グラフ理論における偶奇性に関連する現象（2回目の講義）

加納　幹雄（Mikio Kano）
茨城大学　名誉教授

講義の　概略

1回目　入門的な話
証明の多くを演習問題とします

2回目　マッチングと1-因子の一般化
に関連する話

3回目　因子＝ある条件を満たす全域部分グラフ
最近の因子理論のなかで
偶奇性に関連するものの紹介

グラフの記号

G : **連結グラフ**;　　V(G) = Gの点集合;

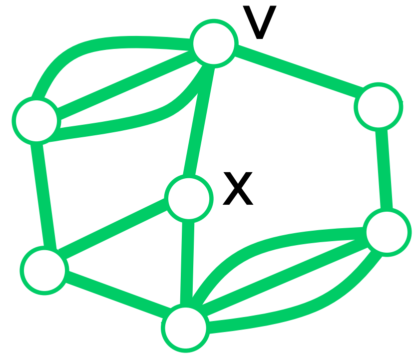
E(G) = Gの辺集合;　　|G| = |V(G)| = G の位数

G の部分グラフ H において

$\deg_H(v)$ = 点v の H における次数

= v に接続するHの辺の数

Gの位数
=|G|=7



$\deg_G(v)=5$

$\deg_G(x)=3$

グラフ G（多重グラフともいう）

グラフの記号

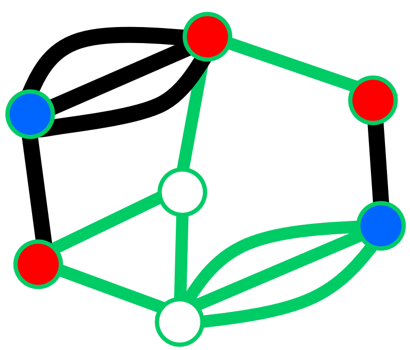
$X, Y \subset V(G)$, $X \cap Y = \Phi$　対して

$E_G(X,Y) =$ Xの点とYの点を結ぶGの辺の集合

$= \{ xy \in E(G) : x \in X,\ y \in Y \}$

$e_G(X,Y) =$ Xの点とYの点を結ぶGの辺の個数

$= |E_G(X,Y)|$



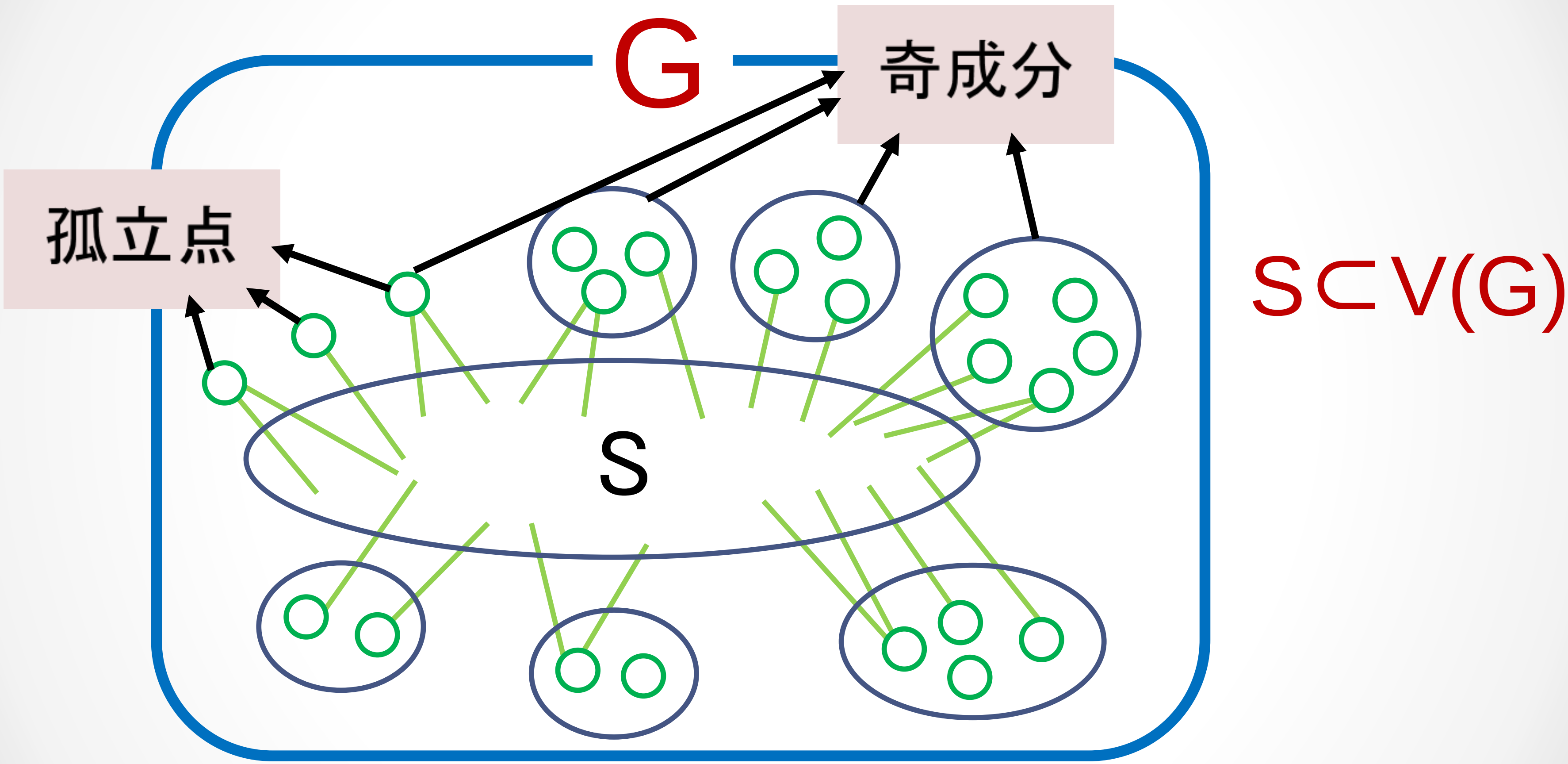
グラフ G（多重グラフ）

X={ ● }, Y={ ● }

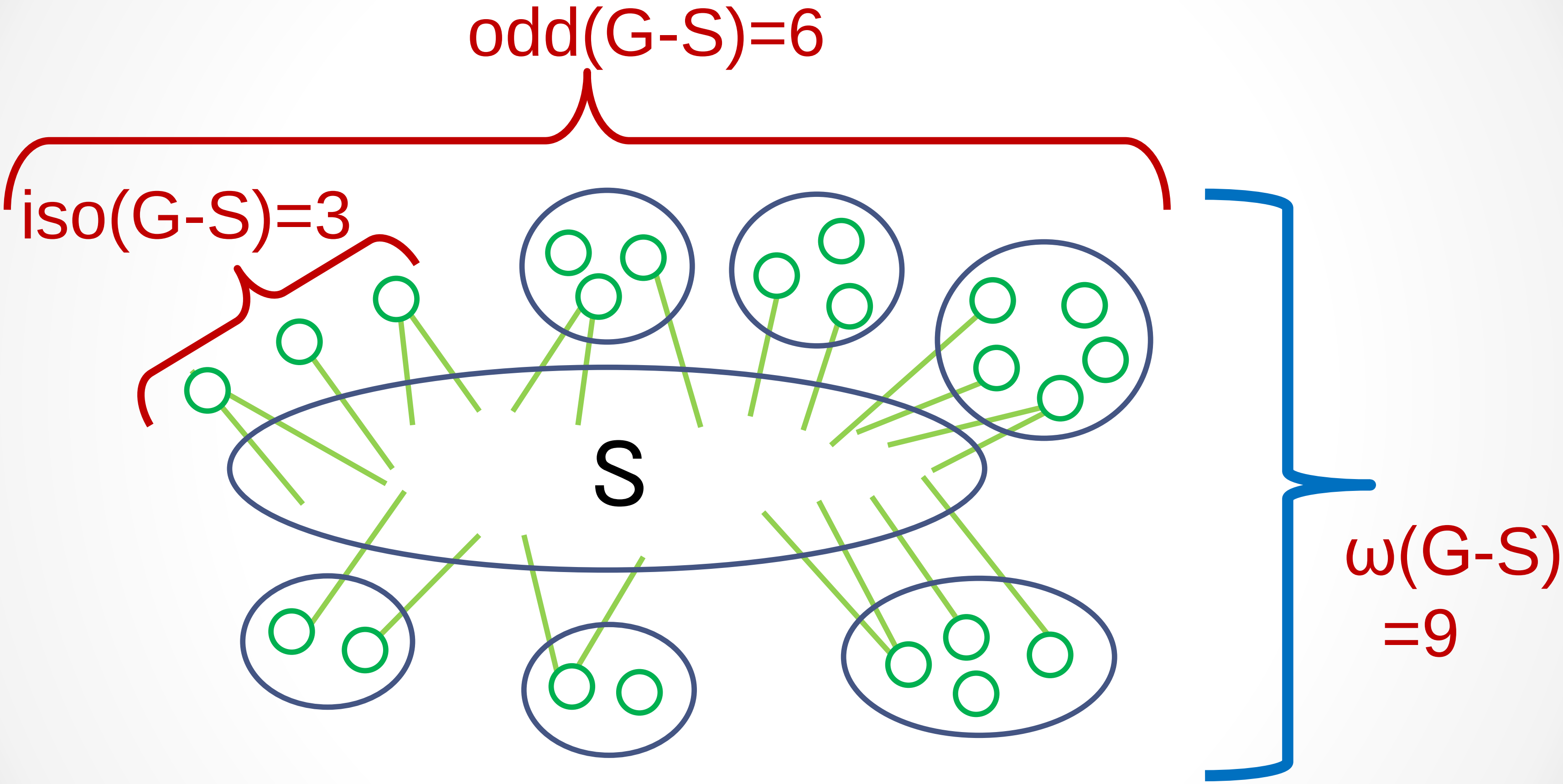
$E_G(X,Y) = \{$ — $\}$

$e_G(X,Y) = 5$

連結グラフG と G-Sの成分



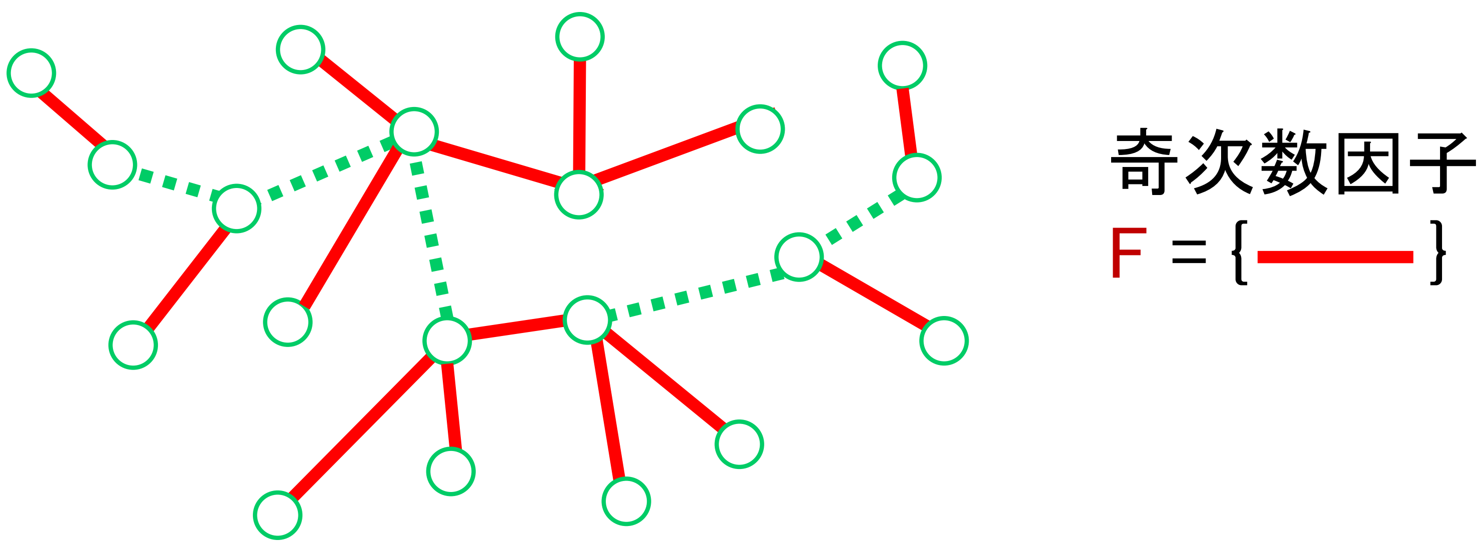
連結グラフG と G-Sの成分



iso(G-S) = 孤立点の数　　odd(G-S) = 奇成分の数
ω(G-S) = 成分数

木の奇次数因子

定理:　偶数位数の木には、ただ1つの奇次数因子　が存在する

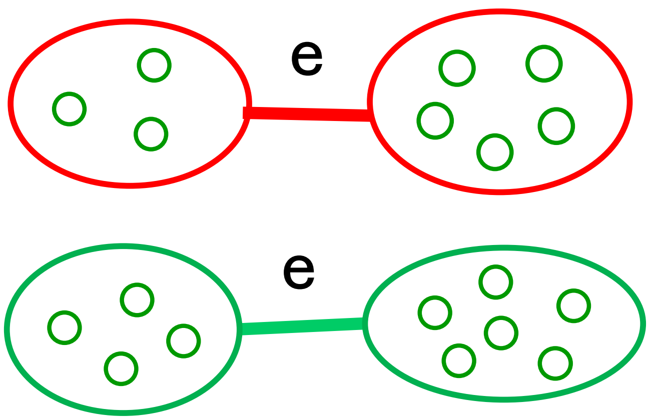


偶数位数の木Tに奇次数因子が存在することの証明のヒント

F = { e∈E(T) | T−e = 2つの奇成分}

F は奇次数因子になる

(T−e は 2つの偶成分か 2つの奇成分 からなる)

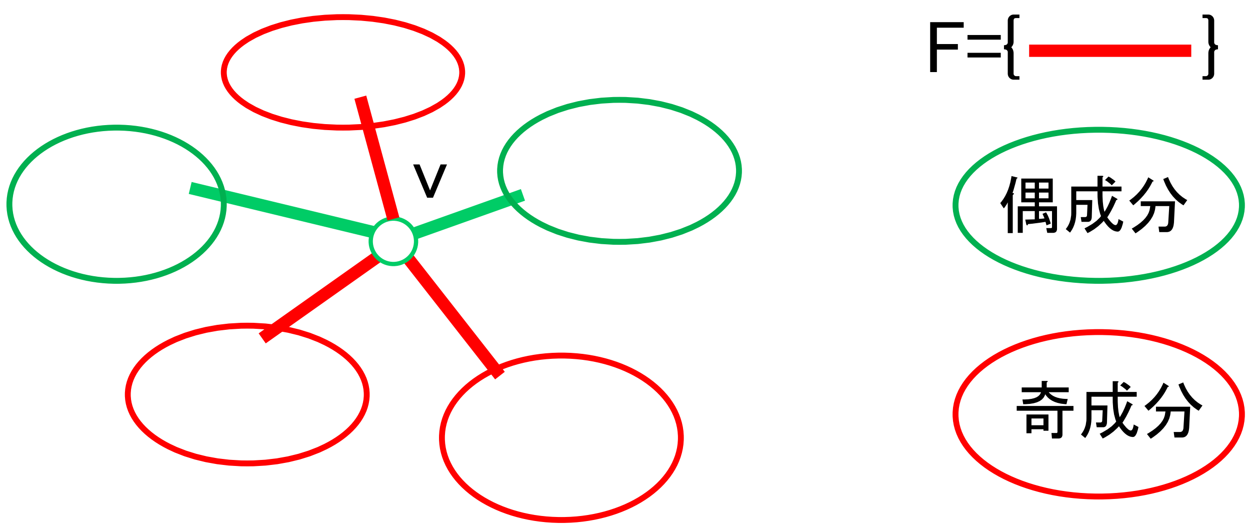


奇成分 =奇数位数の成分

偶成分 =偶数位数の成分

$F = \{ e \in E(T) \mid T-e = 2$つの奇成分$\}$

F が奇次数因子になることを示せ（演習問題）



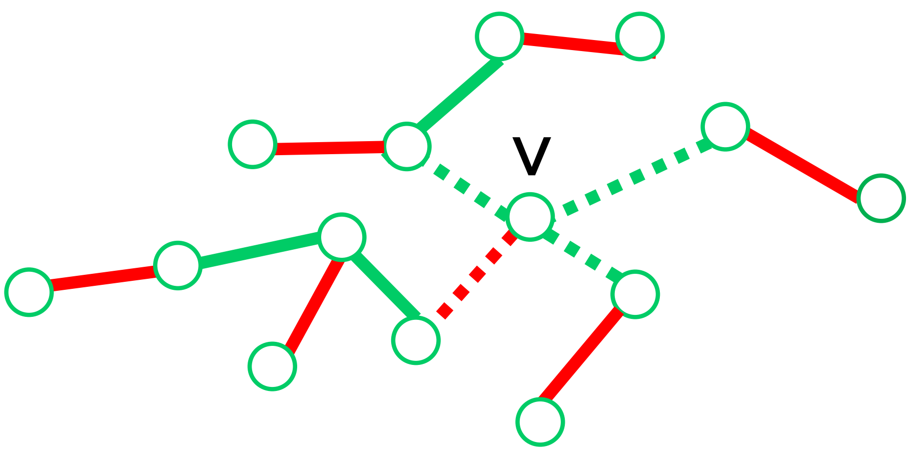
ヒントの図

木の1-因子定理

定理: 偶数位数の木に1-因子が存在するための必要十分条件は

$$\mathrm{odd}(T-v) \leqq 1 \qquad \text{for all } v \in V(T)$$

である



odd(T−v)
= T−v の
奇成分の数

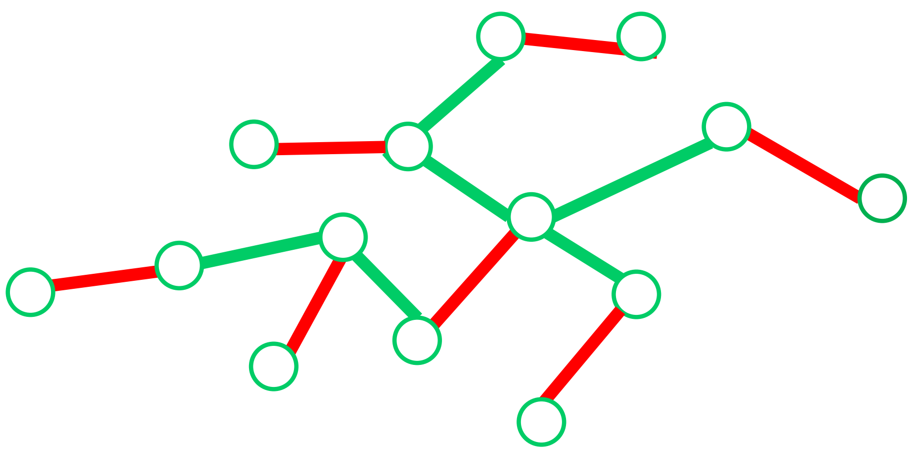
T−v の奇成分は1つ

木の1-因子定理

定理: 偶数位数の木に1-因子が存在するための必要十分条件は

$$\mathrm{odd}(T-v) \leqq 1 \qquad \text{for all } v \in V(T)$$

である



odd(T−v)
= T−v の
奇成分の数

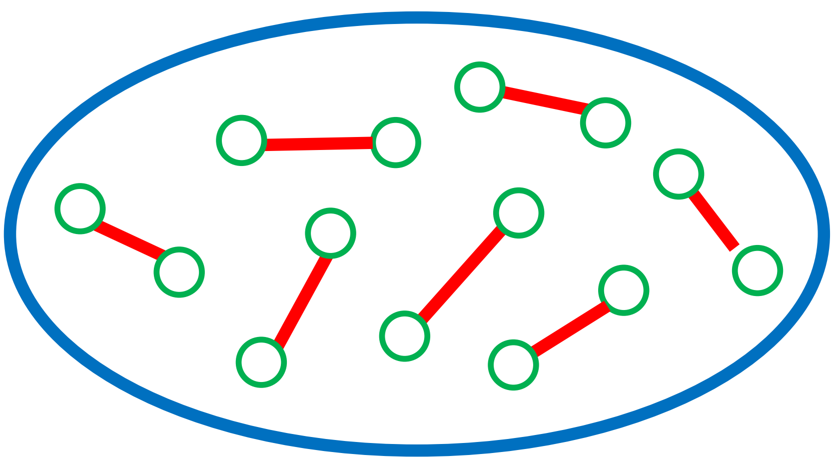
木Tの1-因子 (完全マッチング ともいう)

グラフの1-因子定理

定理:　偶数位数のGに1-因子が存在するための必要十分条件は

$$\mathrm{odd}(G-S) \leqq |S| \quad \text{for all } S \subseteq V(G)$$

である



odd(G−S)
= G−S の
奇成分の数

グラフ Gの1-因子 {―} (= 完全マッチング)

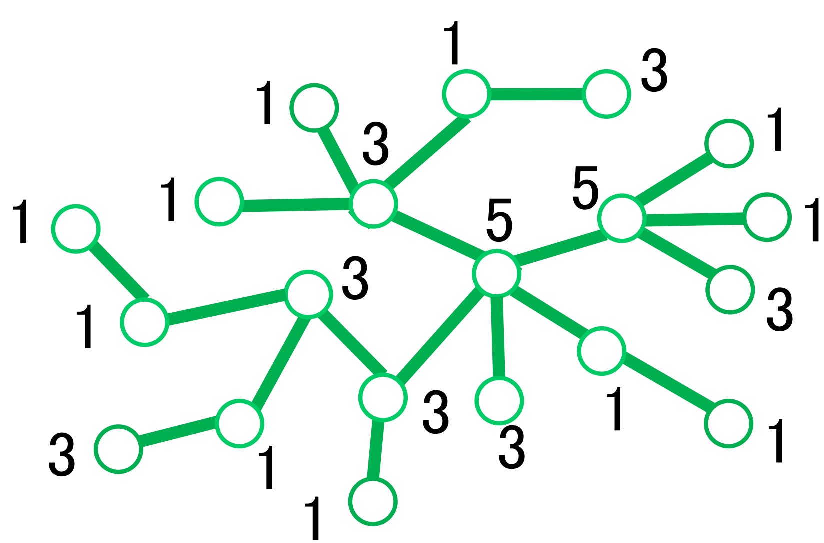
木の (1,f)−奇次数因子

T : 偶数位数の木　　　　F: 全域部分グラフ

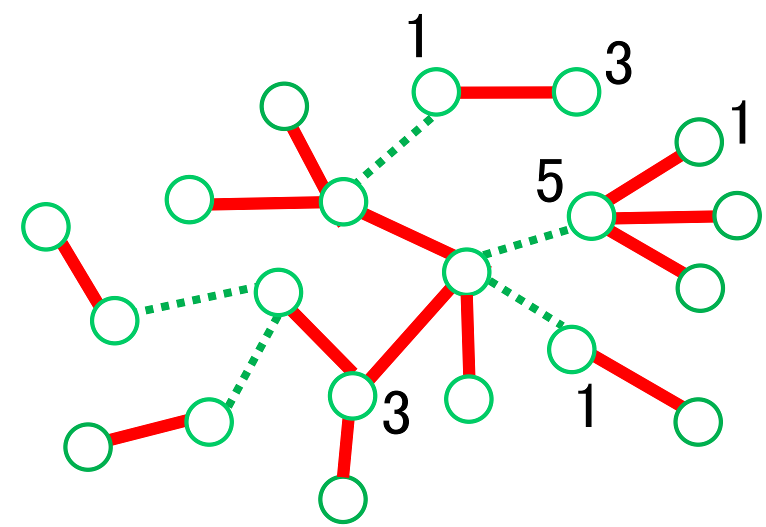
f : V(T) → {1,3,5, ⋯}

F は T の (1,f)−奇次数因子 である

$\deg_F(v) \in \{1,3, \cdots, f(v)\}$ for all $v \in V(T)$.



木T と f(v)



(1,f)−奇次数因子={ — }

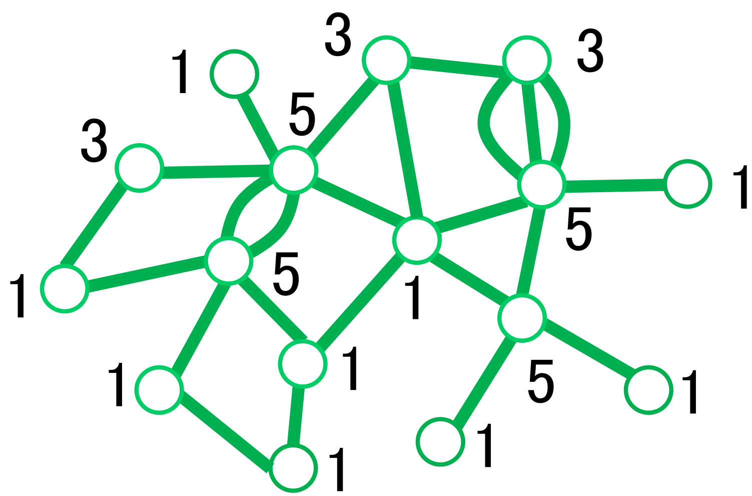
グラフの (1,f)–奇次数因子

G : 偶数位数のグラフ　　F: 全域部分グラフ

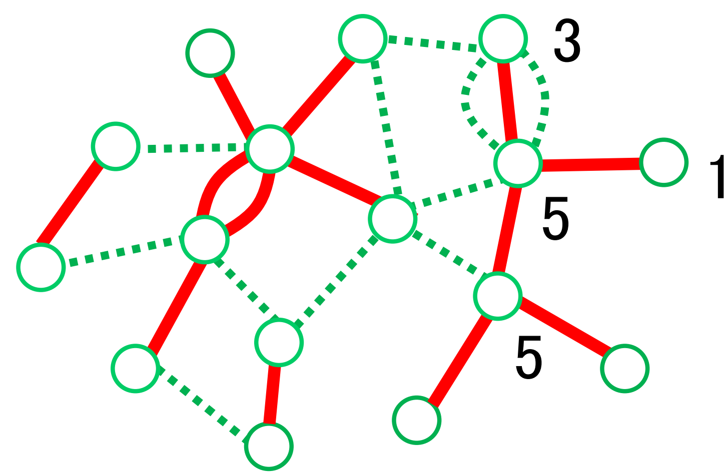
f : V(G) → {1,3,5, ⋯}

FはGの (1,f)–奇次数因子 である

$\deg_F(v) \in \{1,3, \cdots, f(v)\}$ for all $v \in V(G)$.



グラフG と f(v)



(1,f)–奇次数因子

木の(1,f)-奇次数因子

定理: 偶数位数の木に(1,f)-奇次数因子が存在するための必要十分条件は

$$\mathrm{odd}(T-v) \leqq f(v) \qquad \text{for all } v \in V(T)$$

である

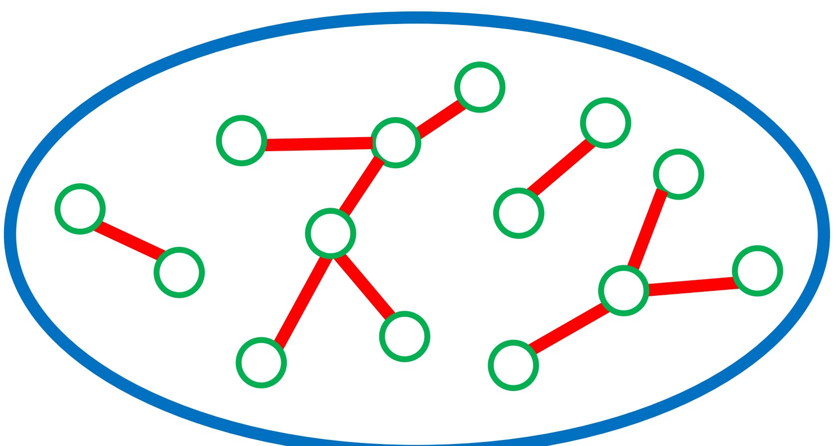
$\mathrm{odd}(T-v)$ = $T-v$ の奇成分の数

グラフの(1,f)-奇次数因子定理

定理: 偶数位数のグラフGに(1,f)-奇次数因子が存在するための必要十分条件は

$$\mathrm{odd}(G-S) \leqq \sum_{x\in S} f(x) \quad \text{for all } S\subseteq V(G)$$

である



odd(G−S)
= G−S の
奇成分の数

グラフ Gの(1,f)-奇次数因子 {—}

1−因子と(1,f)−奇次数因子の歴史

- 1−因子定理　W.T. Tutte (1947)

- [1,n]−奇次数因子定理 A. Amahasi (1985)　n=奇数
  [1,n]−奇数次数因子 ⇔ $deg_F(v) \in \{1,3,\cdots,n\}$

- (1,f)−奇次数因子定理 Y. Cui and M. Kano (1988)

この論文は　J. Graph Theory 12 (1988)　著者名は
　Cui Yuting and Mikio Kano として発表したため、混乱あり
(当時、彼の大学では「氏名の順」に名前を書くが指示されていた)

1-因子　と　奇次数因子

木 T に 1-因子 が存在するための

必要十分条件は

$$\mathrm{odd}(T-v) \leqq 1 \qquad \text{for all} \quad v \in V(T)$$

木 T に (1,f)-奇次数因子 が存在するための

必要十分条件は

$$\mathrm{odd}(G-v) \leqq f(v) \qquad \text{for all} \quad v \in V(T)$$

1-因子 と 奇次数因子

グラフG に 1-因子 が存在するための
必要十分条件は

odd(G−S) ≦ |S|　　　　for all　S⊆V(G)

グラフG に (1,f)-奇次数因子 が存在するための
必要十分条件は

odd(G−S) ≦ $\sum_{x \in S} f(x)$　　for all　S⊆V(G)

1-因子　と　奇次数因子

定理 グラフGに (1,f)-奇次数因子が存在するための必要十分条件は

$$\mathrm{odd}(G-S) \leqq \sum_{x \in S} f(x) \quad \text{for all } S \subseteq V(G)$$

$f(S) := \sum_{x \in S} f(x)$ と略記する。 すると

$$\mathrm{odd}(G-S) \leqq f(S) \quad \text{for all } S \subseteq V(G)$$

1−因子＋マッチング理論の拡張

マッチング と 1−因子については

L. Lovas + M. Pummer　著

「Matching Theory」　1986年　約 500 ページ

この本の主要な結果を

(1,f)−奇次数因子　＋　(1,f)−奇次数部分グラフ

に拡張できないか　と考えた

グラフGに 1−**因子** が存在するための
必要十分条件は

$$\mathrm{odd}(G-S) \leqq |S| \qquad \text{for all } S \subset V(G)$$

グラフGに (1,f)−**奇次数因子** が存在するための
必要十分条件は

$$\mathrm{odd}(G-S) \leqq f(S) \qquad \text{for all } S \subset V(G),$$

ここで

$$f: V(G) \to \{1,3,5,7,\cdots\}.$$

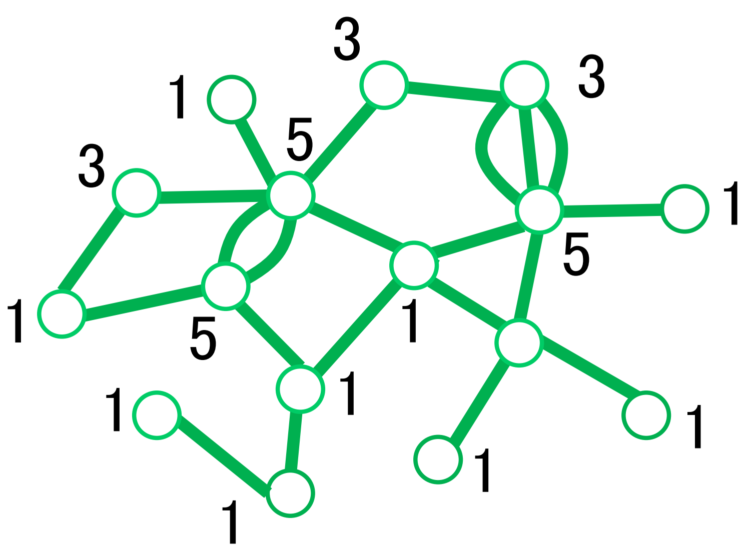
(1,f)−奇次数部分グラフ

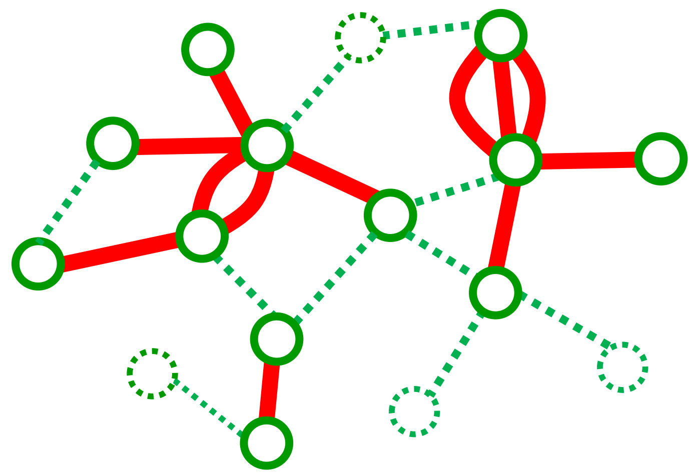
f:V(G)→ {1,3,5, ･･･}　　f は常この関数を表す

H は G の (1,f)−奇次数部分グラフ である

⇔

$\deg_H(v) \in \{1,3,\cdots, f(v)\}$　for all $v \in V(H)$





(1,f)−奇次数部分グラフ

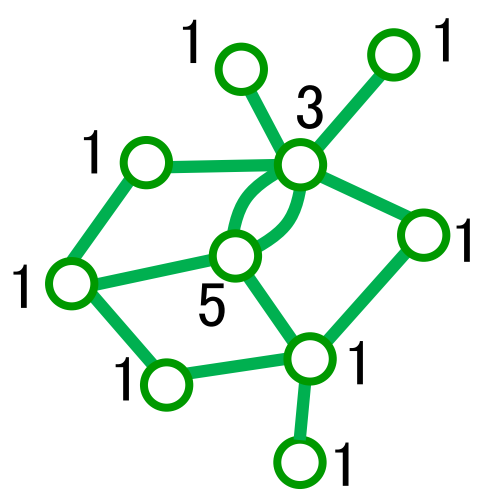
(1,f)−奇次数部分グラフ

f:V(G)→ {1,3,5, …}

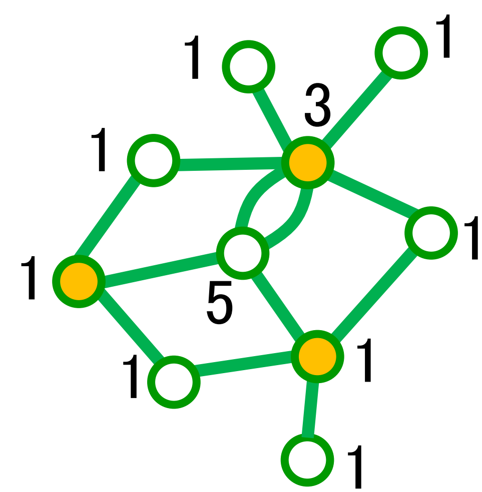
H は G の 最大(1,f)−奇次数部分グラフ である

⇔

|H| < |K| となる(1,f)−奇次数部分グラフK はない



グラフGと f(v)



S={●}　odd(G−S)=7

f(S)=5　(1,f)−奇次数因子はない

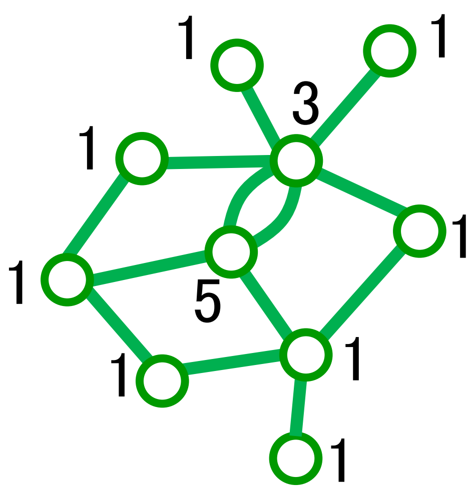
(1,f)-奇次数部分グラフ

$f: V(G) \rightarrow \{1,3,5,\cdots\}$

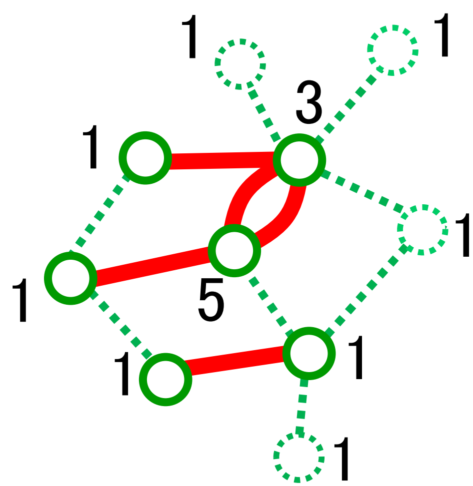
H は G の 最大(1,f)-奇次数部分グラフ である

⇔

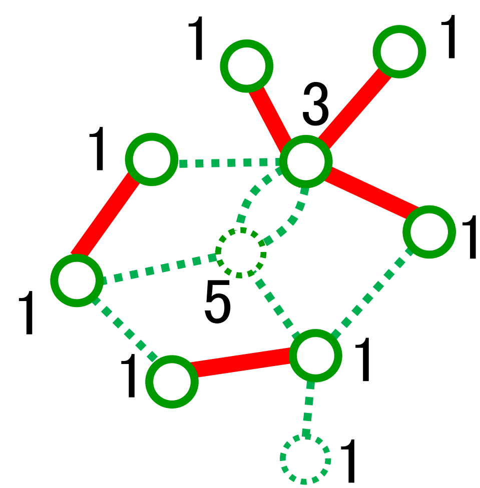
|H| < |K| となる(1,f)-奇次数部分グラフK はない



グラフGと f(v)



(1,f)-奇次数部分グラフ



最大(1,f)-奇次数部分グラフ

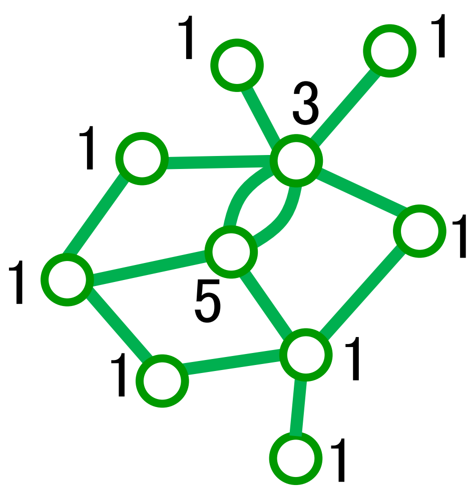
(1,f)−奇次数部分グラフ

f:V(G)→ {1,3,5, ⋯}

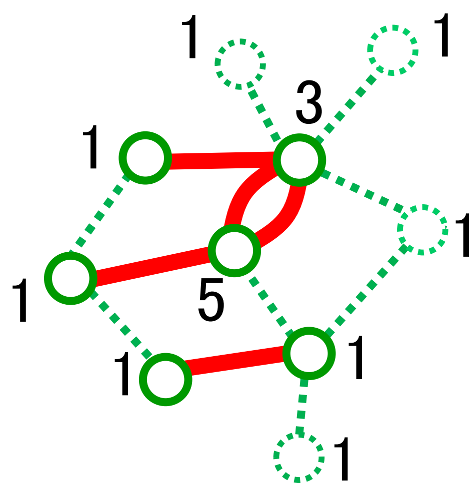
H は G の 極大(1,f)−奇次数部分グラフ である

⇔

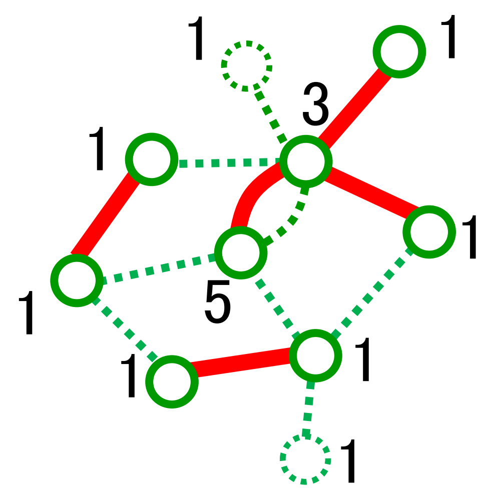
V(H)⊂V(K) となる(1,f)−奇次数部分グラフK はない



グラフGと f(v)



(1,f)−奇次数
部分グラフH



V(H)⊂V(K)となる
(1,f)−奇次数部分グラフK

最大マッチングの位数

定理(Berge 1958) グラフG の最大マッチングM の位数 |M|=|V(M)| は

$$|M| = |G| - \max_{S \subseteq V(G)} \{odd(G-S) - |S|\}$$

もし odd(G−S) ≦ |S| for all S⊆V(G) なら

|M| = |G| となる

最大(1,f)-奇次数部分グラフの位数

$f : V(G) \to \{1,3,5,\cdots\}$

定理(Kano, Katona 2002) グラフG の最大(1,f)-奇次数部分グラフのHの位数 は

$$|H| = |G| - \max_{S \subseteq V(G)} \{odd(G-S) - f(S)\}$$

もし $odd(G-S) \leqq f(S)$ for all $S \subseteq V(G)$ なら

$|H| = |G|$ となる

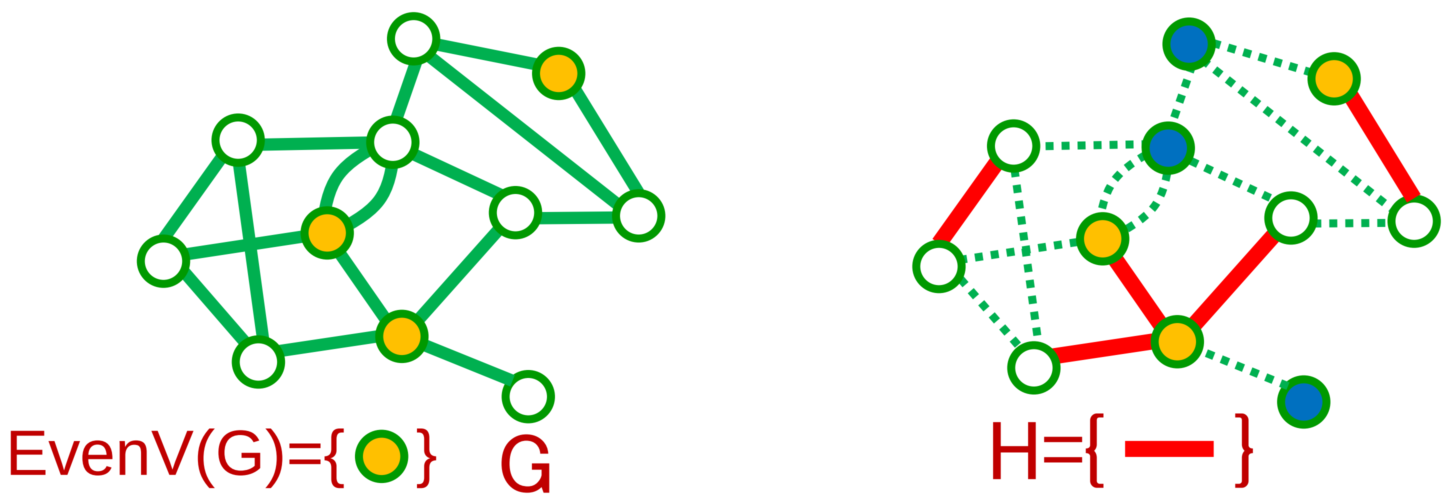
最大(1,f)-奇次数部分グラフの位数

前の定理の証明では次の事実が重要である。
これに気付くのに多くの時間がかかった。

補題　連結グラフGには

$$|H| = |G| - |EvenV(G)|$$

となる奇次数部分グラフHが存在する



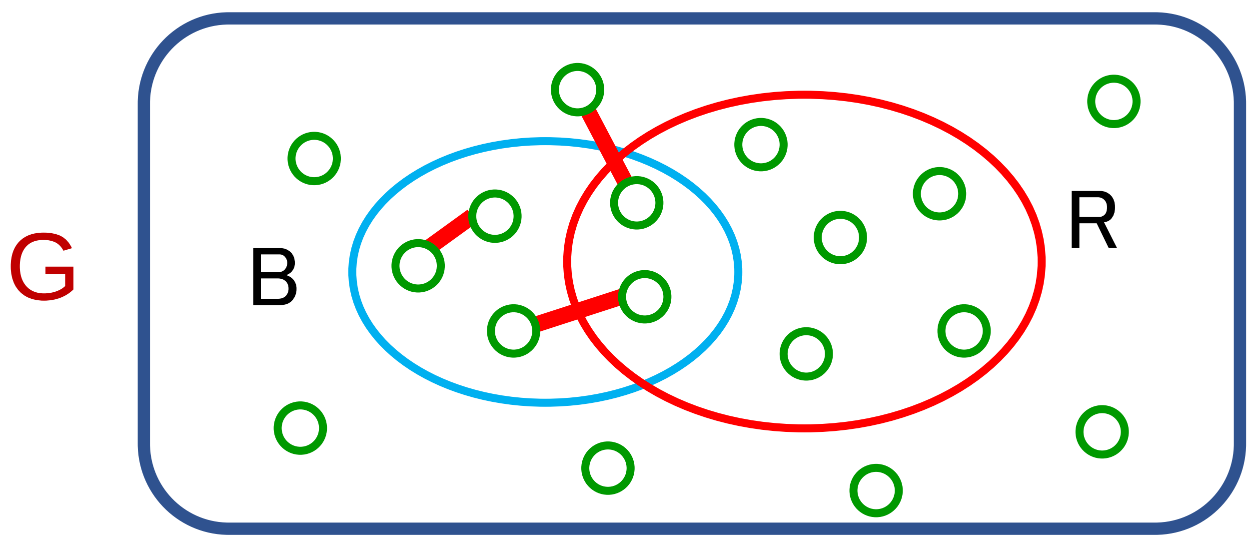
前述の補題の証明を演習問題とします

（証明せよと言われれば、難しくない。
　いくつかの証明がある）

マッチングの性質（1）

マッチングを考えるときはグラフは単純グラフとする

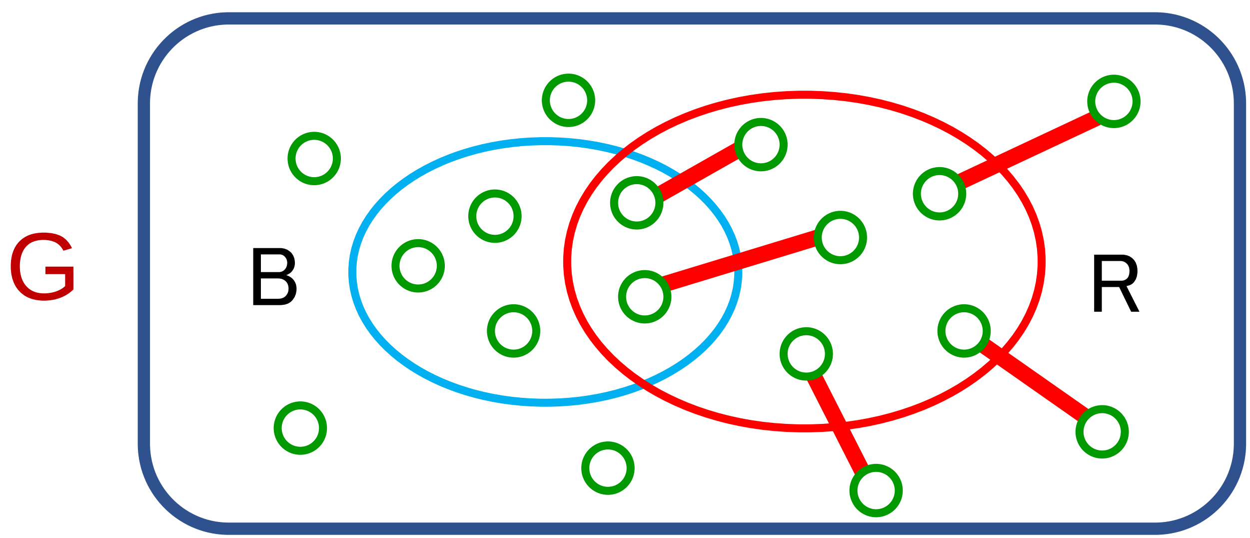
定理　グラフG の2つ点集合BとR, |B|<|R| がある
B をcoverするマッチングと
R をcoverするマッチングがある。
すると　Bをcover し R−B の少なくとも1点を
cover するマッチングが存在する。



マッチングの性質(1)

マッチングを考えるときはグラフは単純グラフとする

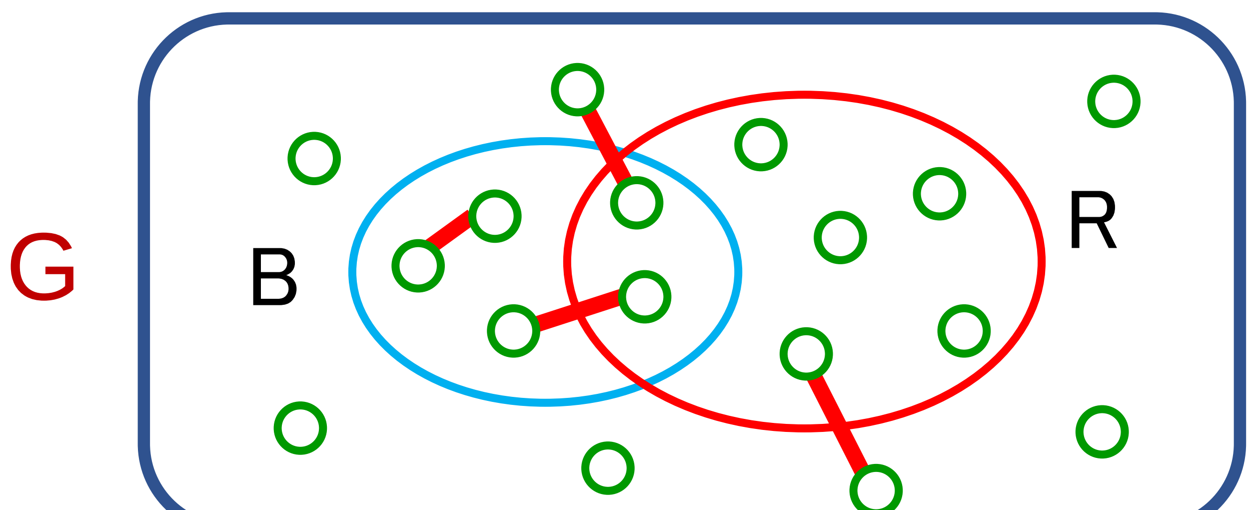
定理 グラフG の2つ点集合BとR, $|B|<|R|$ がある
B をcoverするマッチングと
R をcoverするマッチングがある。
すると BをcoverしR−B の少なくとも1点を
cover するマッチングが存在する。



マッチングの性質(1)

マッチングを考えるときはグラフは単純グラフとする

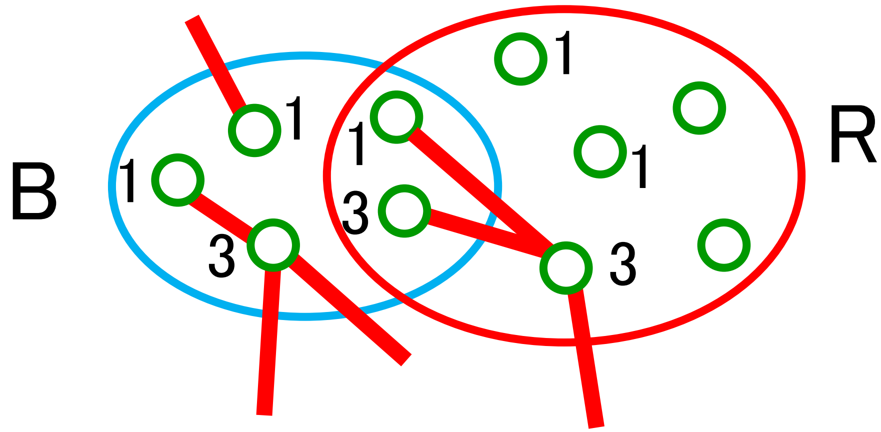
定理　グラフG の2つ点集合BとR, |B|<|R| がある
B をcoverするマッチングと
R をcoverするマッチングがある。
すると　Bをcover し R−B の少なくとも1点を
cover するマッチングが存在する。



(1,f)-奇次数部分グラフの性質(1)

f:V(G)→ {1,3,5, ･･･}

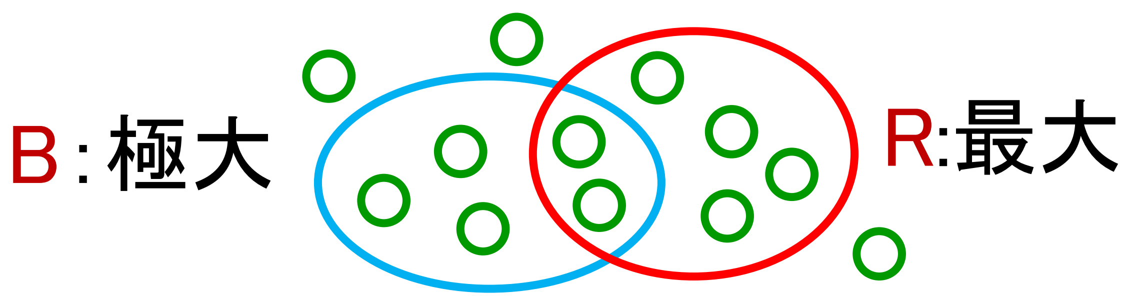
定理　単純グラフG の2つ点集合 BとR, |B|<|R|.
B を被覆する(1,f)-奇次数部分グラフと
R を被覆する(1,f)-奇次数部分グラフがある。
すると　Bを被覆し R＼B の少なくとも1 点を
被覆する(1,f)-奇次数部分グラフが存在する。



(1,f)-奇次数部分グラフの性質(1)

定理　特に、
極大(1,f)-奇次数部分グラフは
最大(1,f)-奇次数部分グラフである。

ある極大な(1,f)-奇次数部分グラフBが
最大(1,f)-奇次数部分グラフでないとする。すると



もし |B|<|R| ならBを被覆し、R＼Bの1点以上を被覆
する(1,f)-奇次数部分グラフがあり、矛盾。

(1,f)-奇次数部分グラフの性質(1)

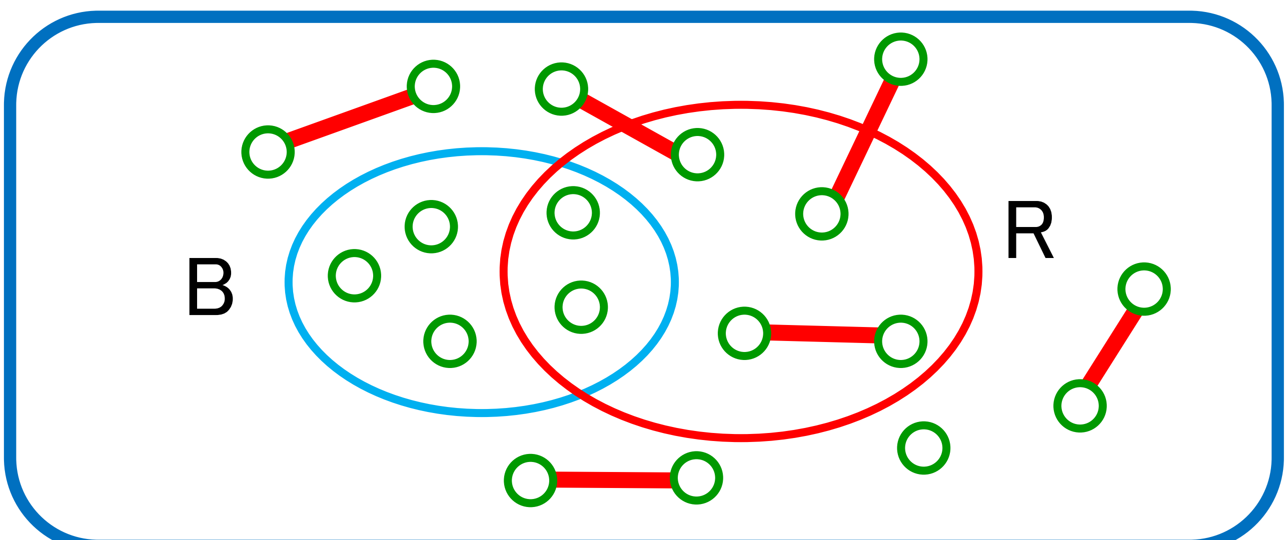
f:V(G)→ {1,3,5, ･･･}

定理　特に、
極大(1,f)-奇次数部分グラフは
最大(1,f)-奇次数部分グラフである。

前の定理の知られている証明は難しい。
マッチングの場合の数倍長い。

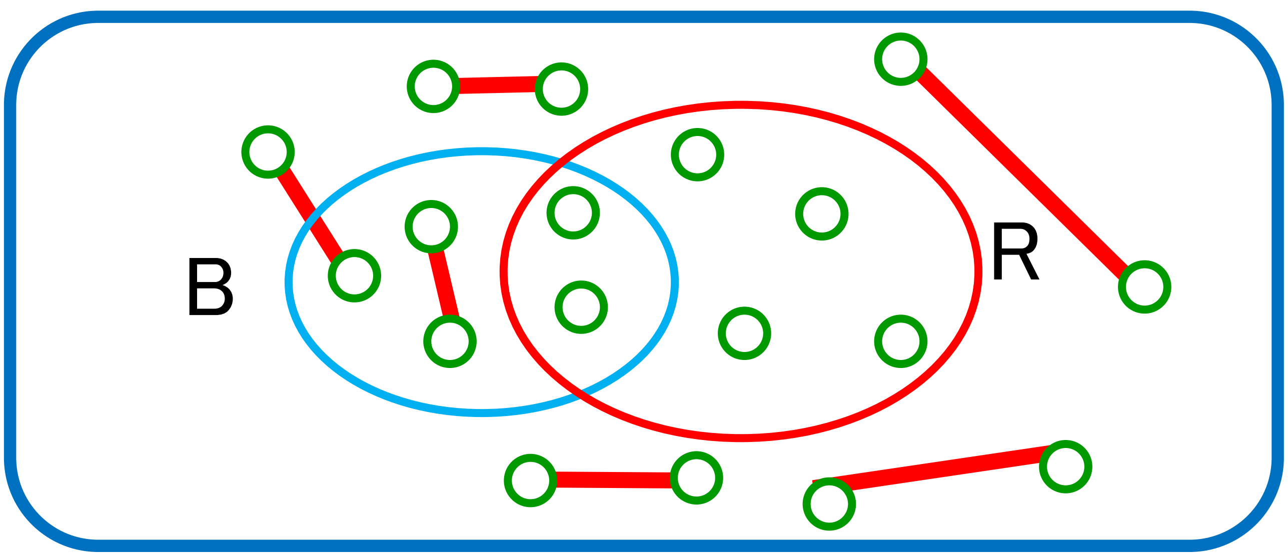
マッチングの性質(2)

定理　グラフG の2つ点集合 BとR, |B|<|R|.
B の点を**含まない**最大マッチングと
R の点を**含まない**最大マッチングがある。
すると　Bの**含まず** R−B の少なくとも1点を
含まない最大マッチングが存在する。



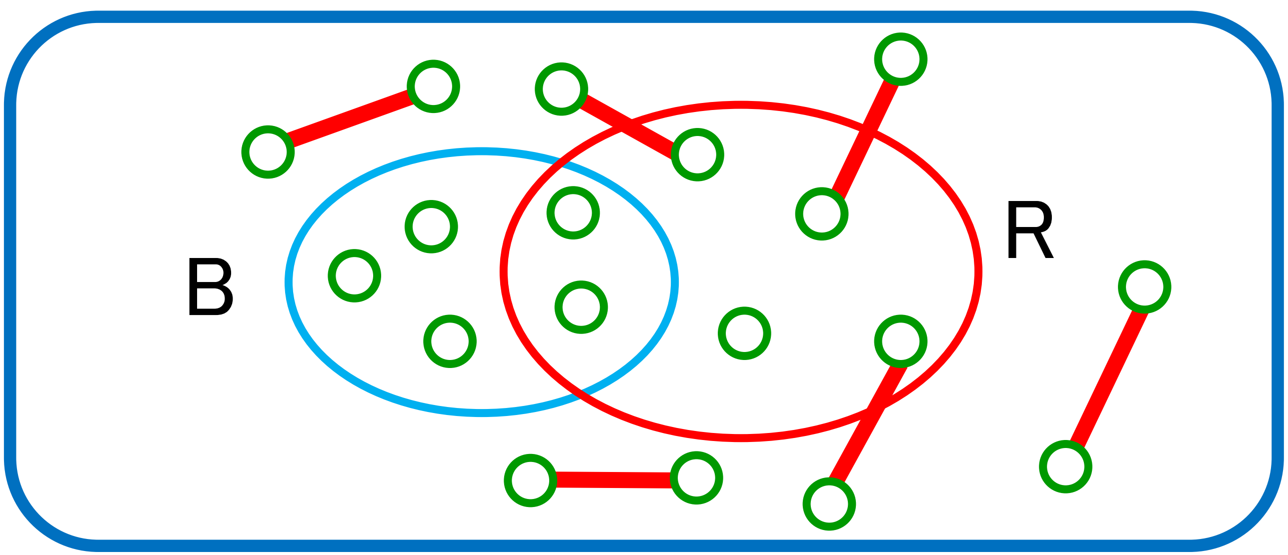
マッチングの性質(2)

定理　グラフG の2つ点集合 BとR, |B|<|R|.
B の点を**含まない**最大マッチングと
R の点を**含まない**最大マッチングがある。
すると　Bの**含まず** R−B の少なくとも1 点を
含まない最大マッチングが存在する。



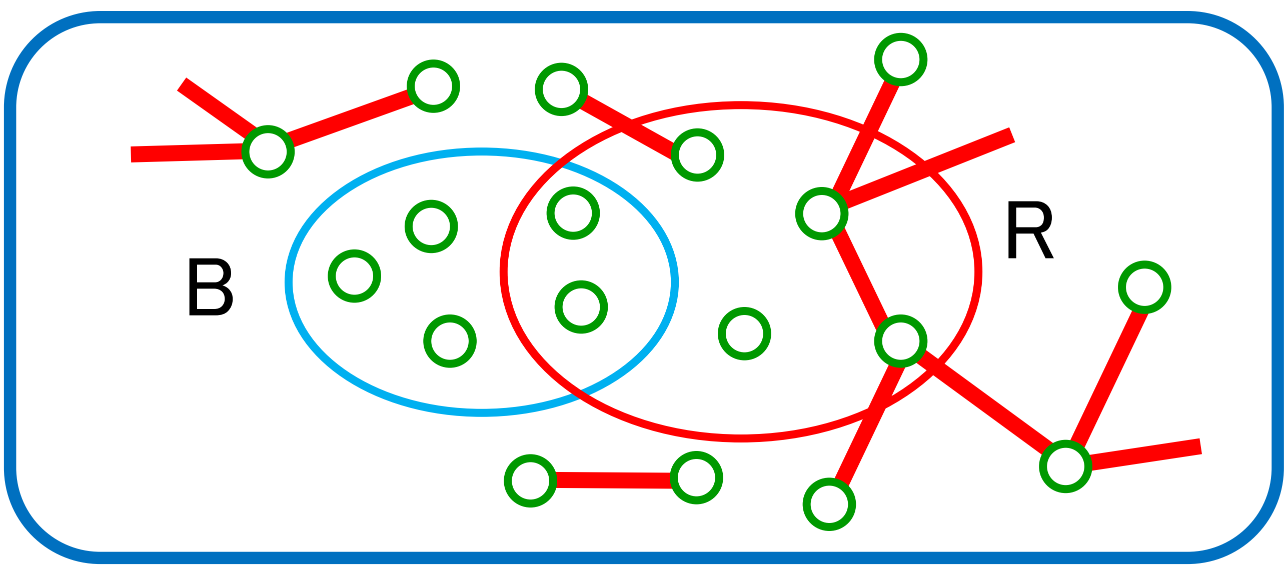
マッチングの性質(2)

定理　グラフG の2つ点集合 BとR, |B|<|R|.
B の点を**含まない**最大マッチングと
R の点を**含まない**最大マッチングがある。
すると　Bの**含まず** R＼B の少なくとも1点を
含まない最大マッチングが存在する。



マッチングの性質(2)

未解決問題　グラフG の2つ点集合 BとR, |B|<|R|。
B の点を**含まない**最大(1,f)−奇次数部分グラフと
R の点を**含まない**最大(1,f)−奇次数部分グラフがある。
すると　Bの**含まず** R＼B の少なくとも1点を
含まない最大(1,f)−奇次数部分が存在するか？

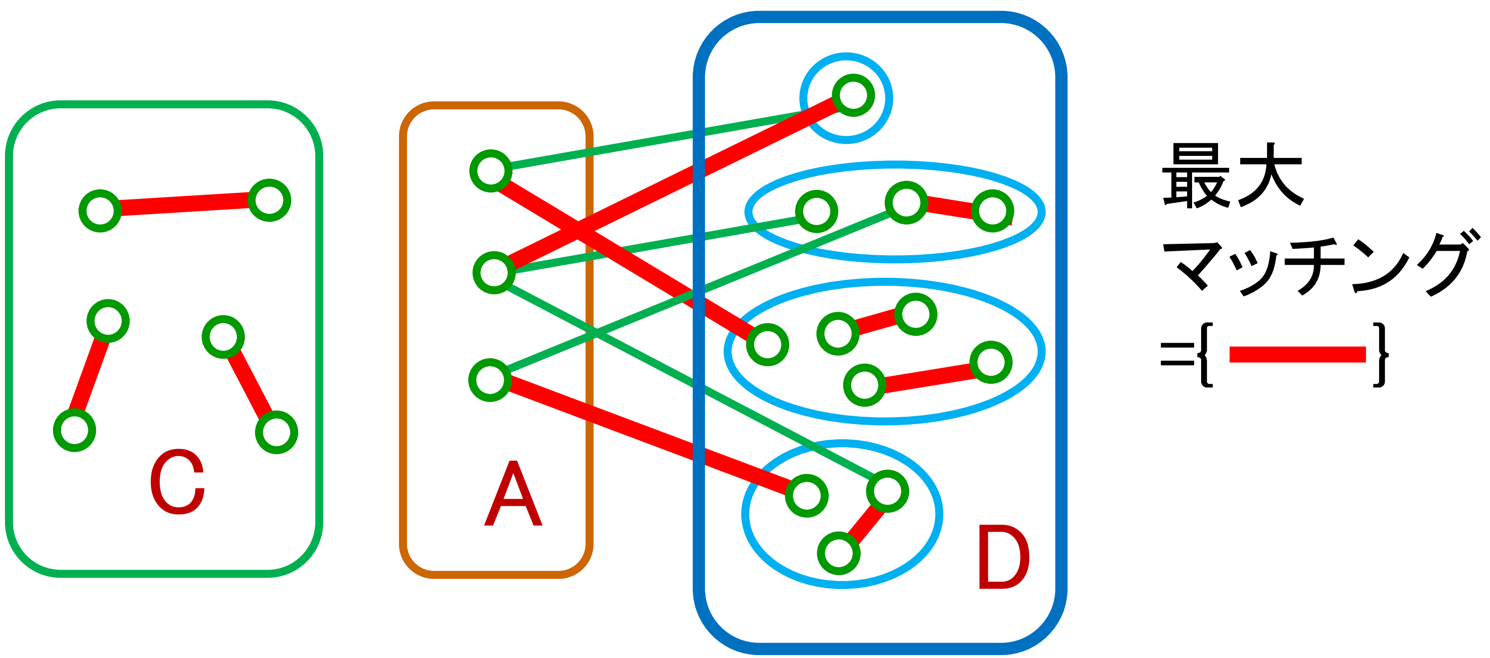


マッチングの構造定理

D={v∈V(G) : v を含まない最大マッチングがある}

A={u∈V(G)−D : u は D に隣接している}

C=V(G)−D−A

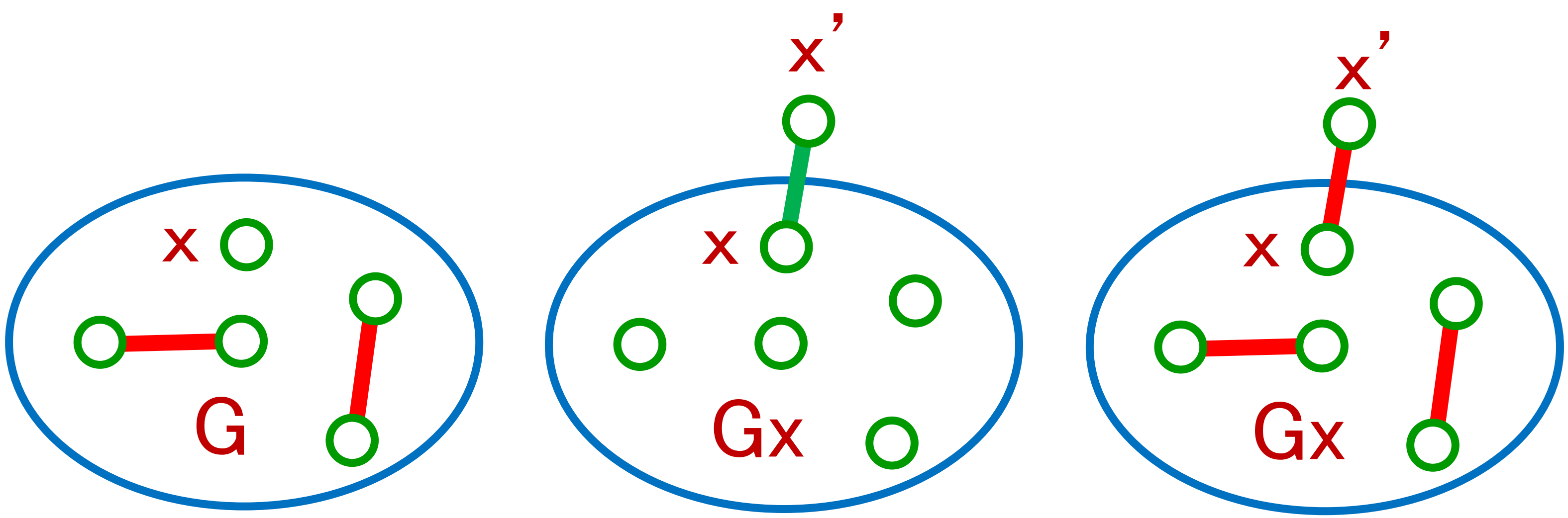


マッチングの構造定理

点 $x \in D$

⇔ x は G のある最大マッチングに含まれない

⇔ G_x の最大マッチングの位数は ＋2



G の最大マッチング

Gx=G+xx'

x' は新しい点

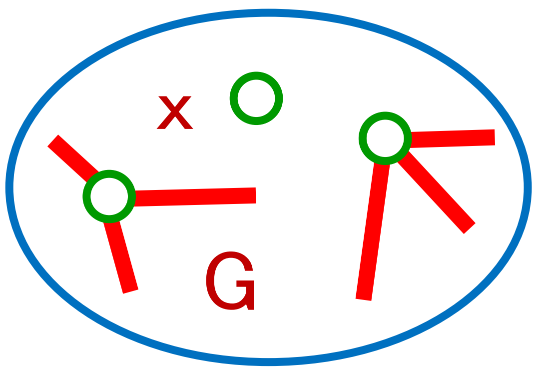
Gx の最大マッチング

(1,f)−奇次数部分グラフの構造定理

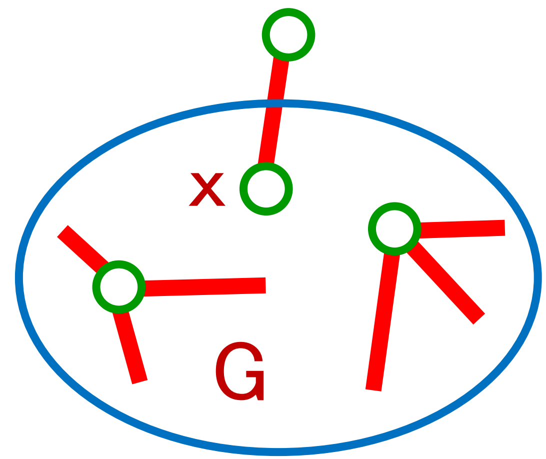
点 $x \in D_f$

⇔ Gx の最大(1,f)−奇次数部分グラフの位数

＝ G の最大(1,f)−奇次数部分グラフの位数＋2



G の最大(1,f)−奇次数部分グラフ



Gx の最大(1,f)−奇次数部分グラフ

(1,f)–奇次数部分グラフの構造定理

$\tau(G;f)$ = 最大(1,f)–奇次数部分グラフの位数

$D_f = \{v \in V(G) : \tau(G-v;f) = \tau(G;f)+2\}$

$A_f = \{v \in V(G) - D$: v は D_f に隣接している$\}$

$C_f = V(G) - D_f - A_f$

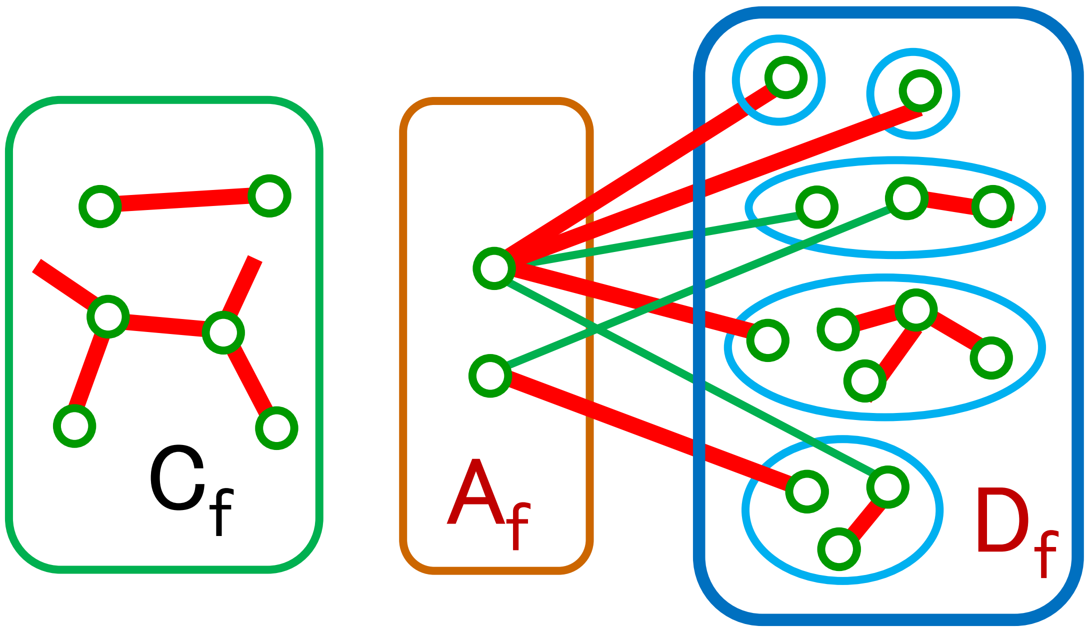
(1,f)−奇次数部分グラフの構造定理

D_f :各成分は critical with respect to (1,f)−factor

A_f = 各点vは$deg_H(v)=f(v)$;　Hの辺はA_fとD_fを結ぶ

C_f:各成分には(1,f)−奇次数因子がある

H = Gの最大(1,f)−奇次数部分グラフ



最大
(1,f)−奇次数
部分グラフ
={　　}

Elementary graph

G: 1−因子(完全マッチング)のあるグラフ

辺eは allowed (容認的)である

⇔ e を含む1−因子がある

Gは elementary (基本的) である

⇔ 誘導部分グラフ$\langle\{\text{allowed edges}\}\rangle_G$ が

G の連結全域部分グラフとなる

Elementary graph

G: 連結単純グラフ

定理　もし

$$\mathrm{odd}(G-S) < |S| \quad \text{for all } \emptyset \neq S \subseteq V(G),$$

なら　すべての辺e は allowed (容認的)である

(e を含む1-因子がある)

定理　Gは elementary である

⇔

G に1-因子があり、$C(G-x)=\emptyset$ for all $x \in V(G)$

Elementary graph

G：連結なグラフ　$f:V(G)\to\{1,3,5,\cdots\}$

定理　もし

$\mathrm{odd}(G-S) < f(S)$　for all $\emptyset\neq S\subseteq V(G)$

なら　すべての辺eは allowed(容認的) である.

(eを含む(1,f)-奇次数因子がある)

定理　G が (1,f)-奇次数因子に関して elementary

⇔

$\mathrm{odd}(G-S)\leqq f(S)$　for all　$\emptyset\neq S\subseteq V(G)$　かつ

等号成立のときにはG−Sに偶成分はない

Barrier

$\emptyset \neq S \subseteq V(G)$ は G の barrier である

$\Leftrightarrow$

$odd(G-S) - |S| = \max\{odd(G-X)-|X|;\ X \subseteq V(G)\}$

X はGの 極大な barrier であるとは

X⊂Yとなる barrier Y はない

Elementary graph

定理 (Lovasz, 1972)

1. もし G が elementary なら、極大な barriers は V(G)の分割 $\mathbb{S}$ を与える。

2. 2点 u, v に対し, G−u−v に1−因子があるための必要十分条件は uとv が $\mathbb{S}$ の異なる集合に含まれることである。

3. 特に、辺xyが allowed であるための必要十分条件はxとyが$\mathbb{S}$の異なる集合に含まれることである。

4. $X \subseteq V(G)$ が $\mathbb{S}$ の集合となるための必要十分条件は G−Xに$|X|$個の成分があり、どれも factor−critical となることである。

Elementary graph

定理 (Kano, Katona, Sabo 2009) もし G が elementary なら、極大な barriers はV(G)の分割$\mathbb{S}$ を与える。さらに

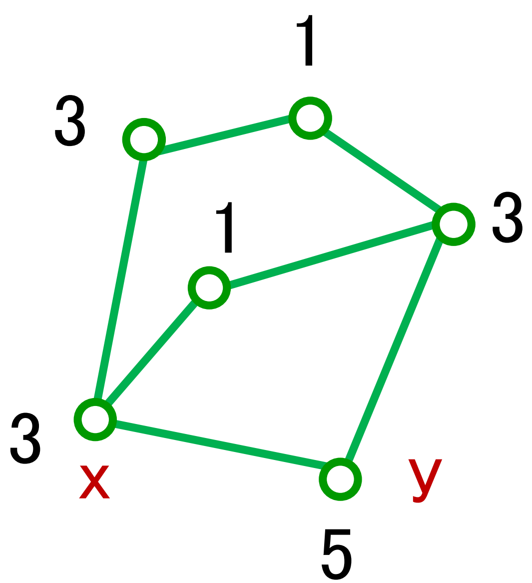
1. 2点 u, v に対し, Gに(f−χ(u,v))−次数因子があるための必要十分条件は uとvが$\mathbb{S}$の異なる集合に含まれることである。

2. 特に、辺xyが allowed であるための必要十分条件はxとyが$\mathbb{S}$の異なる集合に含まれることである

3. $X \subseteq V(G)$ が$\mathbb{S}$の集合となるための必要十分条件は G−Xに f(X) 個の成分があり、どれも f−critical となることである。

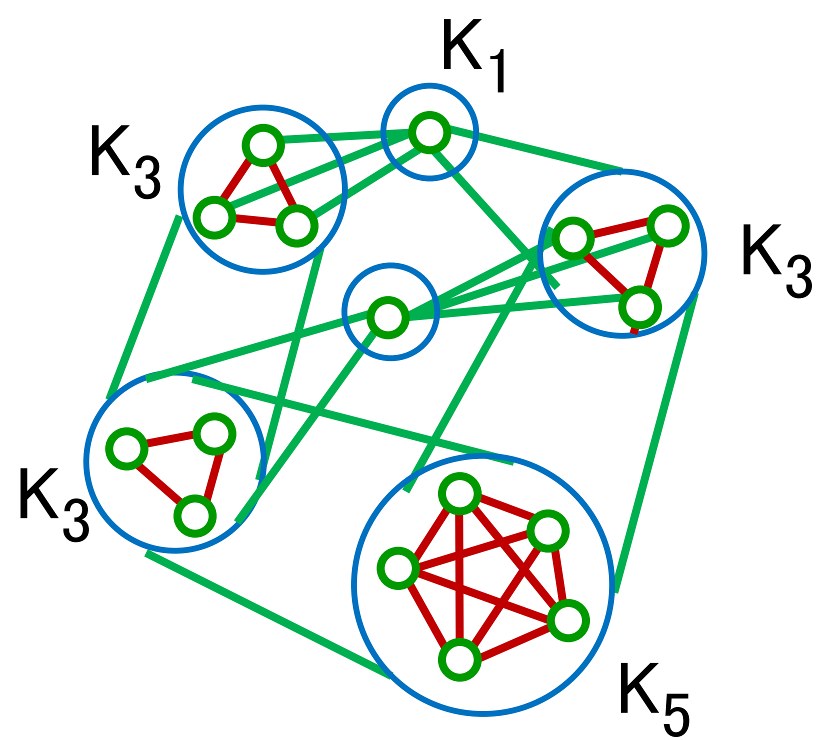
$v \rightarrow K_{f(v)}$

G



$xy \in E(G)$

G^f



$K_{f(x)} + K_{f(y)}$: join を作る

G に(1,f)−奇次数因子がある

⇔

G^f に 1−因子(完全マッチング)がある

H は G の最大(1,f)−奇次数部分グラフ

⇔

G^f に |G|−|H|個 の点を被覆しない

最大マッチングがある

「Matching Theory」のおよそ 150ページ
(5章の前半)までの主要な結果は
(1,f)−奇次数部分グラフまで拡張できた。

7章以降はこのような観点から見たときには
関係なさそう

5章後半から6章あたりが未解決と思われる
また、5章までにも拡張できていない結果が
ある

ご清聴ありがとうございます

2回目の講義終わり