、次に定理を用いて証明できる

握手定理　グラフにおいて

点の次数和＝２×辺の数

特に

「グラフには　奇数次数の点　が偶数個ある」

これを用いて

帰宅・配達問題を証明できる

演習問題とします。

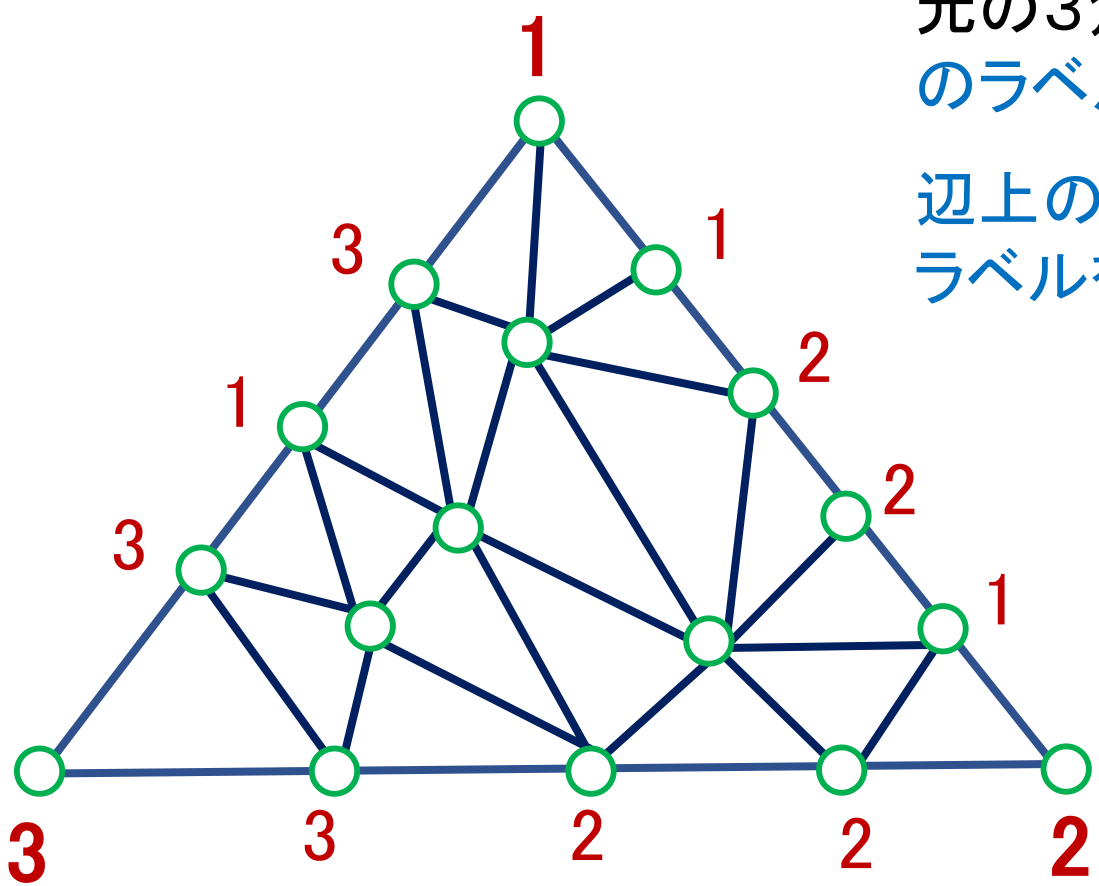
シュペルナーの補題

握手定理の系である

「グラフには　奇数次数の点　が偶数個ある」

の別の応用例。

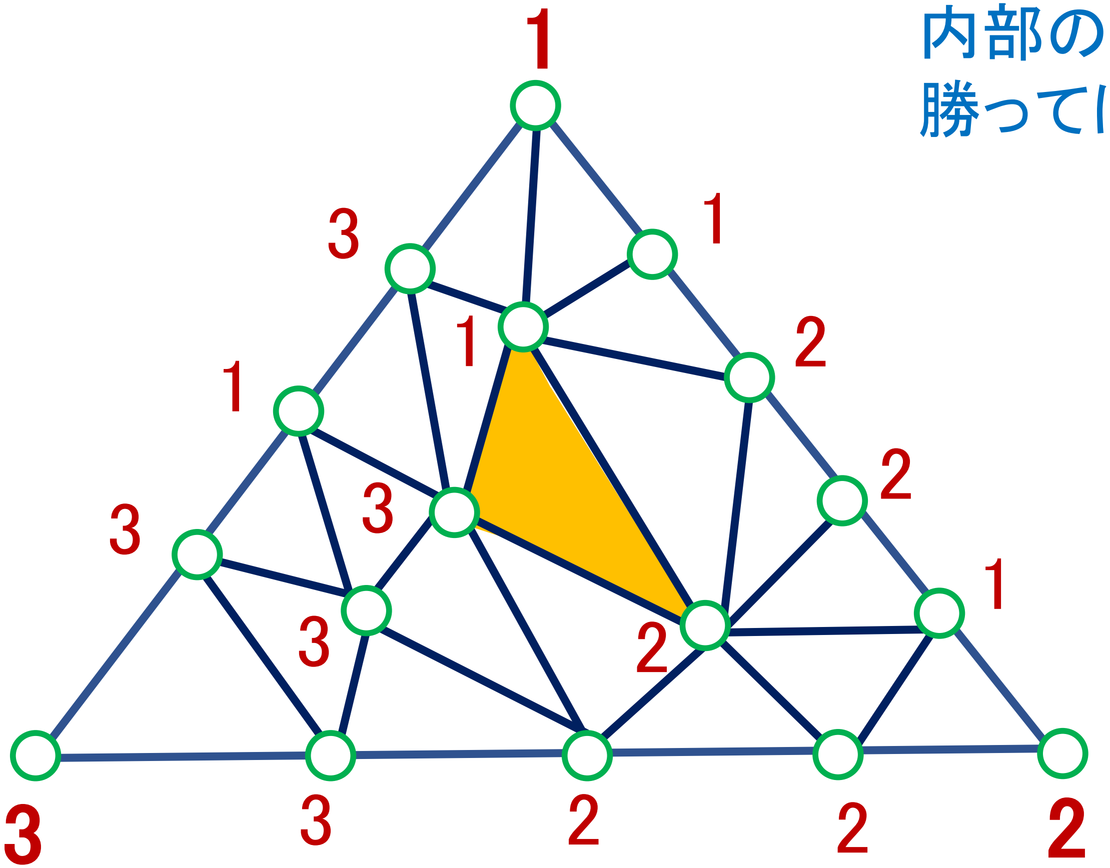
シュペルナーの補題



元の３角形の頂点に 1,2,3 のラベルをつける

辺上の点には両端の頂点のラベルを付ける

シュペルナーの補題

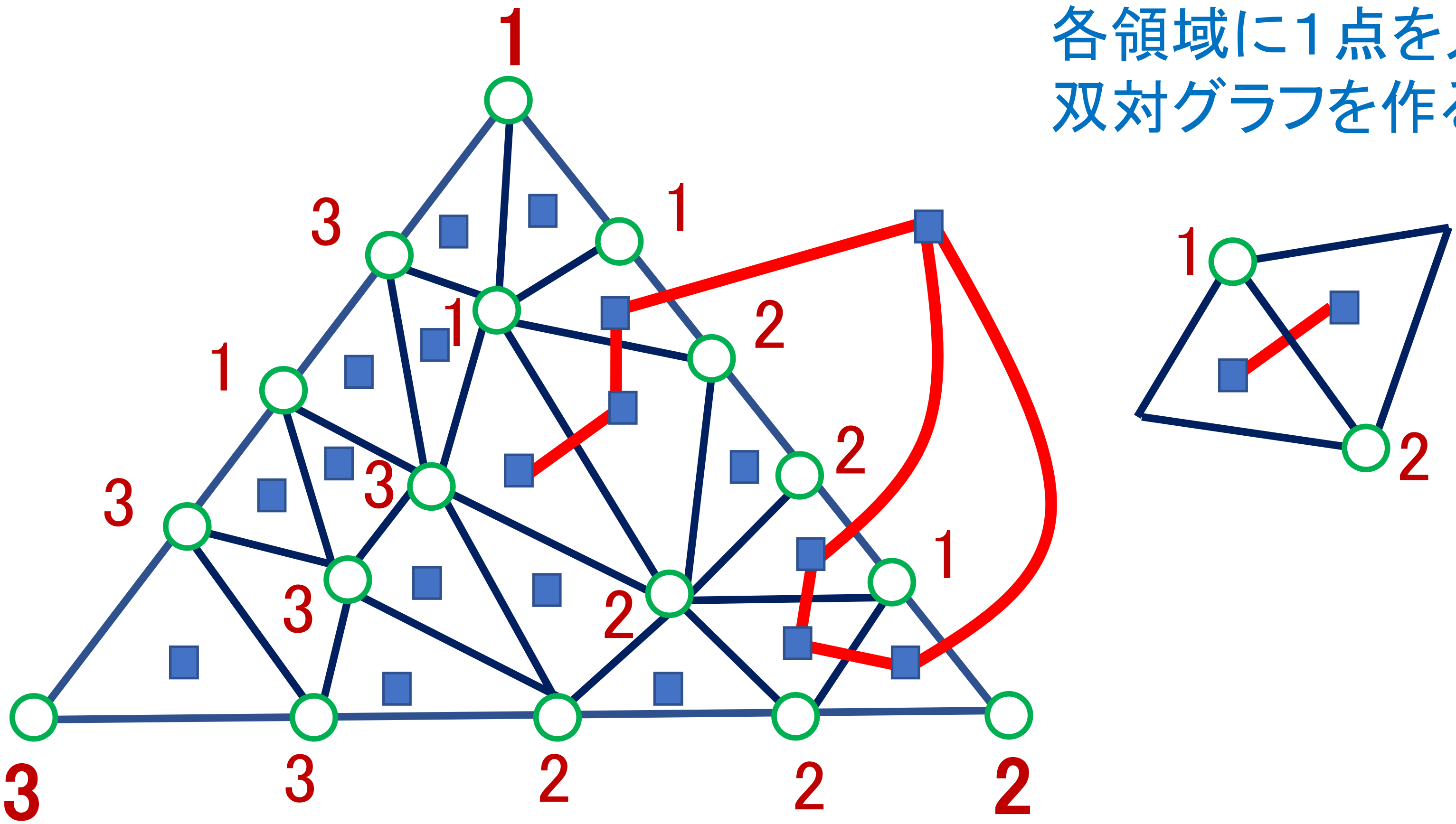


内部の点には 1,2,3 を
勝ってに付ける

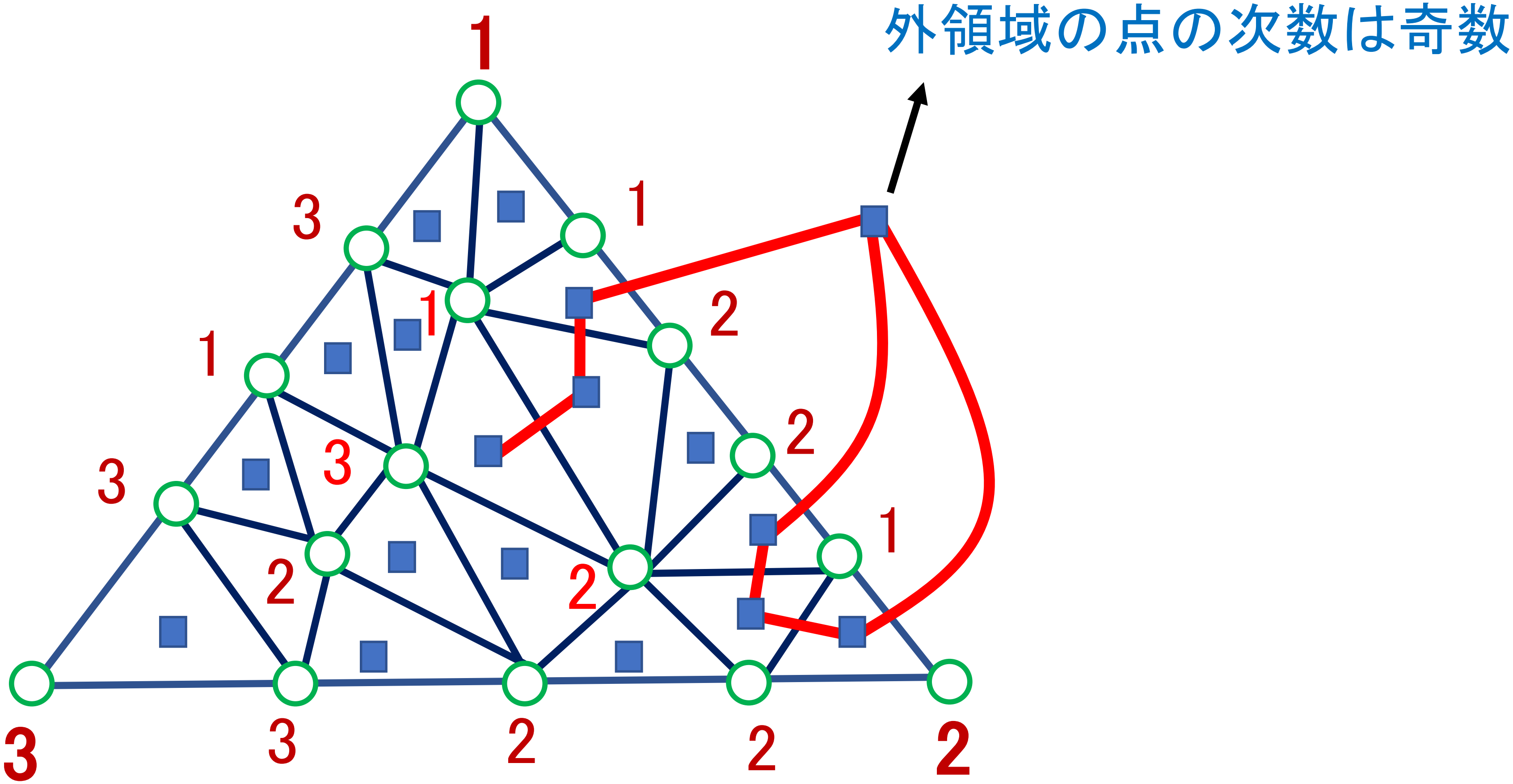
定理:すると
3頂点に1,2,3
と付いた
3角形がある

シュペルナーの補題

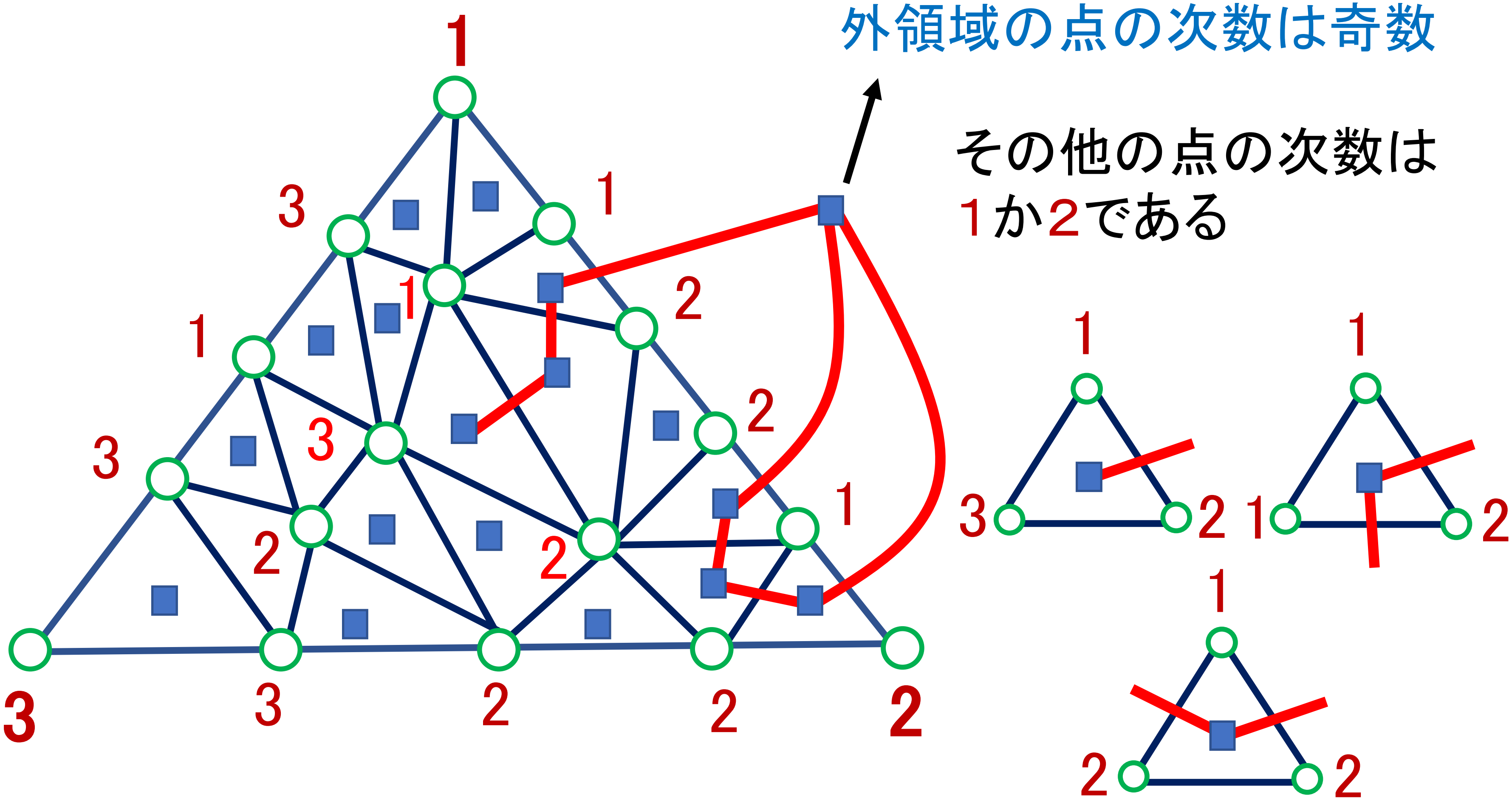
各領域に1点を入れ
双対グラフを作る



シュペルナーの補題

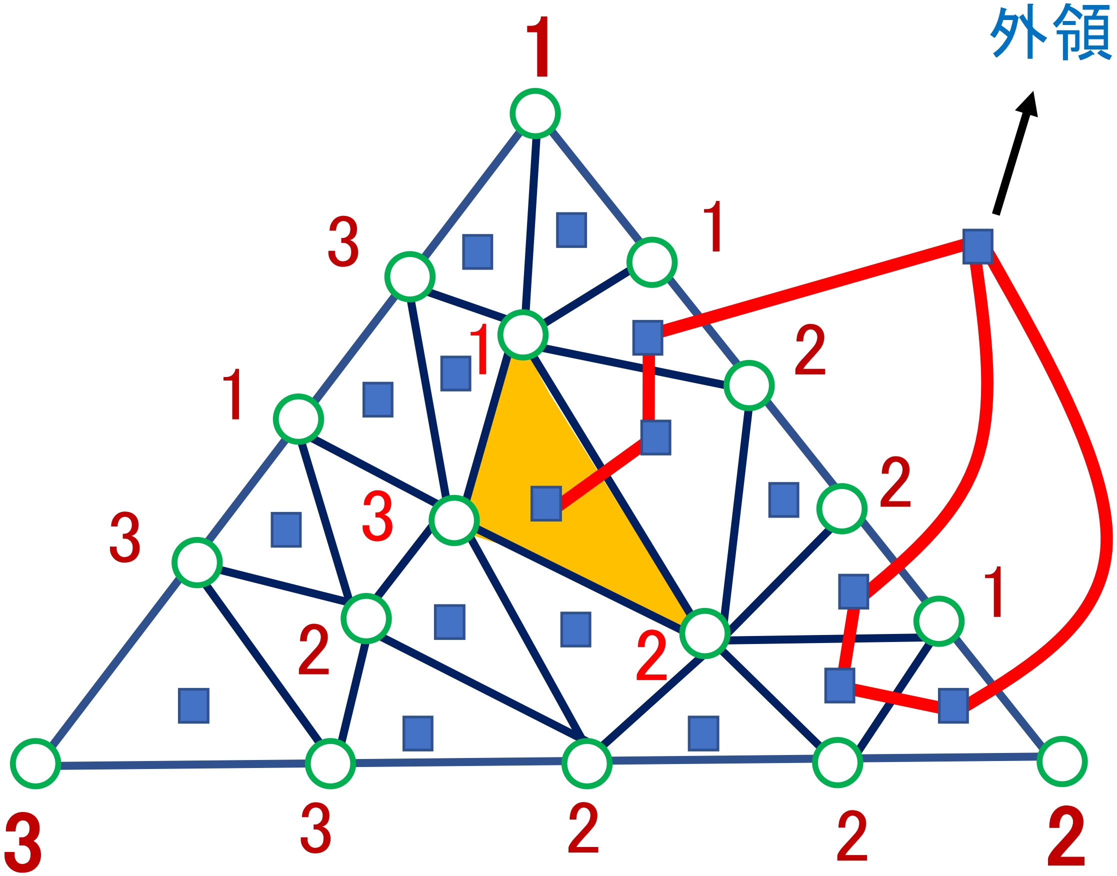


シュペルナーの補題



シュペルナーの補題

外領域の点の次数は奇数



その他の点の次数は
1か2である
よって、奇数次数の点、
つまり次数1の点が
内部にある

次数1の点の
3角形の頂点は
1,2,3 である

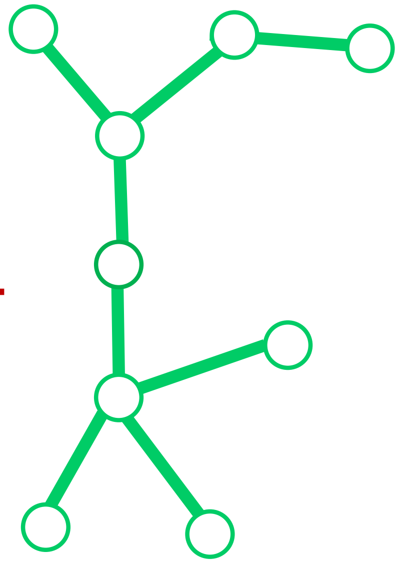
シュペルナーの補題

シュペルナーの補題を用いて

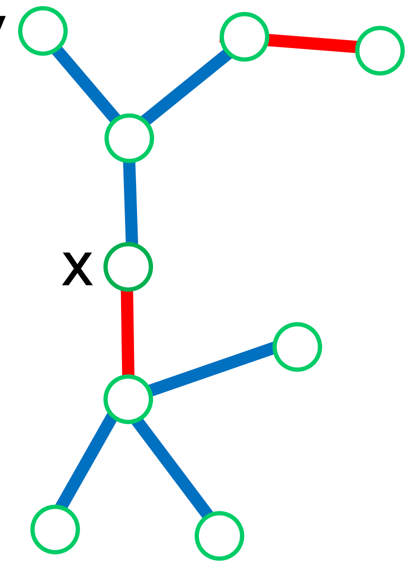
不動点定理を証明することができる

他にもいろいろな応用がある

木の2つの奇次数林への分解



木T

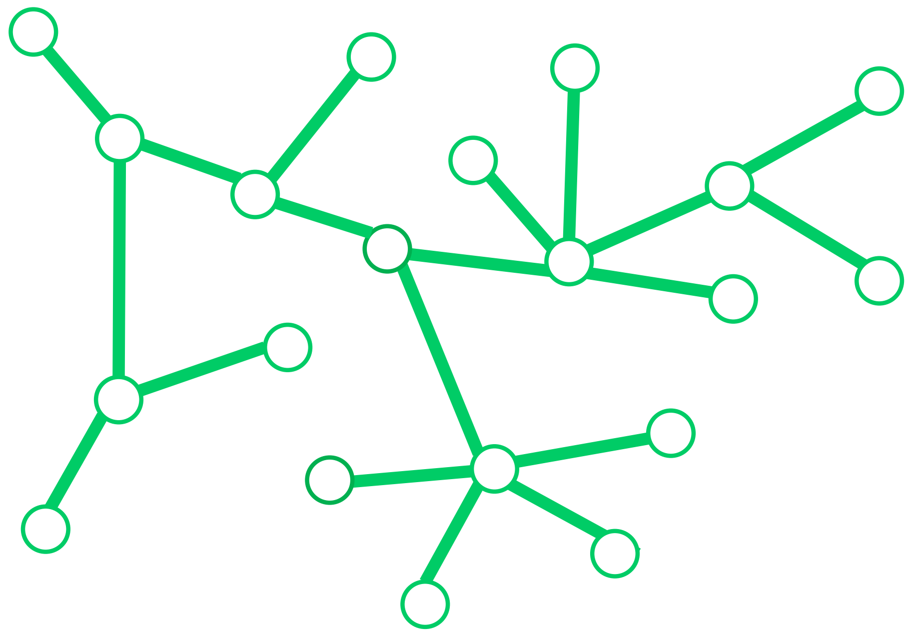


定理：木Tは2つの奇次数林
R ={ } と B ={ } に分解できる

$\deg_R(x)$ = 奇数 or 0　　$\deg_B(x)$ = 奇数 or 0

木の2つの奇次数林への分解

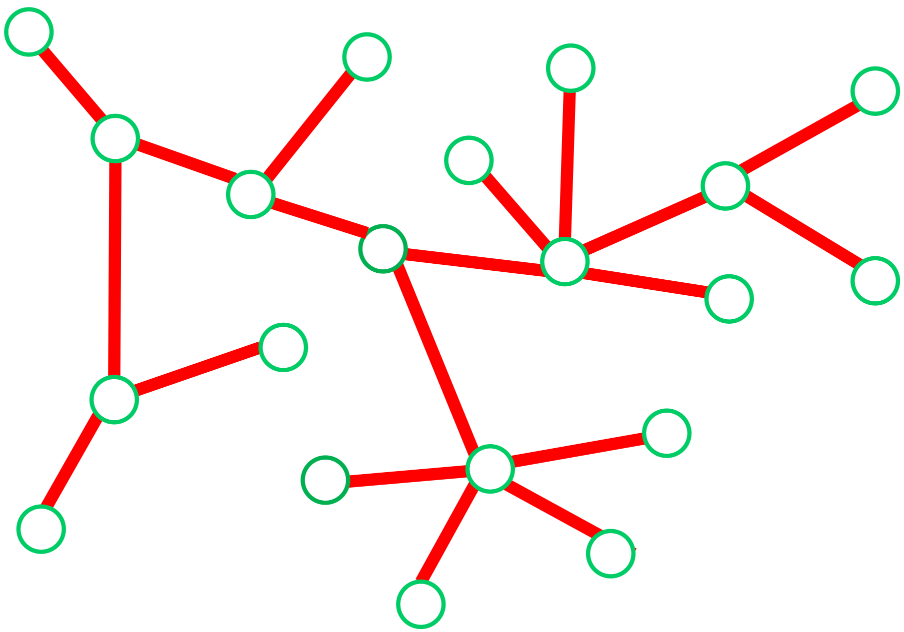
木T



もし全部の点が奇次数なら全部の辺を赤く塗る。
つまり、　R=E(T), B=Φ とすればよい。

木の2つの奇次数林への分解

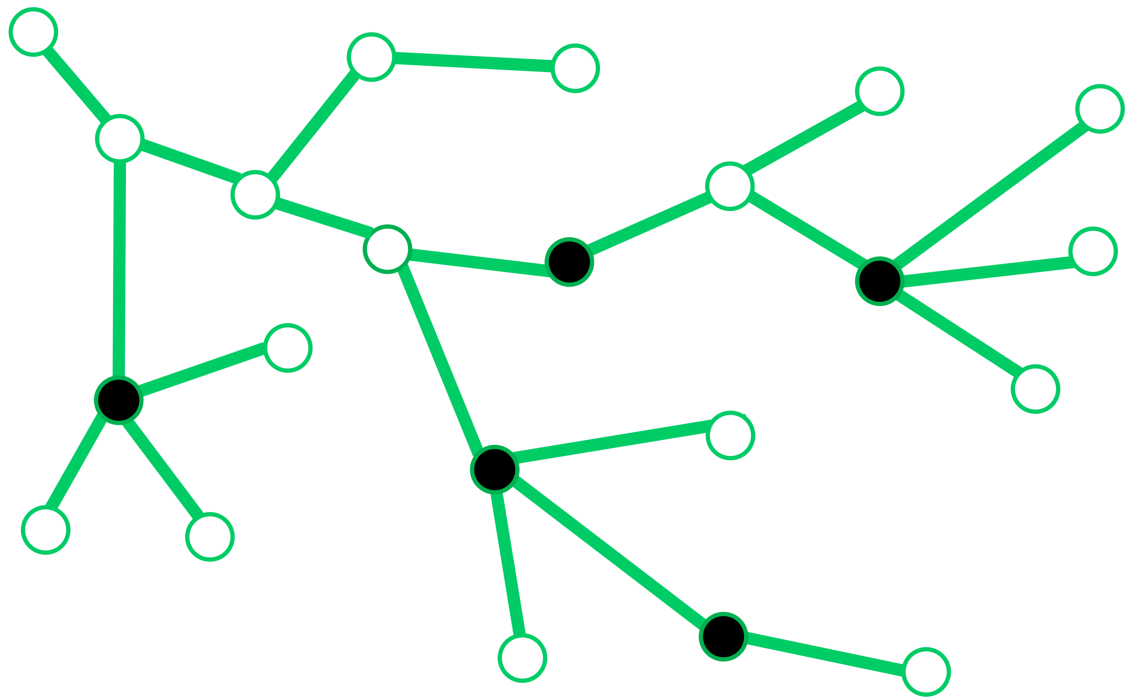
木T



もし全部の点が奇次数なら全部の辺を赤く塗る。
つまり、　R=E(T), B=Φ とすればよい。

木の2つの奇次数林への分解

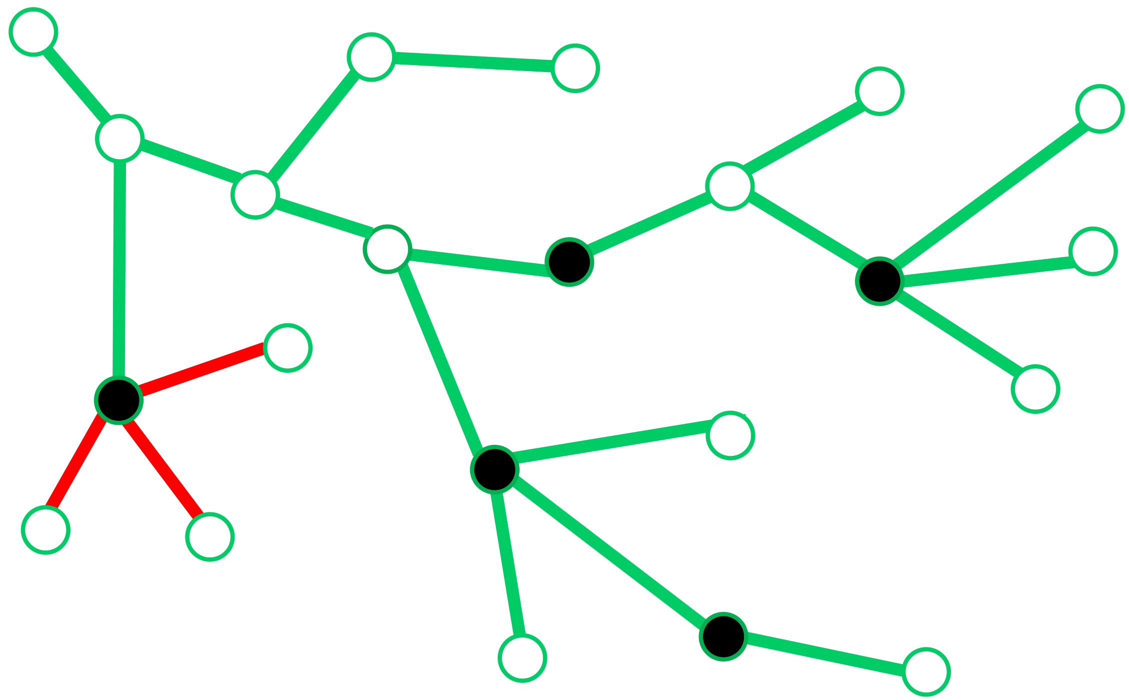
木T



偶数次数の点をマークする。偶数次数の点までの辺を交互に赤と青で塗る。

木の2つの奇次数林への分解

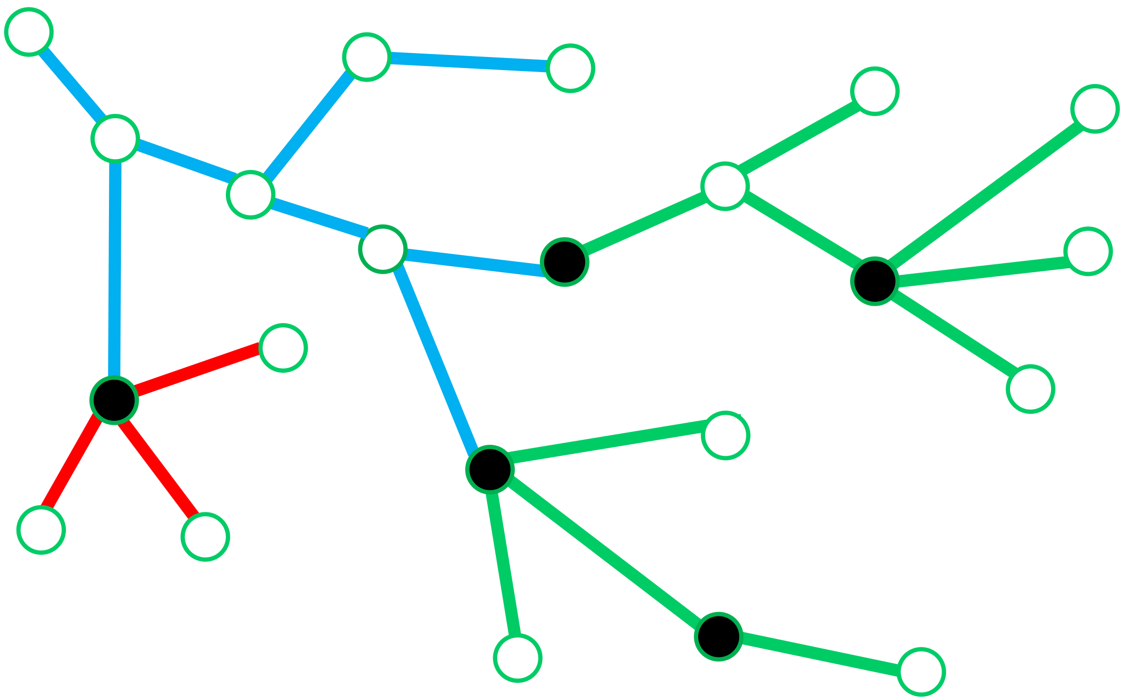
木T



偶数次数の点をマークする。偶数次数の点までの辺を交互に赤と青で塗る。

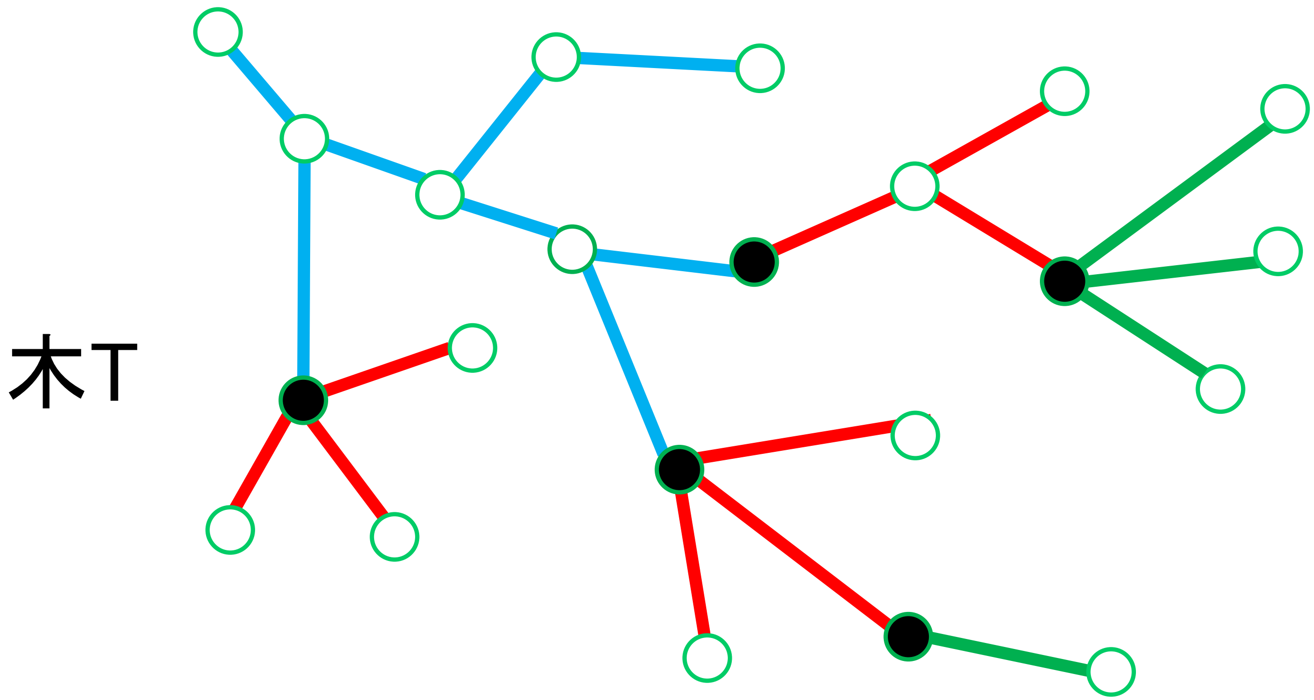
木の2つの奇次数林への分解

木T



偶数次数の点をマークする。偶数次数の点までの辺を交互に赤と青で塗る。

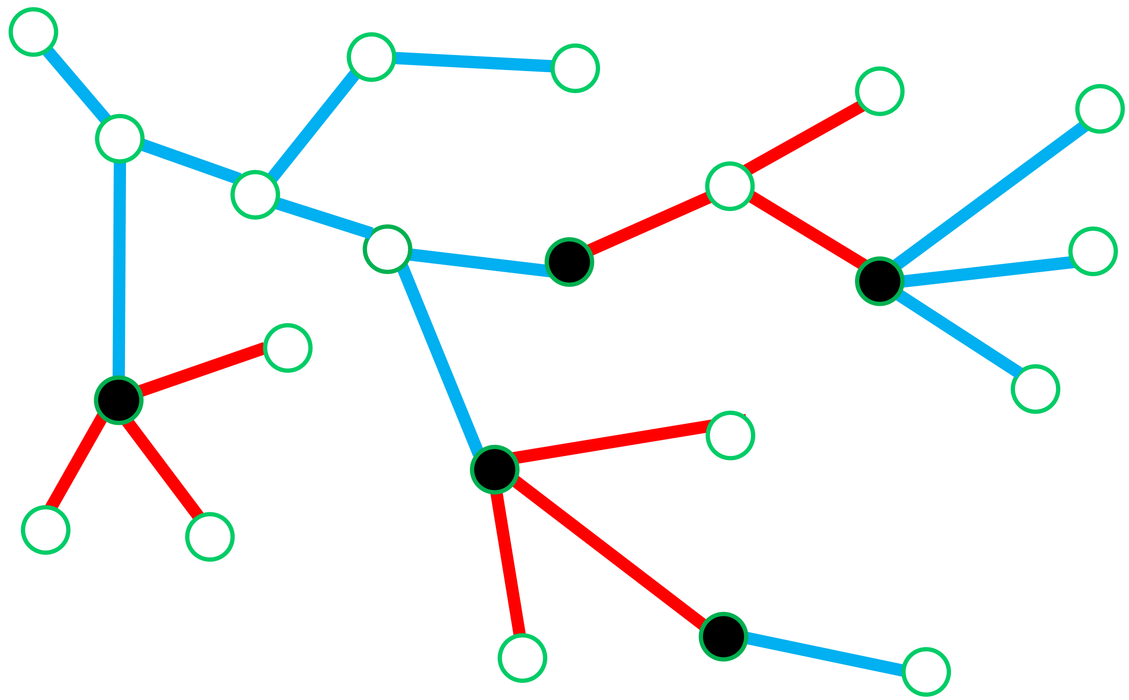
木の2つの奇次数林への分解



偶数次数の点をマークする。偶数次数の点までの辺を交互に赤と青で塗る。

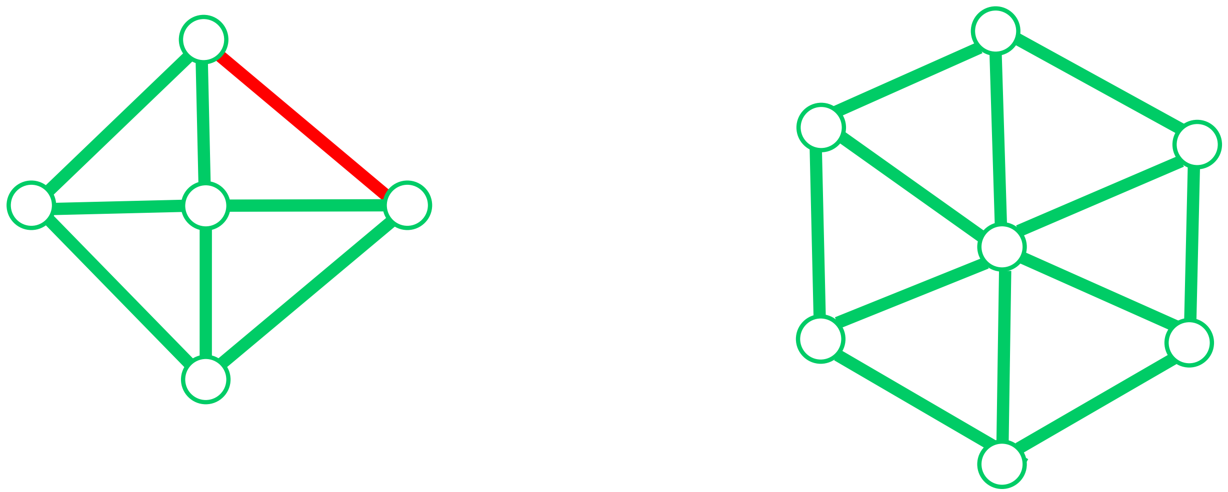
木の2つの奇次数林への分解

木T



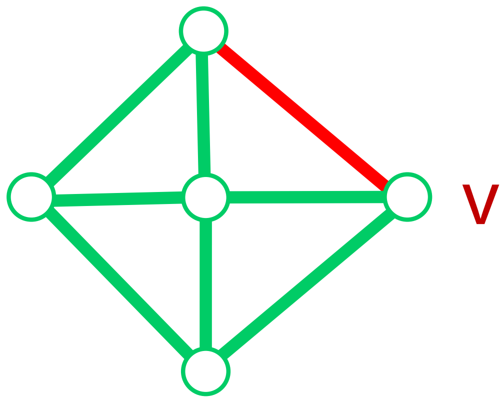
偶数次数の点をマークする。偶数次数の点までの辺を交互に赤と青で塗る。

2つの奇次数部分グラフへの分解

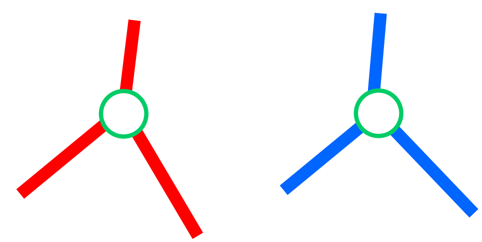


中心点の次数が偶数の車輪グラフは
2つの奇次数部分グラフに
分解できない。

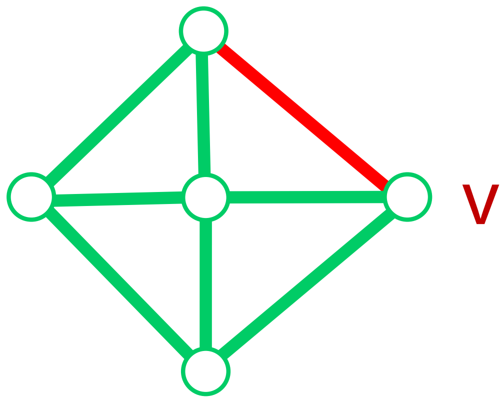
2つの奇次数部分グラフへの分解

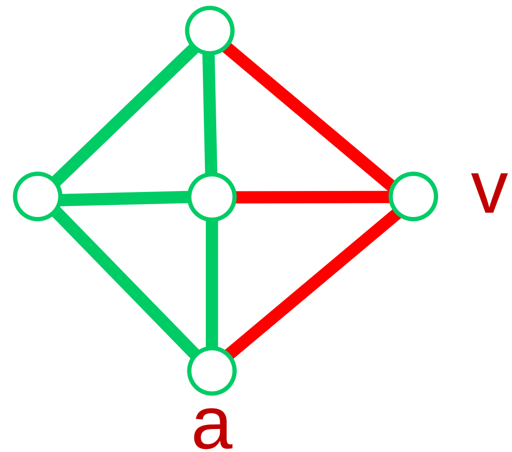


2つの奇数次数部分グラフに分解できるとする。
奇数次数の点に接続している辺は
全部 赤か青 である。

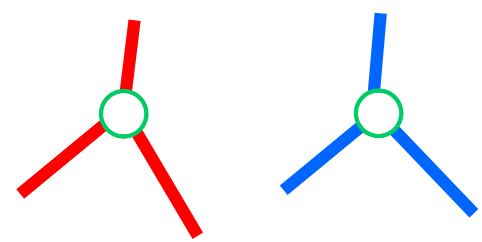


2つの奇次数部分グラフへの分解

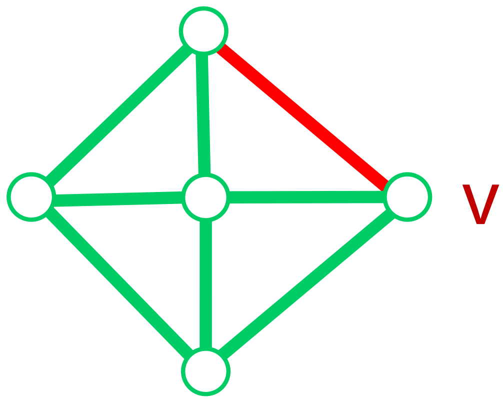


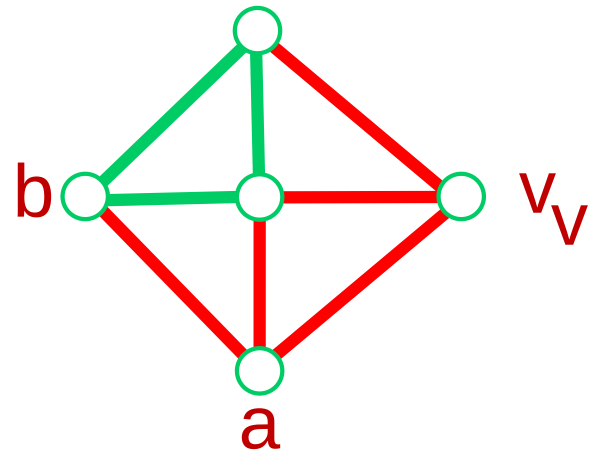


2つの奇数次数部分グラフに分解できるとする。
奇数次数の点に接続している辺は
全部 赤か青 である。



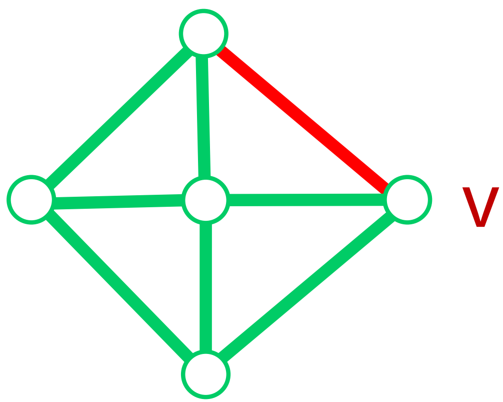
2つの奇次数部分グラフへの分解

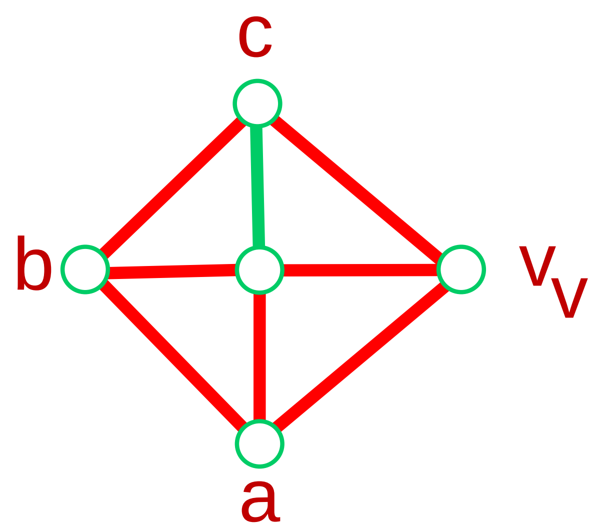




2つの奇数次数部分グラフに分解できるとする。
奇数次数の点に接続している辺は
全部 赤か青 である。

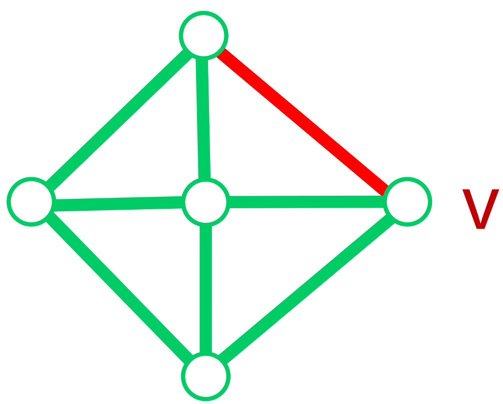
2つの奇次数部分グラフへの分解

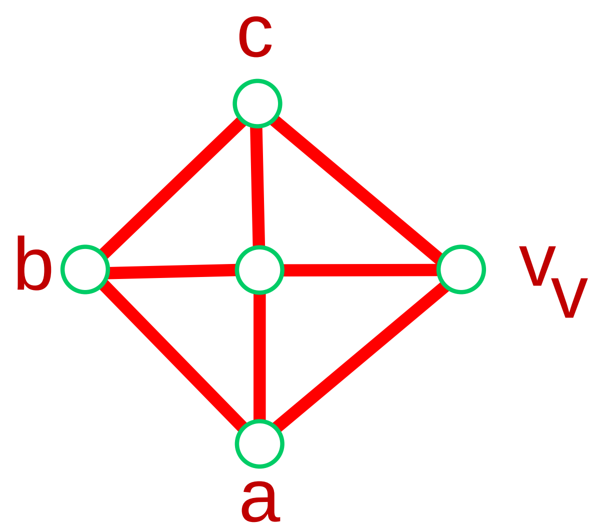




2つの奇数次数部分グラフに分解できるとする。
奇数次数の点に接続している辺は
全部 赤か青 である。

２つの奇次数部分グラフへの分解





全部の辺が赤くなる。しかし、これは中心点の次数が偶数であるので、2つの奇数次数部分グラフに分解できることに反する。

奇次数部分グラフへの分解

定理（Pyber, 1991）偶数位数の連結なグラフは3個の奇次数部分グラフに分解できる。

この定理は後で述べる奇次数因子の定理と先の定理（木は2つの奇次数部分木に分解できる）用いて証明できる

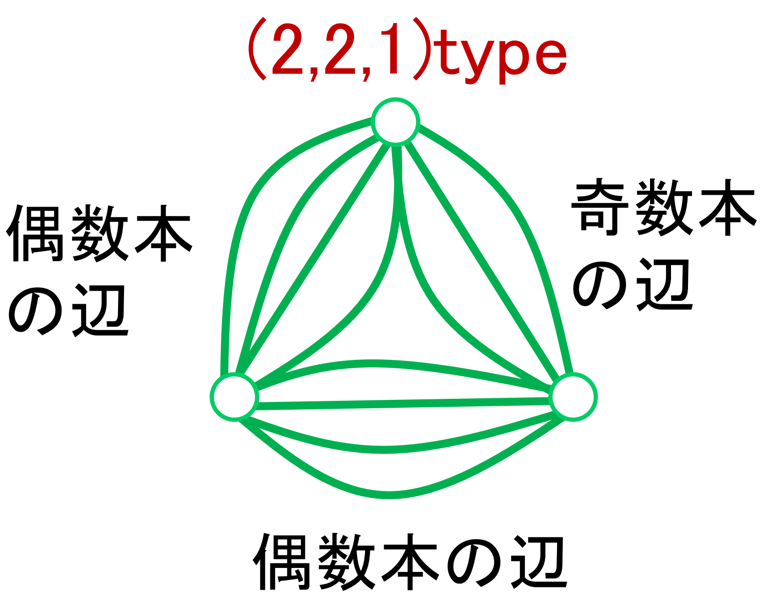
（演習問題とする）

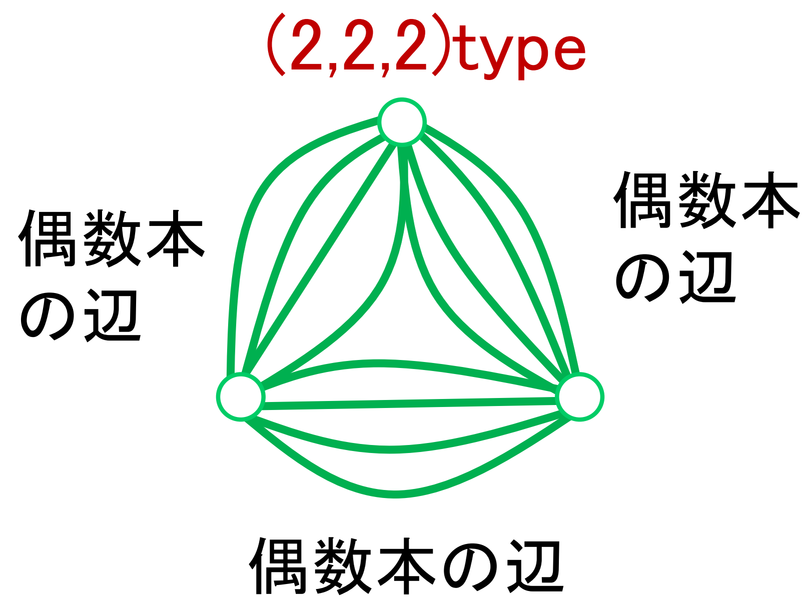
奇次数部分グラフへの分解

定理(Pyber, 1991)　奇数位数の連結な単純グラフは4個の奇次数部分グラフに分解できる。

奇次数部分グラフへの分解

定理(Petrusevski, 2018)　連結なグラフは(2,2,2)typeと(2,2,1)type の Shannon triangle を除いて ４個の奇次数部分グラフに分解できる。





2個の奇次数部分グラフに分解できるグラフの特徴づけ

奇次数部分グラフへの分解

$\langle \mathrm{OddV}(G) \rangle$ = 奇数次数の点から誘導される
G の部分グラフ

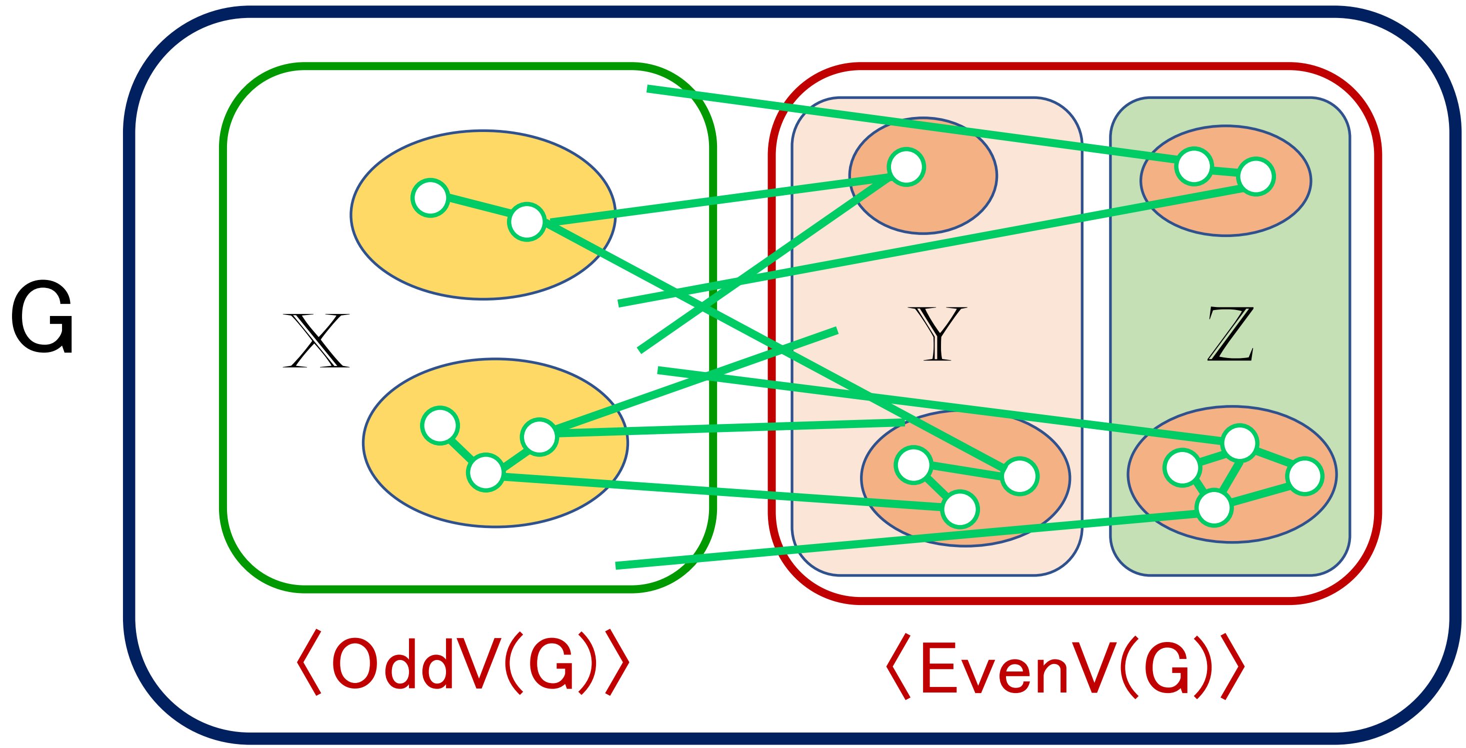
$\langle \mathrm{EvenV}(G) \rangle$ = 偶数次数の点から誘導される
G の部分グラフ

$\mathbb{X} = \langle \mathrm{OddV}(G) \rangle$ の成分の集合

$\mathbb{Y} = \langle \mathrm{EvenV}(G) \rangle$ の奇成分の集合

$\mathbb{Z} = \langle \mathrm{EvenV}(G) \rangle$ の偶成分の集合

奇次数部分グラフへの分解



$\mathbb{X}$= ⟨OddV(G)⟩ の成分の集合

$\mathbb{Y}$=⟨EvenV(G)⟩ の奇成分の集合

$\mathbb{Z}$=⟨EvenV(G)⟩ の偶成分の集合

奇次数部分グラフへの分解

定理(Kano, Katona, Varga, 2018)

連結なグラフGが　2つの奇次数部分グラフに分解できるための必要十分条件は

任意の $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{Y} \cup \mathbb{Z}$ such that $|\mathbb{S} \cap \mathbb{Y}|$=odd

に対して

　　ある $X \in \mathbb{X}$ が存在して　$e_G(X,\mathbb{S})$=odd

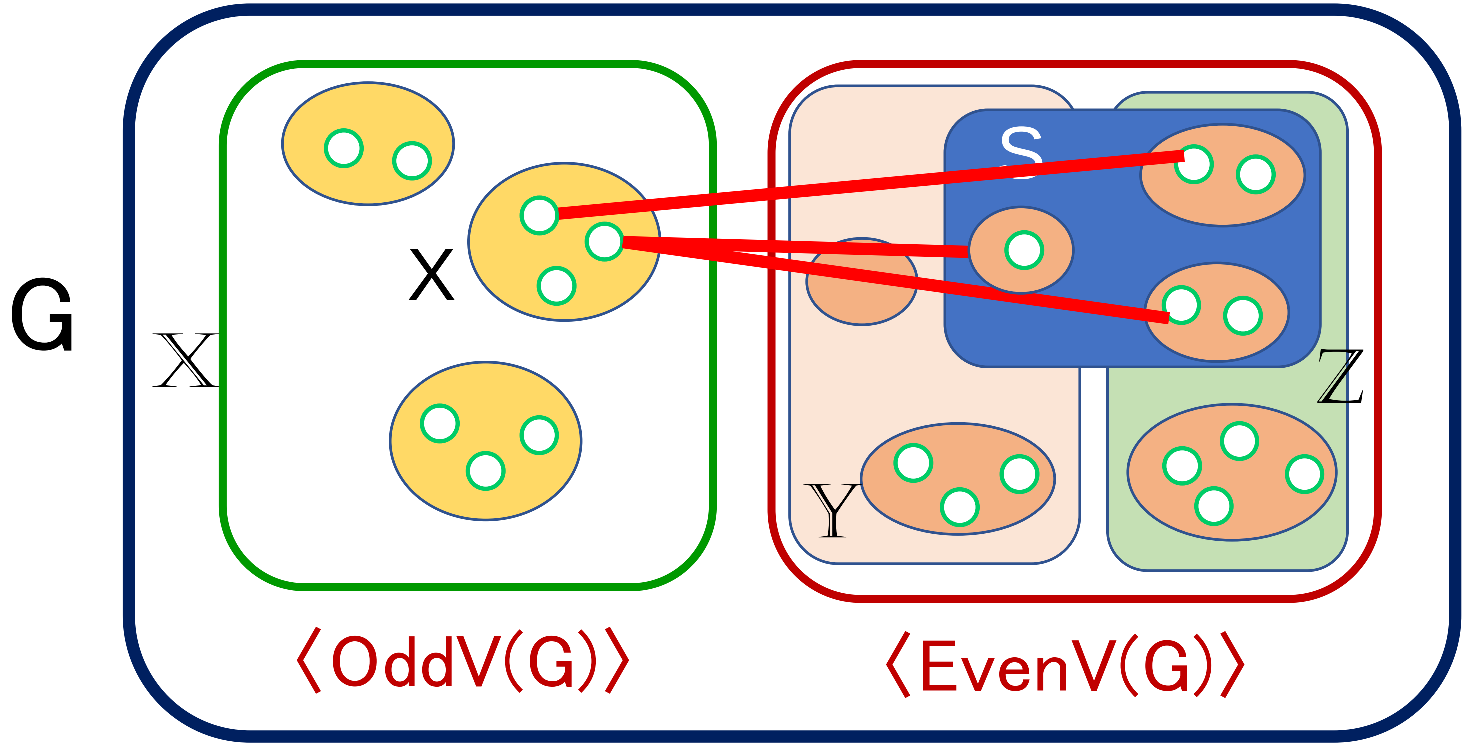
となることである。

$\mathbb{X}$= ⟨OddV(G)⟩ の成分の集合

$\mathbb{Y}$=⟨EvenV(G)⟩ の奇成分の集合

$\mathbb{Z}$=⟨EvenV(G)⟩ の偶成分の集合

奇次数部分グラフへの分解



$\mathbb{S} \subseteq \mathbb{Y} \cup \mathbb{Z}$ such that $|\mathbb{S} \cap \mathbb{Y}|=\mathrm{odd}$ $e_G(X,S)=\mathrm{odd}$

$\mathbb{X}$= ⟨OddV(G)⟩ の成分の集合

$\mathbb{Y}$=⟨EvenV(G)⟩ の奇成分の集合

$\mathbb{Z}$=⟨EvenV(G)⟩ の偶成分の集合

奇次数部分グラフへの分解

定理(Kano, Katona, Varga, 2018)

連結なグラフGが　2つの奇次数部分グラフに分解できるための必要十分条件は

任意の $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{Y} \cup \mathbb{Z}$ such that $|\mathbb{S} \cap \mathbb{Y}|$=odd

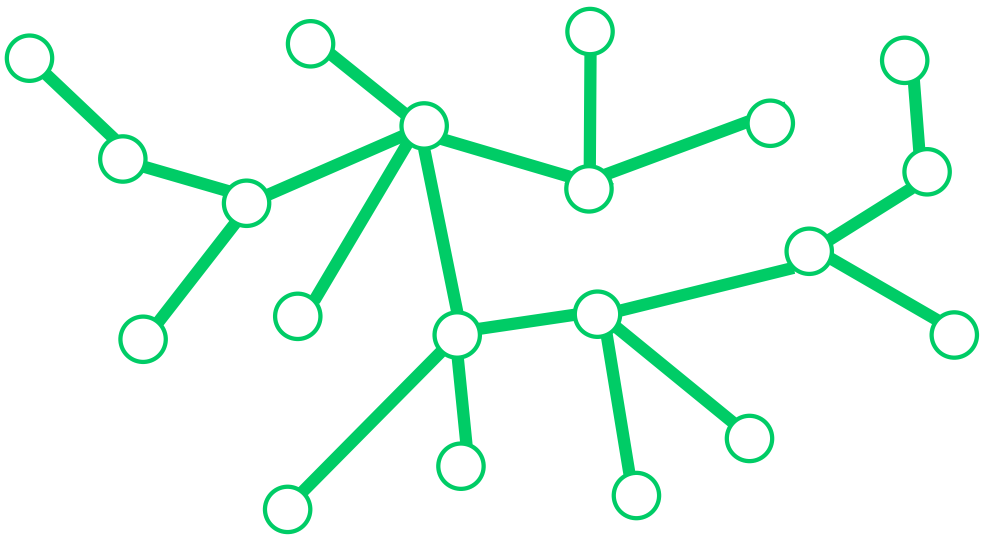
に対して

ある $X \in \mathbb{X}$ が存在して $e_G(X,\mathbb{S})$=odd

となることである。

定理　これを判定する多項式時間アルゴリズムがある

木の奇次数因子



偶数位数の木

奇次数因子F

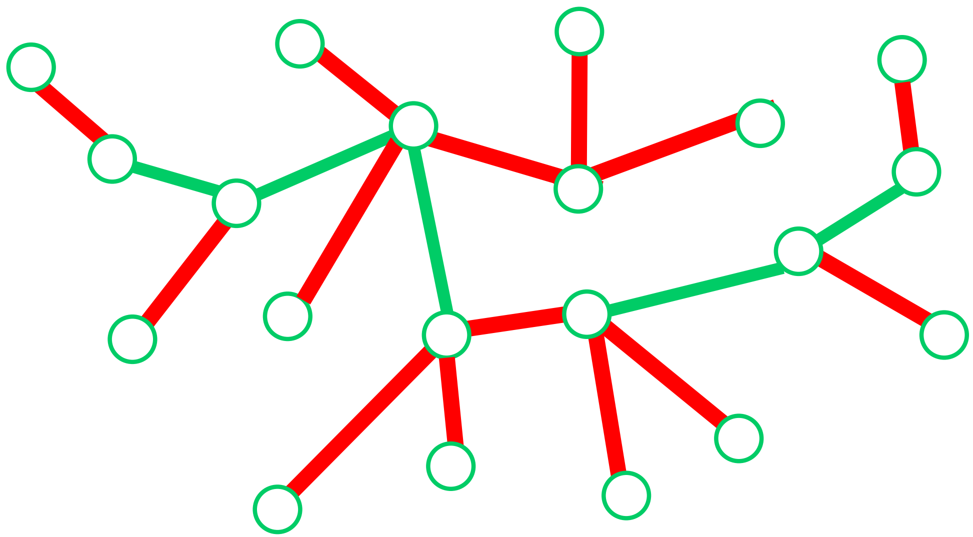
V(F)=V(G)

$\deg_F(v)$=奇数

for all $v \in V(F)$

つまり、
全域部分グラフで
すべての点の
次数が奇数
となっているもの

木の奇次数因子



奇次数因子F = {——}

奇次数因子F

$V(F)=V(G)$

$deg_F(v)=$奇数

for all $v \in V(F)$

つまり、
全域部分グラフで
すべての点の
次数が奇数
となっている

木の奇次数因子

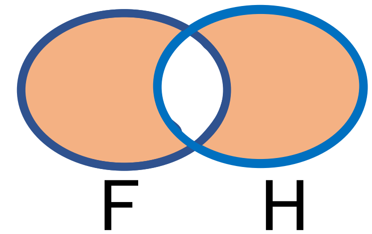
定理:　偶数位数の木には、ただ1つの　奇次数因子　が存在する

存在証明については
ヒントを述べて演習とする

ここでは　一意性を示す

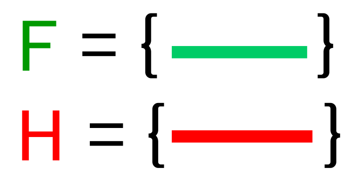
偶数位数の木Tに2つの奇数数因子　F と H が存在すると仮定する。 ここで　$F, H \subseteq E(T)$。

$K = F \triangle H = (F \cup H) - (F \cap H)$　対称差

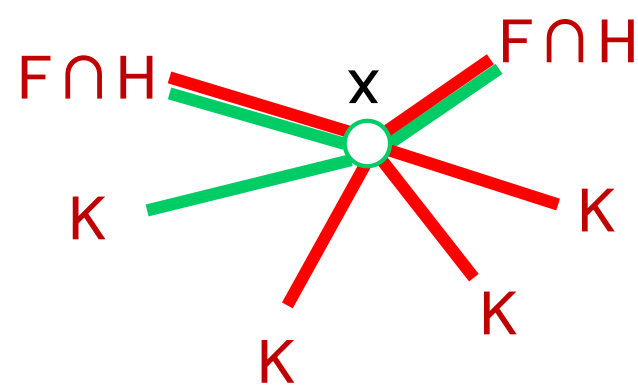


点　$x \in V(T)$　において

$$\deg_K(x) = \deg_F(x) + \deg_H(x) - 2 \cdot \deg_{H \cap K}(x)$$
$$= \text{偶数}$$



もし $F \neq H$ なら　Kにサイクルがあり、
これはTに含まれるので矛盾

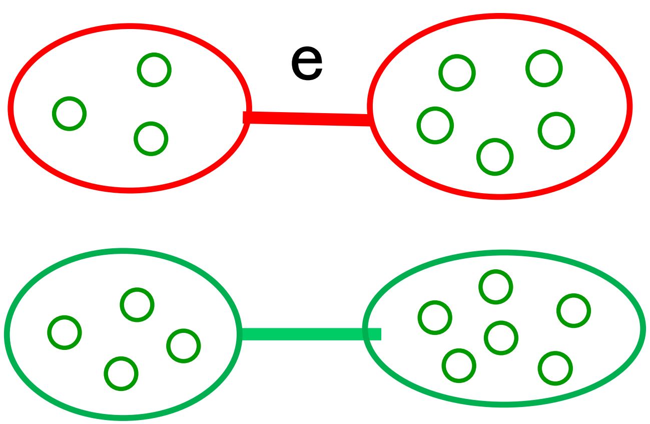


偶数位数の木Tに奇次数因子が存在することの証明のヒント

F = { e∈E(T) : T−e = 2つの奇成分}

F は奇次数因子になる

(T−e は 2つの偶成分か 2つの奇成分 になる)



奇成分 =奇数位数の成分

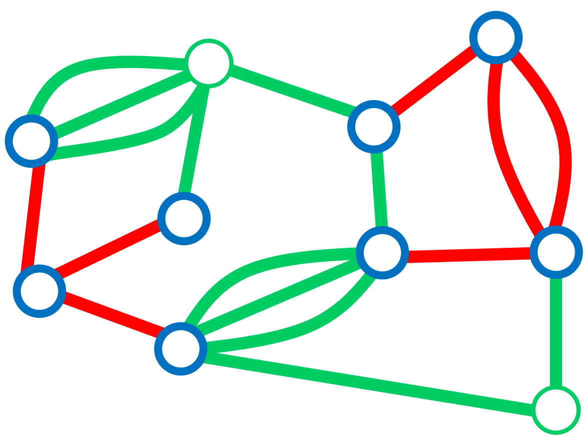
偶成分 =偶数位数の成分

グラフの記号

グラフG の因子 F

⇔ ある条件を満たす全域部分グラフ　F

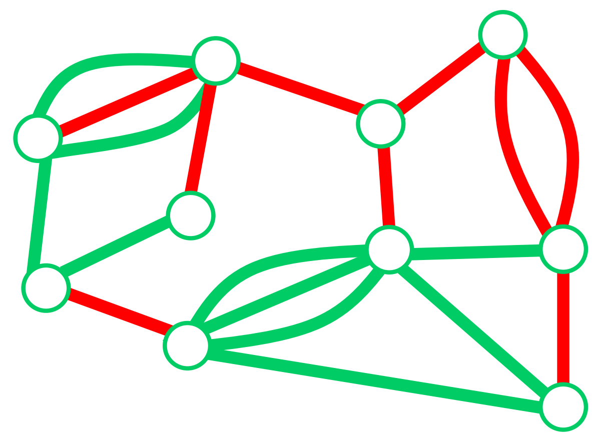
⇔ V(F)=V(G) となる部分グラフである条件を満たす



奇次数部分グラフ H

E(H) = { ━━ }

V(H) = { ○ }

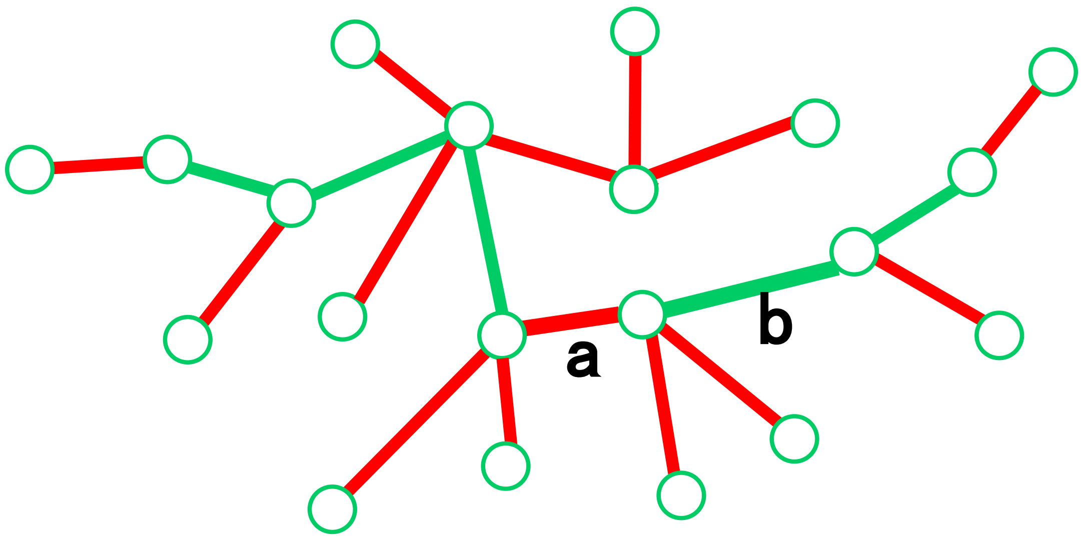


奇次数因子 F

E(F) = { ━━ }

Fの点の次数は奇数

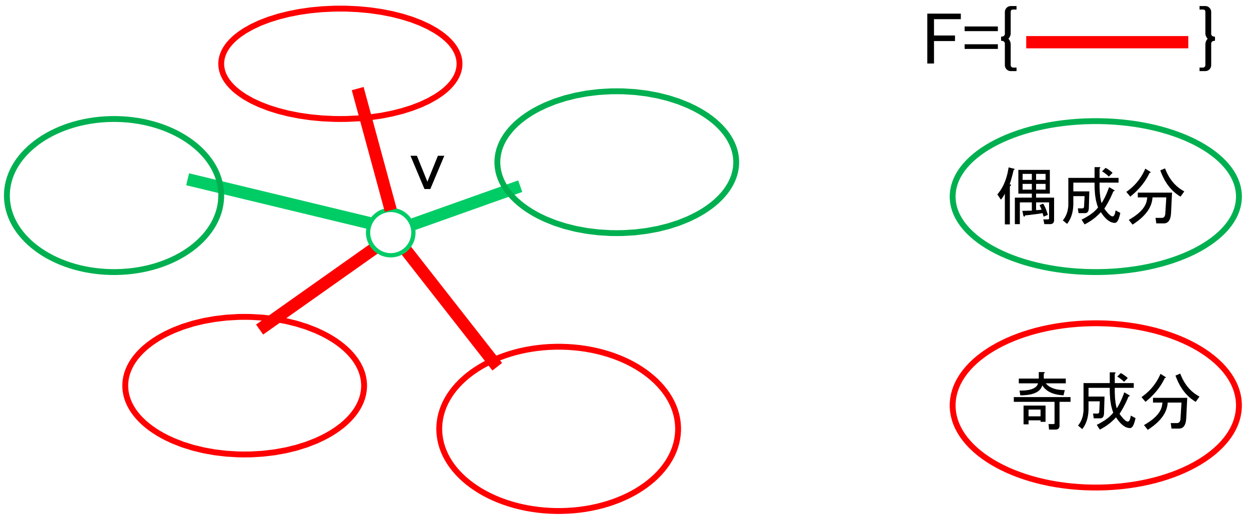
木の奇次数因子



T−a ＝ 2つの奇数分　T−b ＝ 2つの偶成分

$F = \{ e \in E(T) \mid T - e = $ 2つの奇成分$\}$

F が奇次数因子になることを示せ（演習問題）



ヒントの図

奇次数部分グラフへの分解

定理（Pyber, 1991）偶数位数の連結なグラフは
３個の奇次数部分グラフに分解できる。

この定理は後で述べる奇次数因子の定理と先の
定理（木は2つの奇次数部分木に分解できる）
用いて証明できる(演習問題）

グラフの奇次数因子

ヒント

偶数位数の連結グラフGには
偶数位数の全域木Tがある

偶数位数の木には奇次数因子が存在するから
Gには奇次数因子が存在する。

極大な奇数因子をFとすると G−F は林になる。

ご視聴 ありがとうございます