グラフ理論における偶奇性に関連する現象
（3回目の講義）

加納 幹雄 （Mikio Kano）
茨城大学　名誉教授

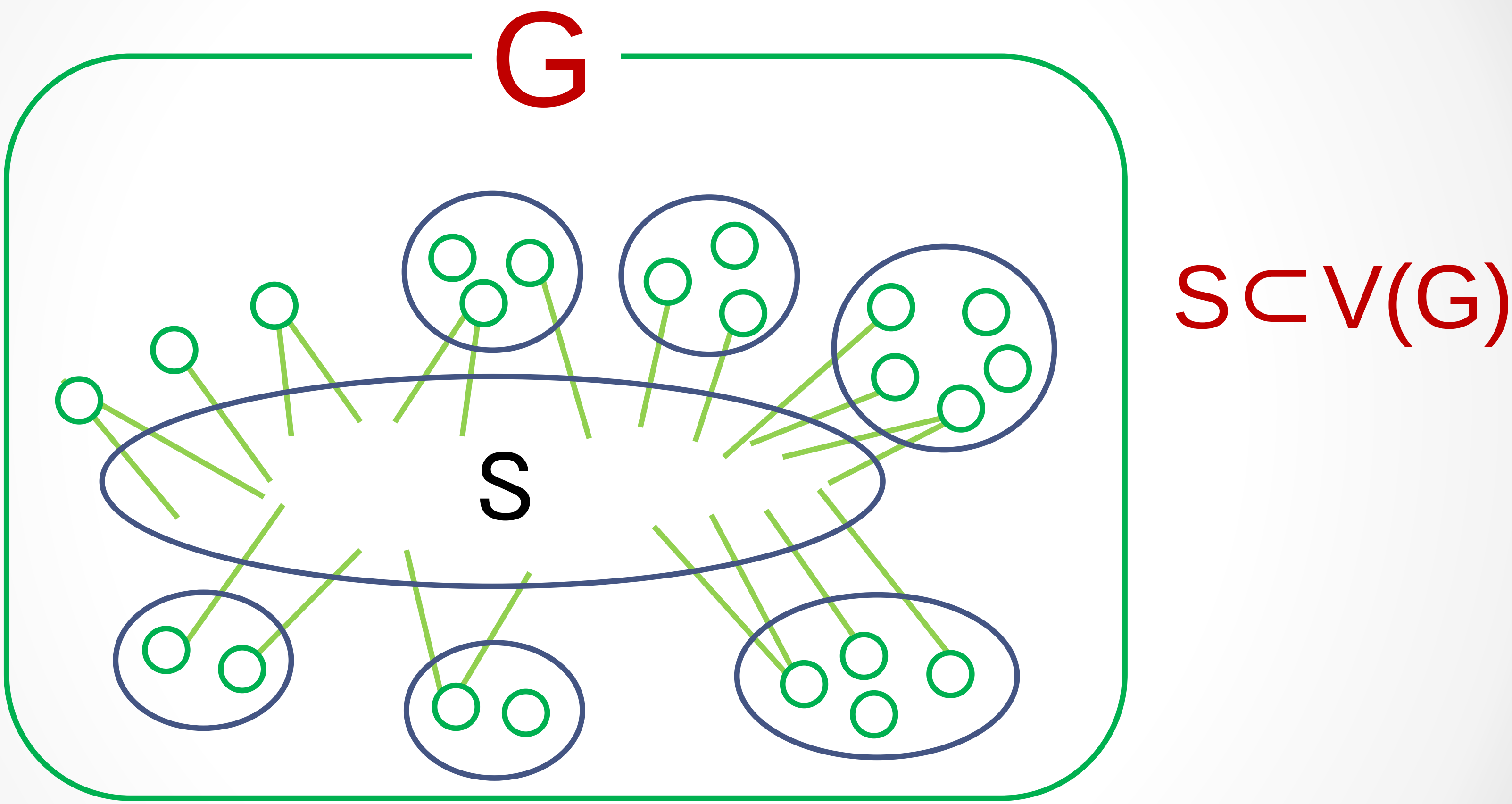
講義の　概略

1回目　　入門的な話
証明の多くを演習問題とします

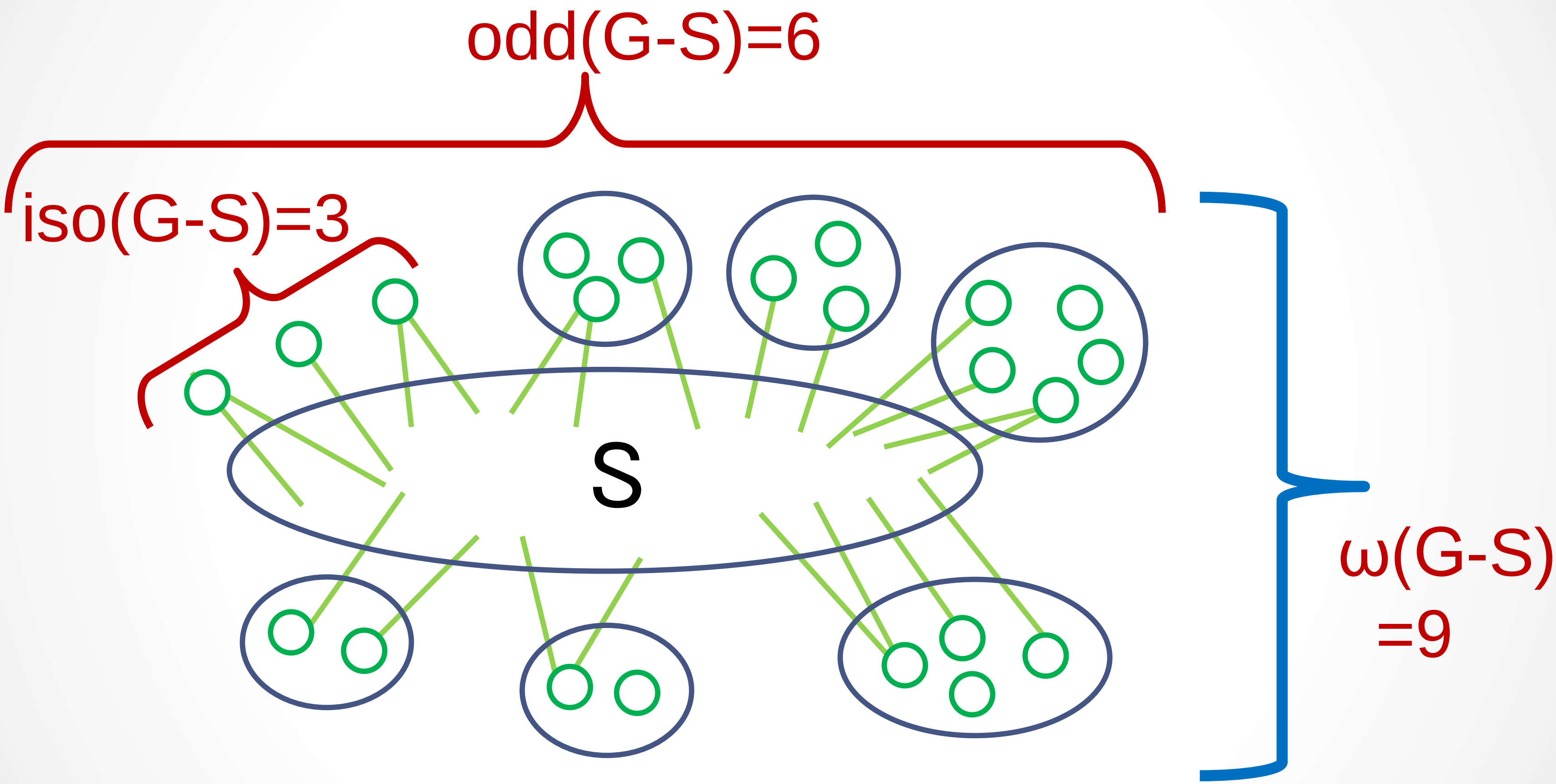
2回目　　マッチングと1-因子の一般化
に関連する話

3回目　　因子＝ある条件を満たす全域部分グラフ
最近の因子理論のなかで
偶奇性に関連するものの紹介

連結グラフG と G-Sの成分



連結グラフG と G-Sの成分

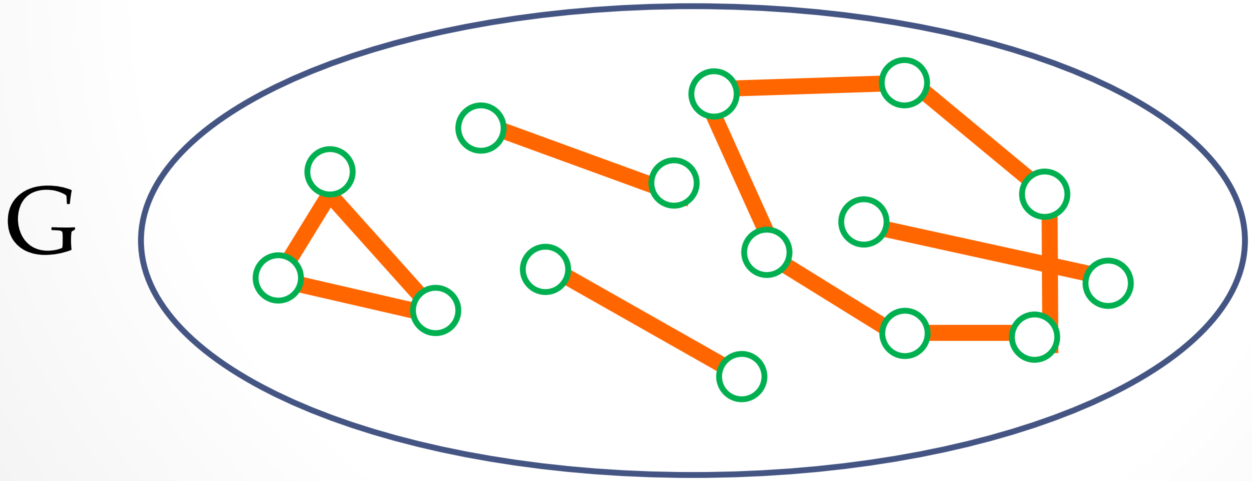


iso(G-S) = 孤立点の数　odd(G-S) = 奇成分の数
ω(G-S) = 成分数

$i(G-S) \leqq |S|$ を満たすグラフG

定理 (Berge; Tutte 1953) 連結グラフG に
$\{K_2, C_n : n \geqq 3\}$-因子があるための 必要十分条件は

$$iso(G-S) \leqq |S| \quad \text{for all} \quad \Phi \neq S \subset V(G).$$



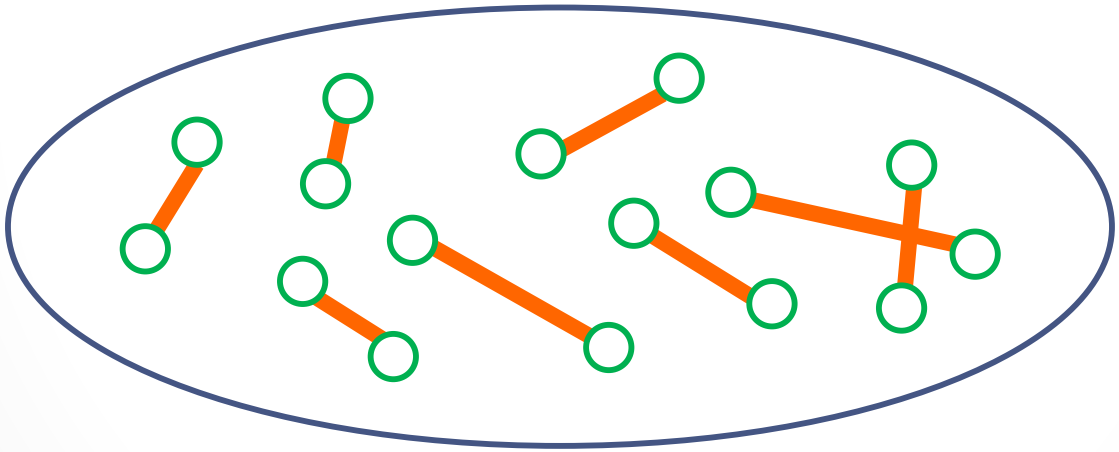
$\{K_2, C_n : n \geqq 3\}$-因子

i(G-S)≦|S| を満たすグラフG

定理 (Tutte 1947) グラフG に1-因子が
あるための 必要十分条件は

$$odd(G-S) \leqq |S| \quad \text{for all} \quad S \subset V(G).$$

G



1-因子

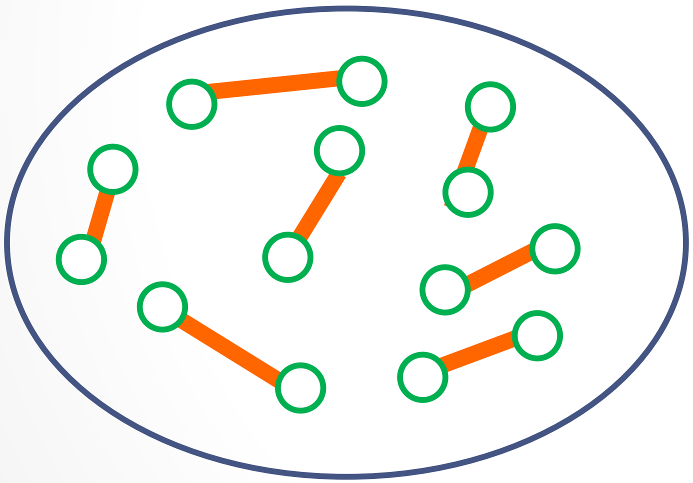
S=Φ は G が偶数位数であることを示すために使う

iso(G-S)≦|S| を満たすグラフG

定理 (Tutte) グラフG に 1-因子があるか factor-critical であるための 必要十分条件は

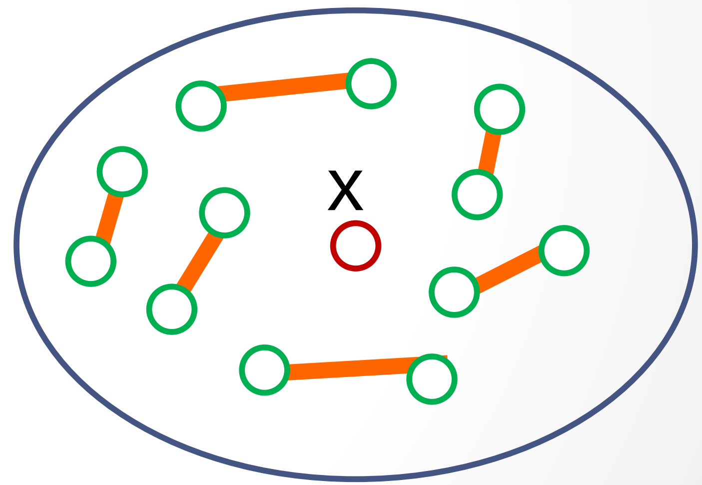
$$\mathrm{odd}(G-S) \leqq |S| \quad \text{for all} \quad \Phi \neq S \subset V(G).$$

G



|G|=偶数　1-因子

G



|G|=奇数 factor-critical

(任意の点xに対してG-xに1-因子がある)

odd(G-S)≦|S| なら iso(G-S)≦|S|

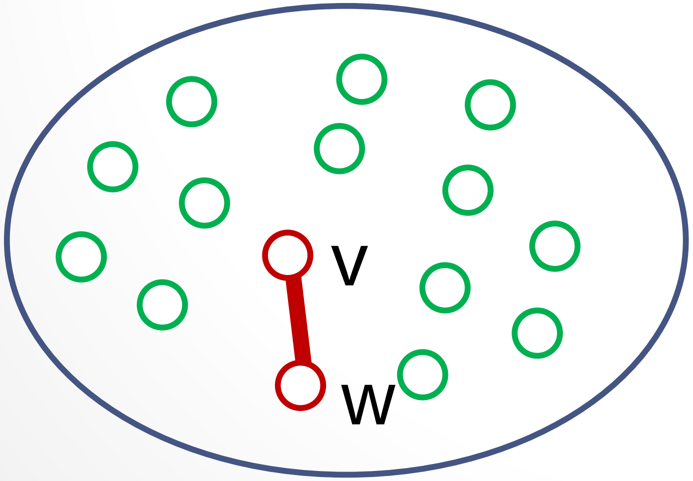
odd(G-S)≦|S| for Φ≠S⊂V(G) を満たせば
$\{K_2, C_n : n \geqq 3\}$-因子がある

|G|=偶数なら Gには1-因子があり、それは
$\{K_2, C_n : n \geqq 3\}$-因子である

odd(G-S)≦|S|　なら　iso(G-S)≦|S|

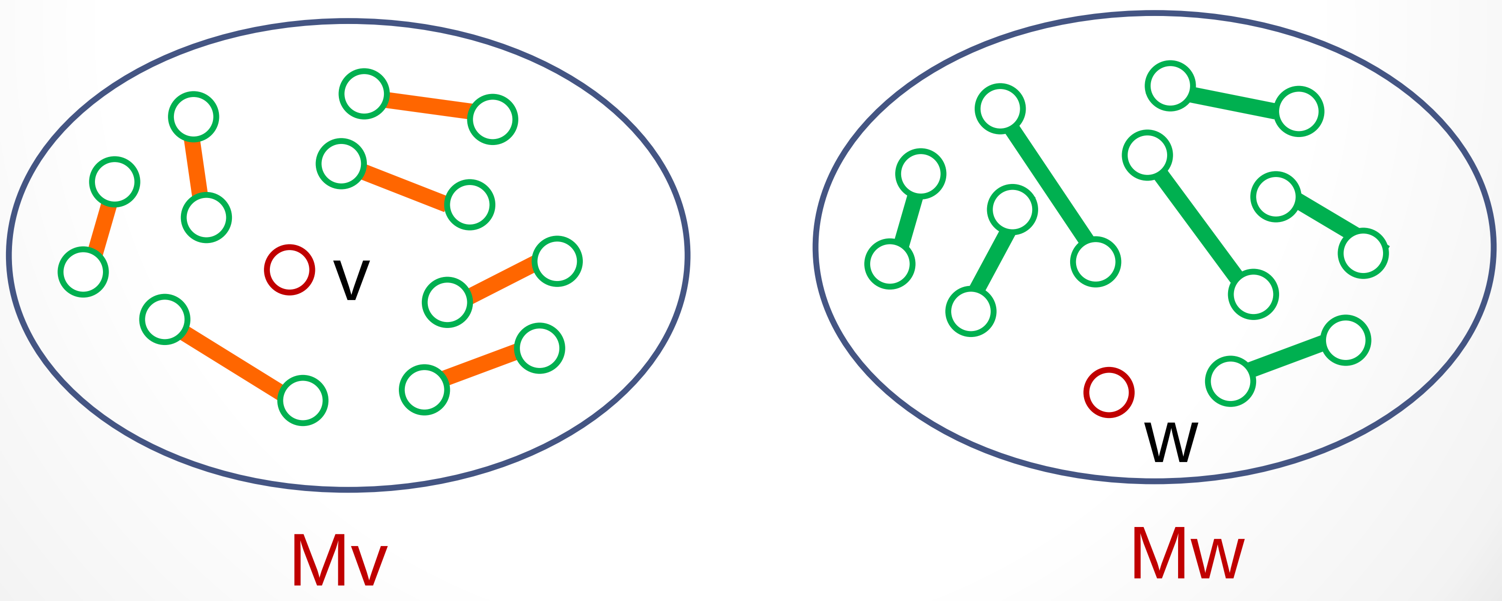
odd(G-S)≦|S| for $\Phi \neq S \subset V(G)$ を満たせば
$\{K_2, C_n : n \geqq 3\}$-因子がある

|G|=奇数なら　Gは factor-critical である。
隣接する2点 v と w　に対して



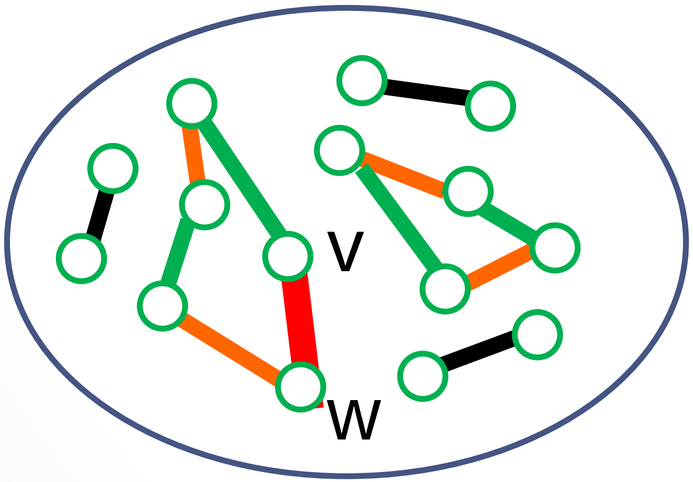
odd(G-S)≦|S| なら iso(G-S)≦|S|

G-v には 1-因子Mvがあり、G-w には 1-因子Mw
がある



odd(G-S)≦|S|　なら　i(G-S)≦|S|　を満たす

Mv∪Mw の成分は　K_2,　偶サイクル、vとwを結ぶ道
よって Mv∪Mw +vw は　$\{K_2, C_n : n \geqq 3\}$-因子となる



Mv＼Mw={ ━━ }
Mw＼Mv={ ━━ }
Mv∩Mw={ ━━ }

Mv∪Mw　+ vw

関係式と計算量

$$\mathrm{iso}(G-S) \leqq \mathrm{odd}(G-S) \leqq \omega(G-S)$$

for all $\Phi \neq S \subset V(G)$

$\mathrm{iso}(G-S) \leqq |S|$ for al l $\Phi \neq S \subset V(G)$

は多項式時間で判定できる

（$\{K_2, C_n : n \geqq 3\}$-因子 or 非存在が多項式時間）

$\mathrm{odd}(G-S) \leqq |S|$ for all $\Phi \neq S \subset V(G)$

は多項式時間で判定できる

（1-因子 or 非存在が多項式時間）

関係式と計算量

$$\mathrm{iso}(G-S) \leqq \mathrm{odd}(G-S) \leqq \omega(G-S)$$
$$\text{for all } \Phi \neq S \subset V(G)$$

一方　G　が

$$\omega(G-S) \leqq |S| \quad \text{for all} \quad \Phi \neq S \subset V(G)$$

を満たす判定は　NP-hard　な問題である

1-タフ グラフ

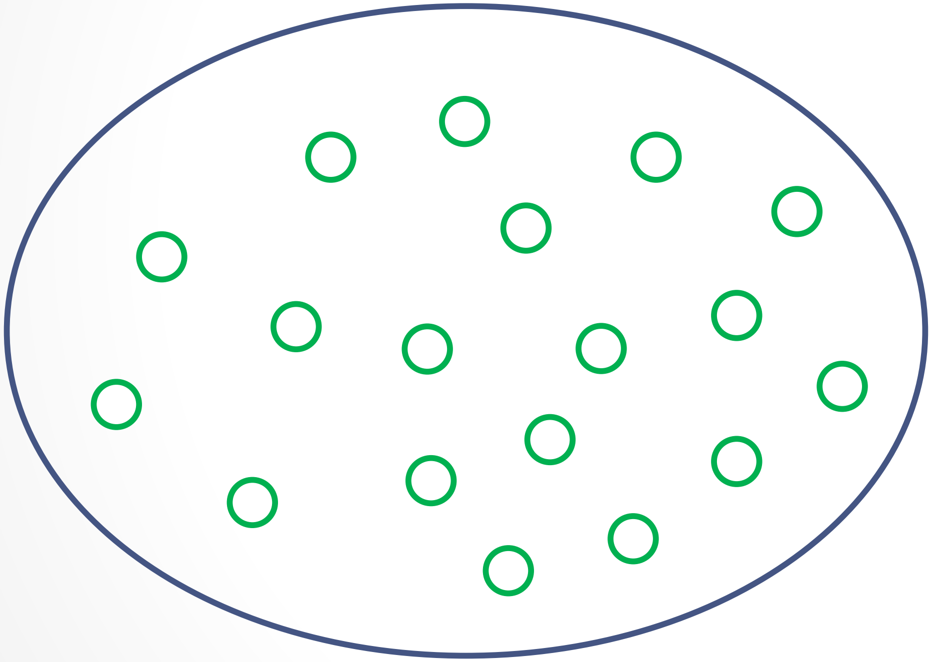
$\omega(G\text{-}S) \leqq |S|$ for all $\Phi \neq S \subset V(G)$

を満たすグラフは 1-タフ グラフ とよばれている

$\omega(G\text{-}S)$ = G-S の成分数

H-因子

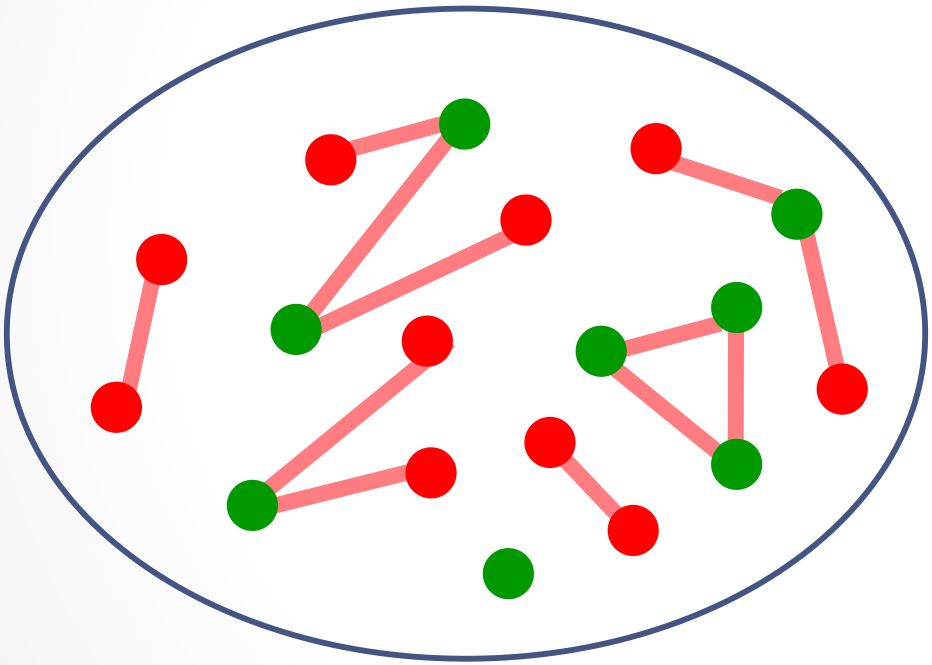
H: V(G) → { ● ● }



グラフG

H-因子

H: V(G) → {● ● }



グラフG

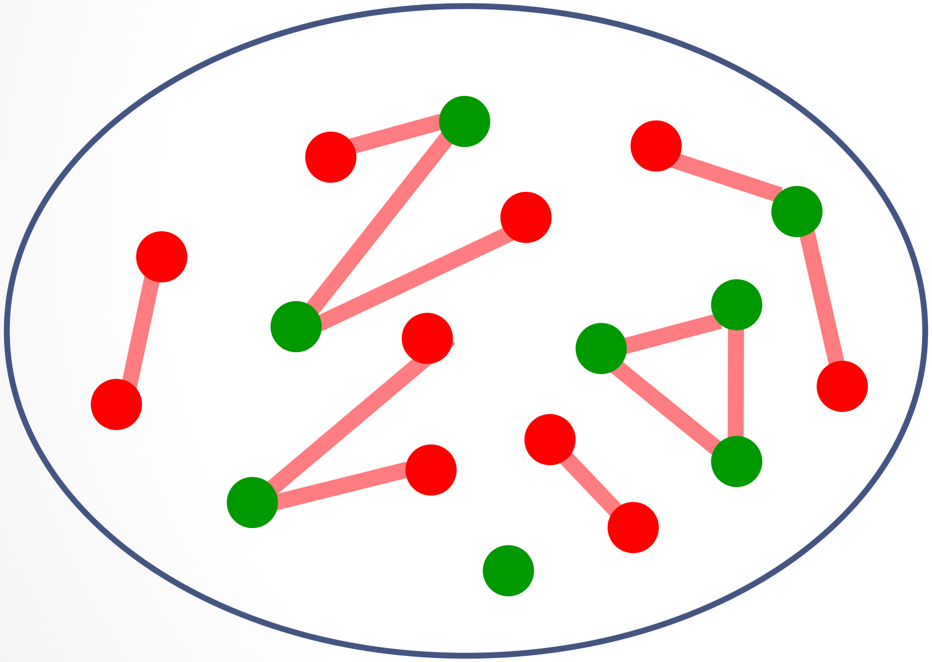
FはGの　H-因子

$\deg_F$(●)=1

$\deg_F$(●)∈{0,2}

H-因子と点素な道

H: V(G) → {● ●}



グラフG

FはGの H-因子

$\deg_F(●)=1$

$\deg_F(●)\in\{0,2\}$

H-因子から ● の閉路を除く

2つの ● を結ぶ点素な道が得られる

1-タフグラフの因子

定理(Lu, Kano; 2019)　G=連結グラフ

任意の H:V(G)→{● ●} with |{●}|=偶数

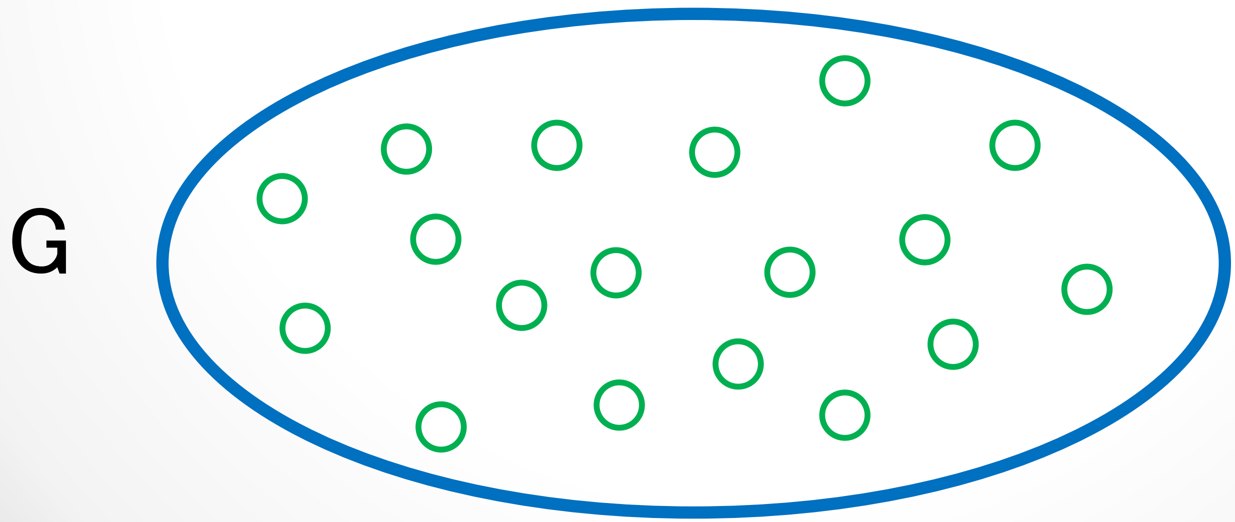
に対して H-因子 があるための

必要十分条件は

$$\omega(G-S) \leqq |S|+1 \quad \text{for all} \quad \Phi \neq S \subset V(G).$$

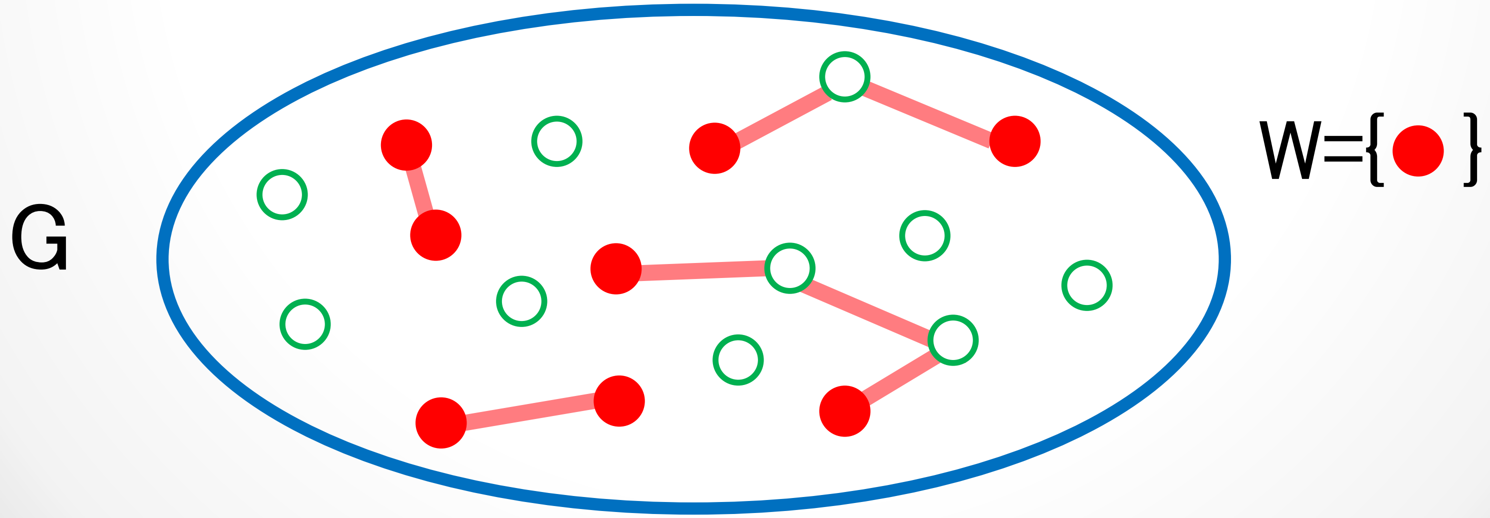
1-タフグラフの因子

定理 G が 1-タフグラフなら
任意の $W \subseteq V(G)$ with $|W|=$偶数　に対して
Wの2点を結ぶ $|W|/2$ 本の点素な道がある



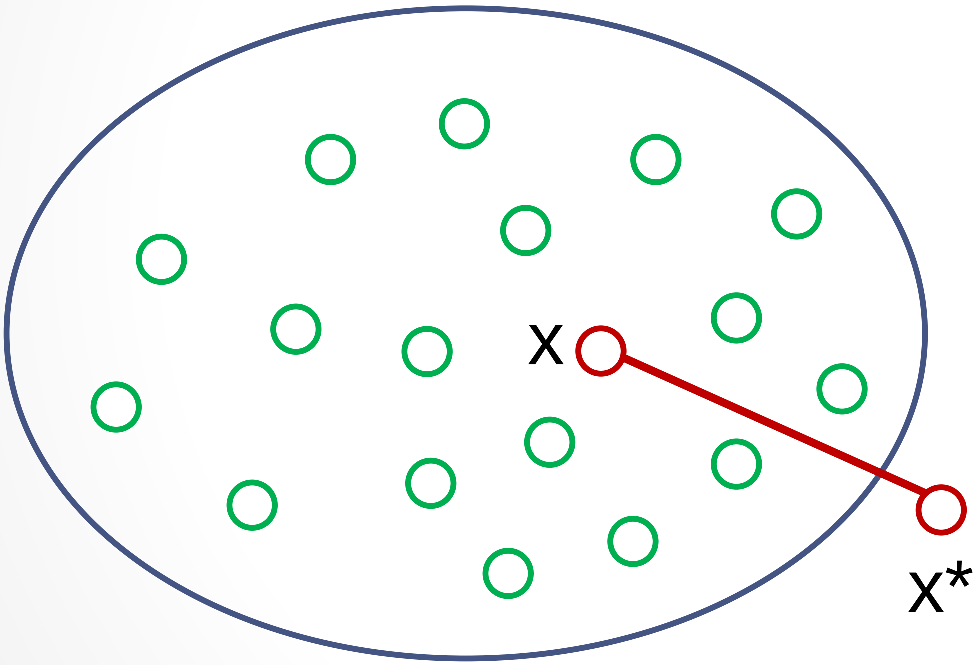
1-タフグラフの因子

定理 G=が 1-タフグラフなら
任意の W⊆V(G) with |W|=偶数 に対して
Wの2点を結ぶ |W|/2 本の点素な道がある



G^x の H^x-因子

$G^x = G + xx^*$ $\quad$ $H^x: V(G^x) \to \{$ ● ● $\}$



任意の点x

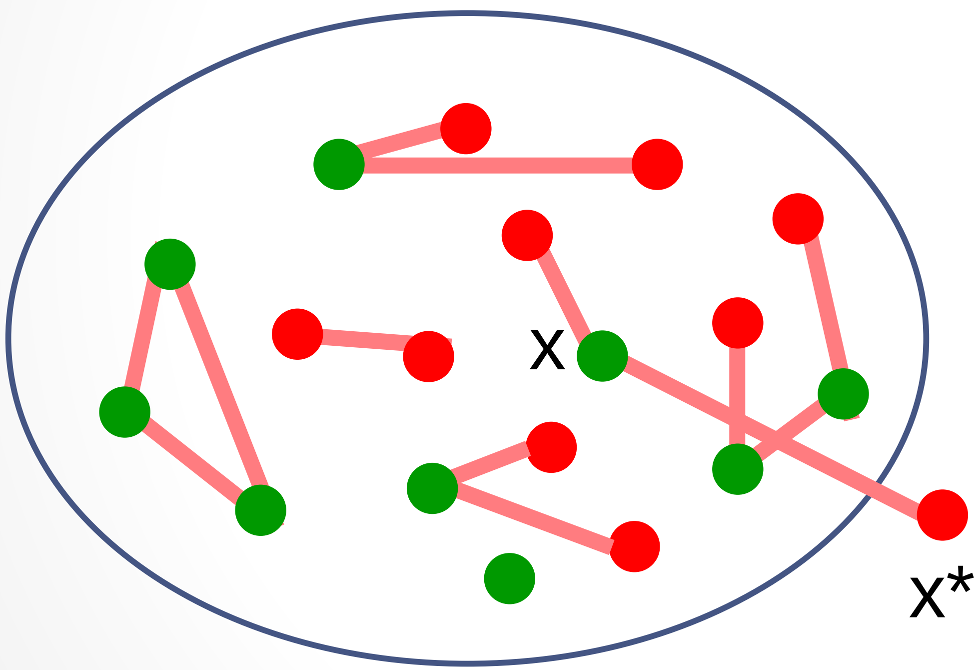
x*はGにない
新しい点

グラフG^x

G^X の H^X-因子

$G^X = G + xx^*$ $H^X: V(G^X) \to \{$● ●$\}$ $|\{$●$\}|$=偶数

$H^X(x^*) =$ ●



グラフG^X

FはG^{X}の H^X-因子

$\deg_F($●$)=1$

$\deg_F($●$)\in\{0,2\}$

1-タフ グラフの因子

定理(Lu, Kano; 2019) G=グラフ　任意の点 x と

任意の H^x:$V(G^x)\to\{$●●$\}$ with $|\{$●$\}|$=偶数

に対して H^x-因子 があるための必要十分条件は

$$\omega(G-S) \leqq |S| \quad \text{for all } \Phi \neq S \subset V(G).$$

任意の点 x に対して G^x に上のような因子が

あるとき G は H-critical であるという

NP-hard や NP-complete
な条件を満たすグラフを
因子（全域部分グラフ）
で特徴付けるたのは
これが最初かもしれない

多くの定理は十分条件を
与えている

定理の証明について

定理の証明には　parity (g,f)-因子 定理を使う

Parity (g,f)-factor theorem (Lovasz)

$g,f:V(G) \to \mathbb{Z}$ (整数)　$g(v) \leqq f(v)$, $g(v) \equiv f(v) \pmod 2$

$g(x)<0$ なる x や $\deg_G(y)<f(y)$ となる y があってもよい

(　$0 \leqq g(v) \leqq f(v) \leqq \deg_G(v)$　でなくてもよい。

この緩和条件が証明を大幅に短くにする）

Parity (g,f)-factor theorem (Lovasz)

このとき

$g(v) \leqq \deg_F(x) \leqq f(v), \quad \deg_F(v) \equiv f(v) \pmod 2$

となる 因子F (parity (g,f)-factor) があるための

必要十分条件は

$f(S) - g(T) + \deg_G(T) - e_G(S,T) - q(S,T) \geqq 0$

ここで q(S,T) は G-(S∪T) の 成分C で

$f(C)+e_G(C,T) \equiv 1 \pmod 2$ となるものの個数

定理１の必要性の証明の概略

つまり

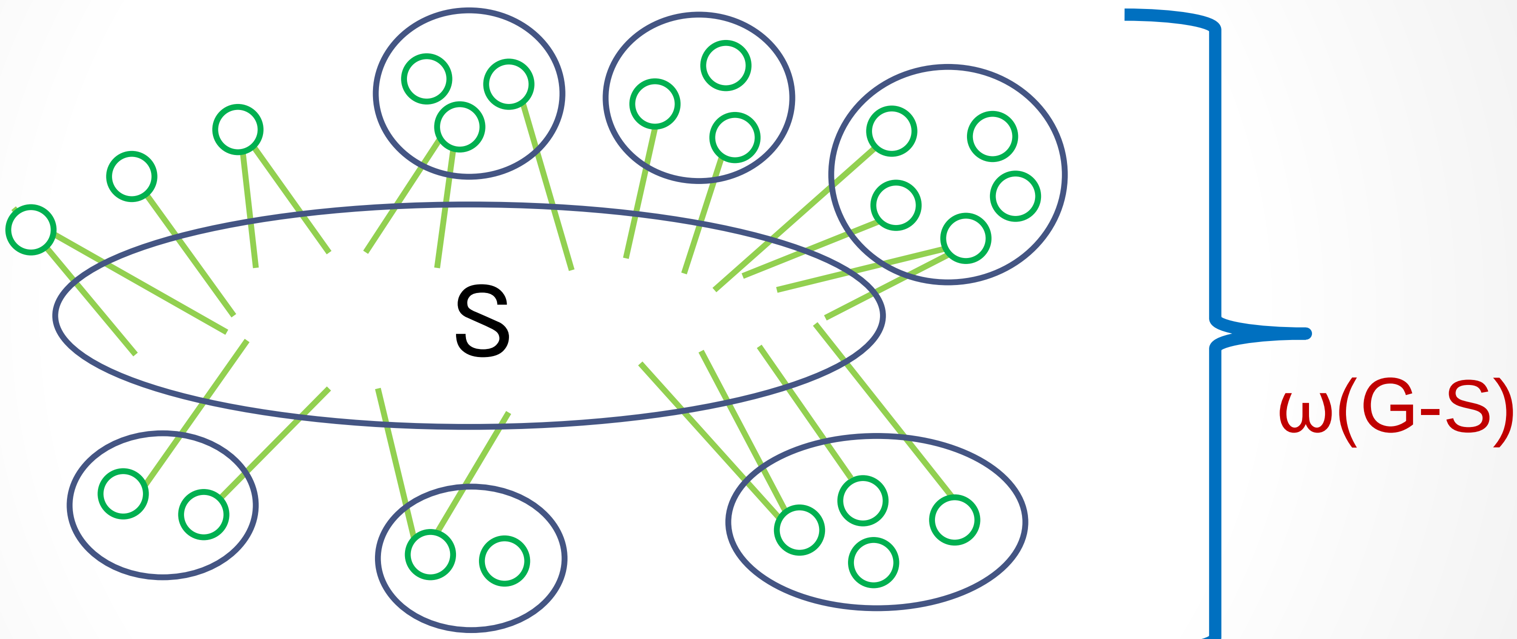
$\omega(G-S) \geqq |S|+2$　となる　$S \subset V(G)$

があれば

ある $H:V(G) \to \{\bullet\ \bullet\}$ に対して

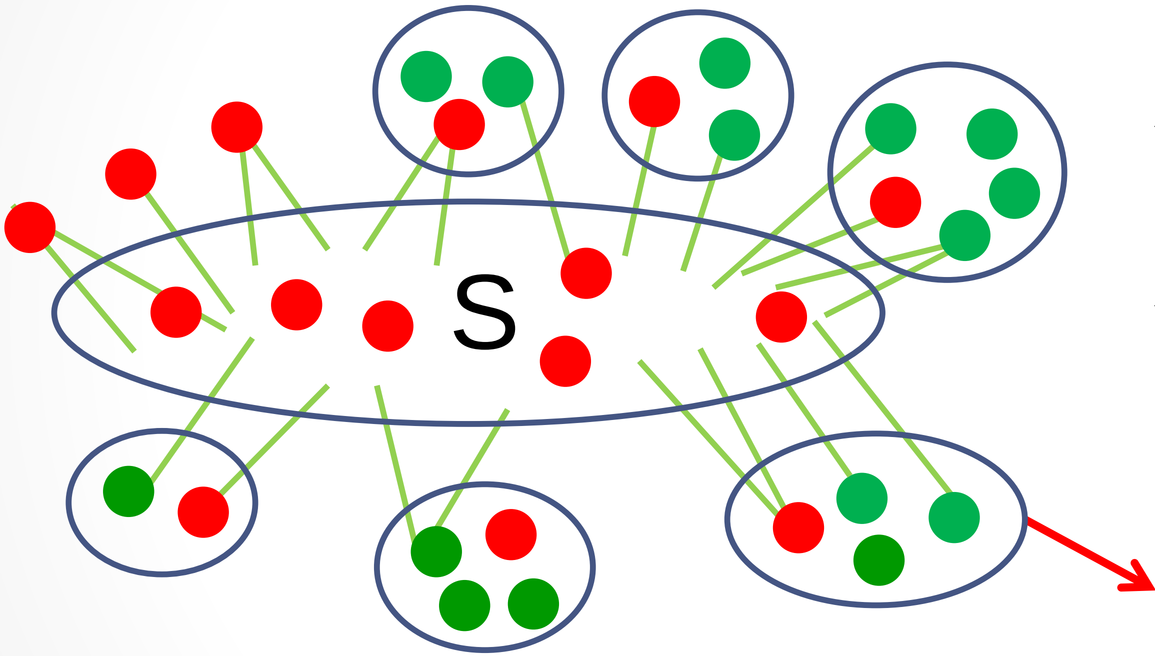
H-因子が存在しないことを示す

ω(G-S)≧|S|+2となる S がある



H:V(G)→{● ●}の定義

$\omega(G-S) \geqq |S|+2$となる S がある

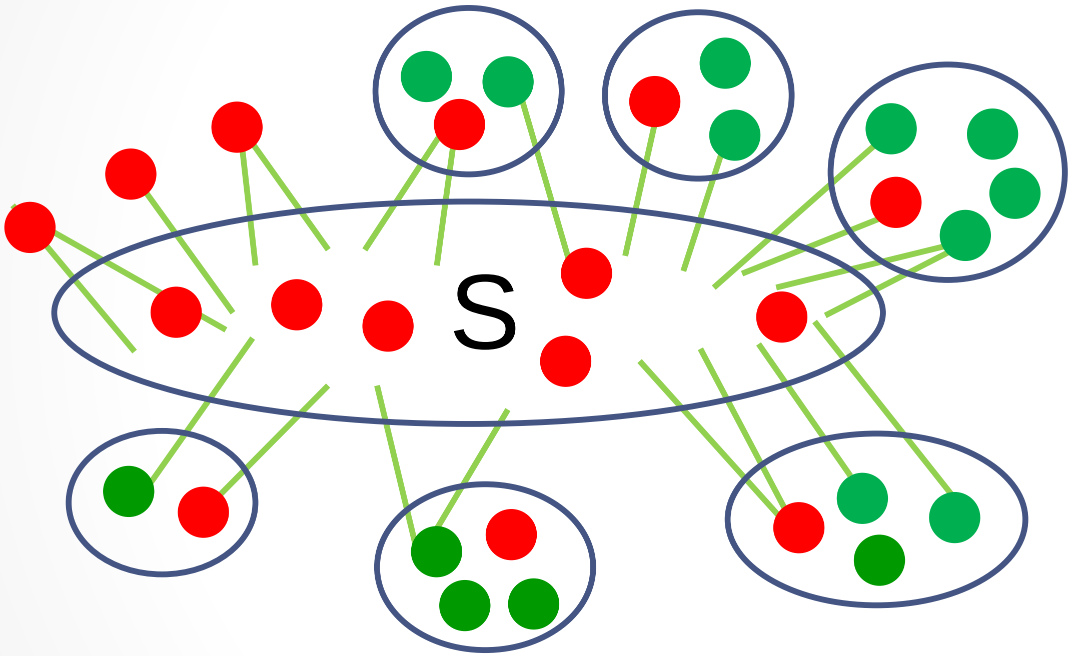


各成分の1点を赤くする
Sの全部の点を赤くする

|{●}|は偶数
1つの成分は全部緑となることもあり

H:V(G)→{● ●}の定義

$\omega(G-S) \geqq |S|+2$ となる S がある



このHに対して |{●}|は偶数で H-因子は存在しない

定理１の十分性の証明の概略

つまり

$$\omega(G-S) \leqq |S| + 1 \quad \text{for all} \quad \Phi \neq S \subset V(G)$$

なら任意の H:V(G)→{ ● ● } with |{●}|=偶数

に対して H-因子が存在する ことを示す

定理１の十分性の証明の概略

M= 十分大きな正の整数

v= ● なら　　g(v)= - 2M　　　　f(v)=2

v= ● なら　　g(v)= - (2M+1)　　f(v)=1

するとGにH-因子があることと

Gに parity (g,f)-因子があることは　同値になる

定理１の十分性の証明の概略

もし　$T \neq \Phi$　なら

$$f(S) - g(T) + \deg_G(T) - e_G(S,T) - q(S,T)$$

$$\geqq f(S) + 2M\,|T| - q(S,T)$$

$$\geqq 0$$

よって $T = \Phi$ としてよい

定理１の十分性の証明の概略

$T = \Phi$　より

$$f(S) - g(T) + deg_G(T) - e_G(S,T) - q(S,T)$$
$$= f(S) - q(S,\Phi)$$
$$\geqq |S| - \omega(G-S) \geqq -1$$

一方　下記が成り立つ

$$f(S) - g(T) + deg_G(T) - e_G(S,T) - q(S,T)$$
$$\equiv f(V(G)) \mod 2 \qquad f(V(G)) = |●| + 2|●| \equiv 0$$

よって

$$f(S) - g(T) + deg_G(T) - e_G(S,T) - q(S,T) \geqq 0$$

$\mathrm{iso}(G-S) \leqq f(S)$ for all $\Phi \neq S \subset V(G)$

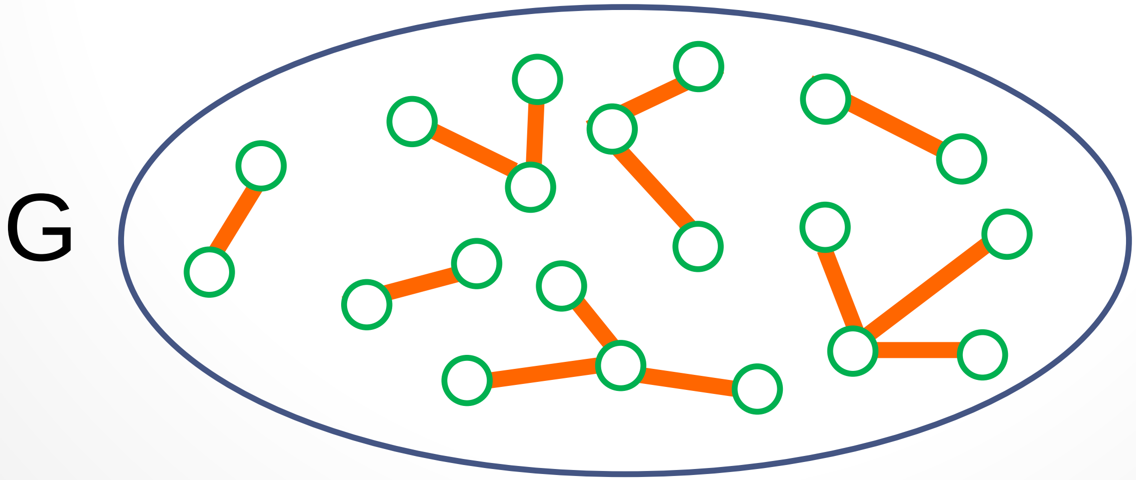
を満たす グラフG の因子

（全域部分グラフ）

G satisfying iso(G-S)≦|S|/2

定理 (Las Vergnas; Amahasi, Kano 1982) k≧2 整数.
Gに$\{K_{1,1}, K_{1,2}, \ldots, K_{1,k}\}$-因子があるための
必要十分条件は

$$iso(G-S) \leqq k|S| \quad \text{for all} \quad \Phi \neq S \subset V(G)$$



A $\{K_{1,1}, K_{1,2}, K_{1,3}\}$-因子

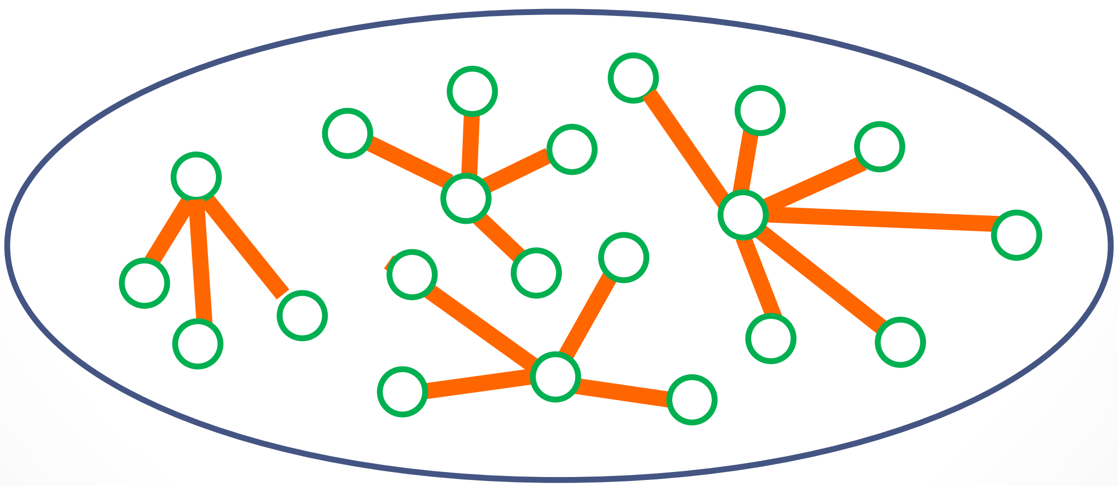
iso(G-S)≦|S|/m を満たすG

定理 (Kano and Saito, 2012) $m \geqq 2$.　もし

$\mathrm{iso}(G-S) \leqq (1/m)|S|$　for all　$\Phi \neq S \subset V(G)$

ならG には $\{K_{1,I} : m \leqq i \leqq 2m\}$-因子がある

G



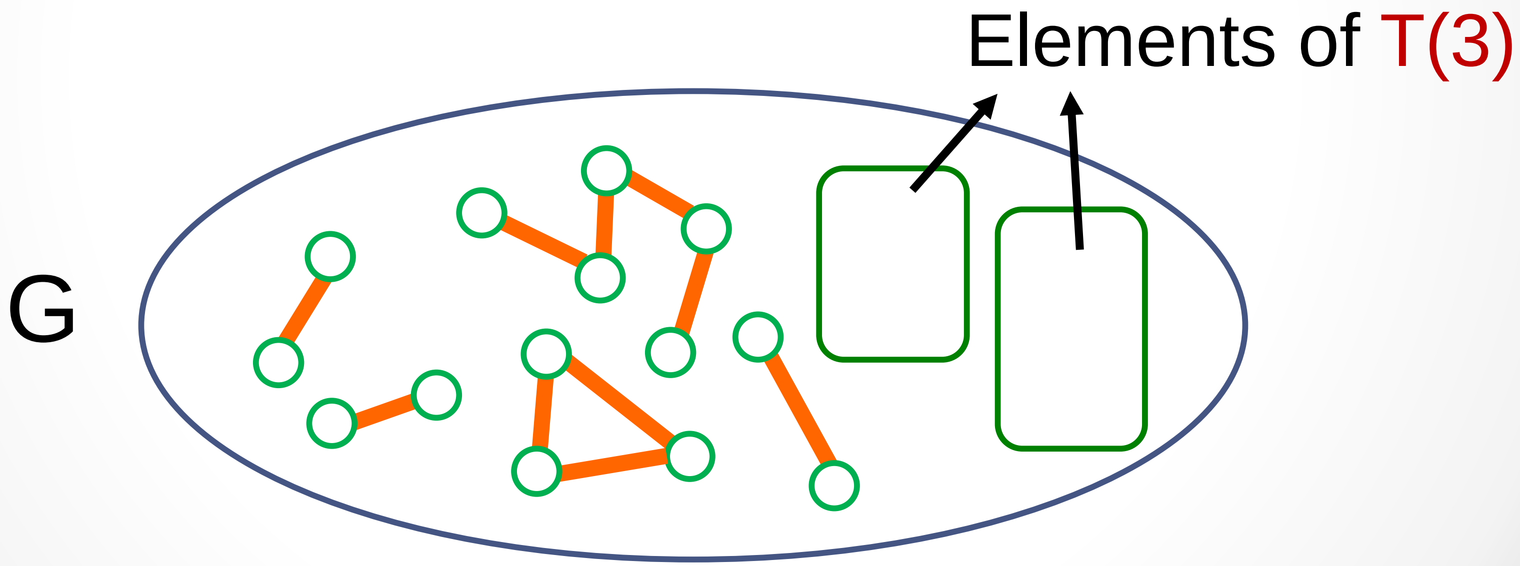
A $\{K_{1,i} : 3 \leqq i \leqq 6\}$-因子, $m=3$

iso(G-S)≦(3/2)|S| を満たすG

定理 (Lu,Kano,Yu; 2019+)　G に

$\{P_2, C_3, P_5, \mathbb{T}(3)\}$-因子があるための**必要十分条件**は

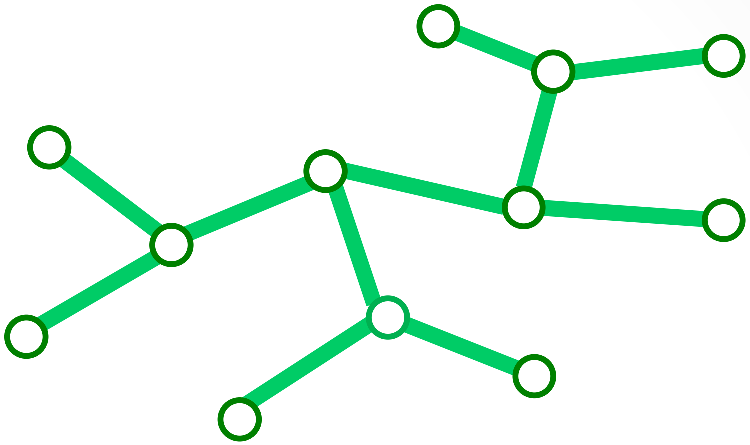
iso(G-S)≦(**3/2**)|S|　for all　Φ≠S ⊂V(G).



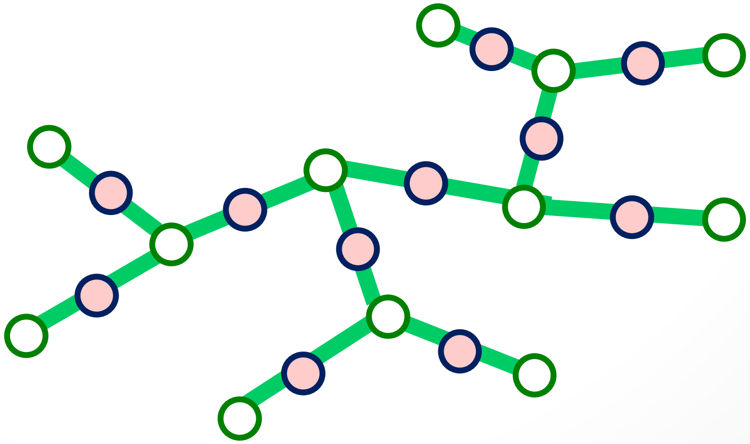
$\{P_2, C_3, P_5, T(3)\}$-因子

Elements of $\mathbb{T}(3)$

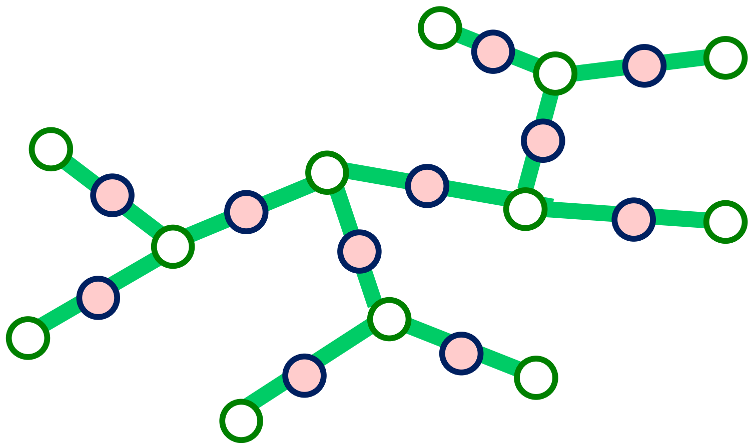
R: {1,3}-木



Step 1: Rの各辺に次数2の新しい点 ● を入れる.

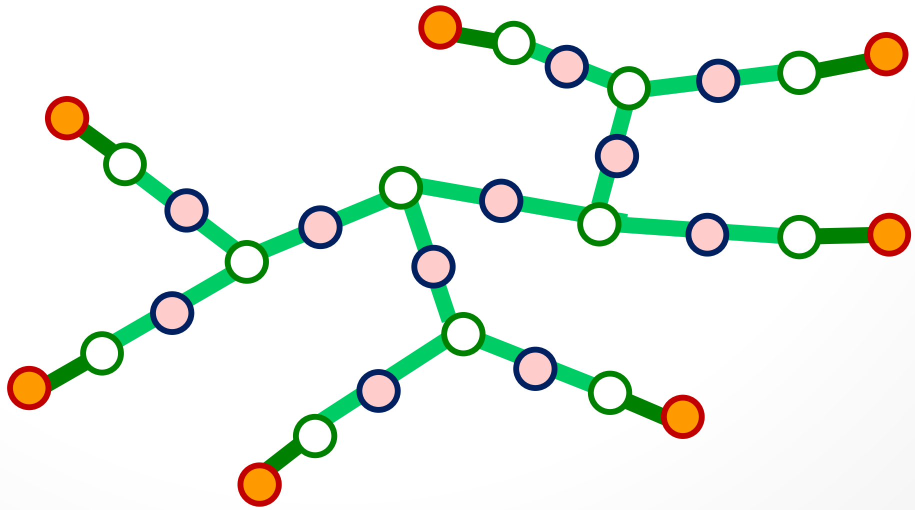


Elements of $\mathbb{T}(3)$



Step 2: 得られた木の各葉に pendant edge  を加える

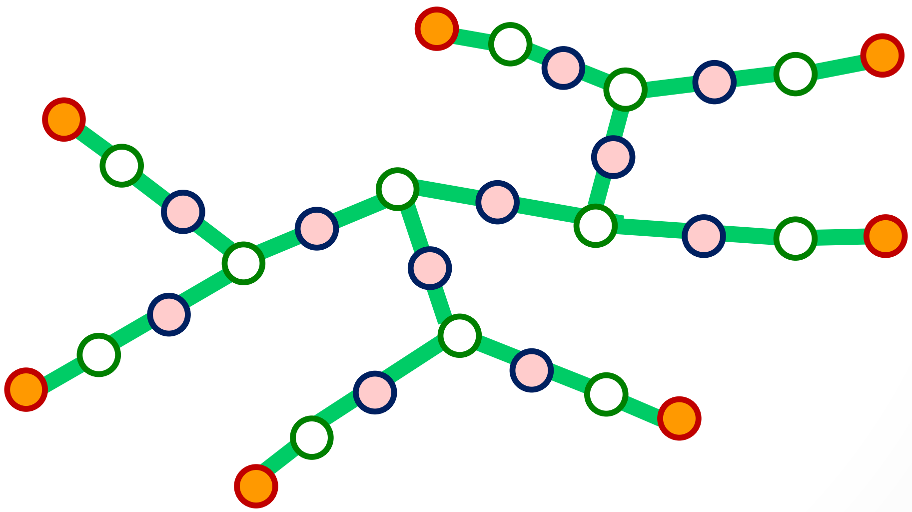
T(R)



Elements of $\mathbb{T}(3)$

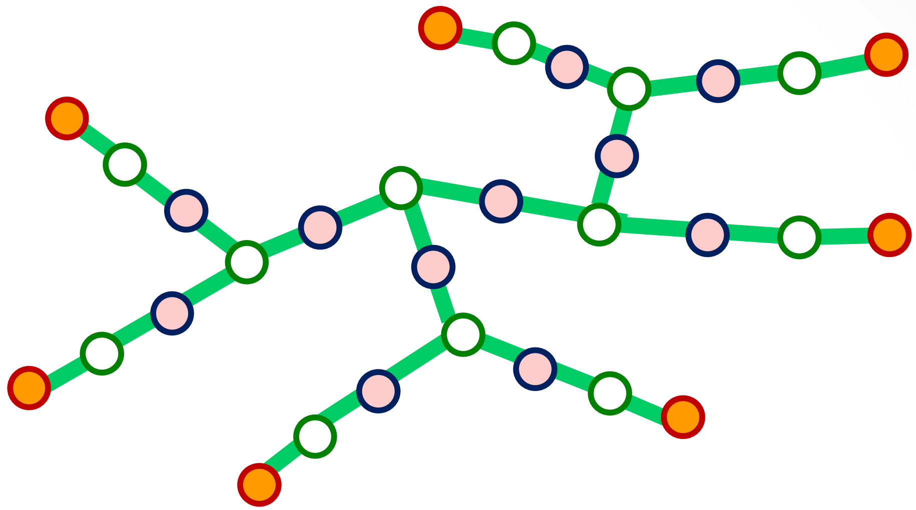
$\mathbb{T}(3)$={ T(R) : R is a {1,3}-tree}

T(R)



Elements of $\mathbb{T}(3)$

T(R)



S={○}=V(R)　とする. すると

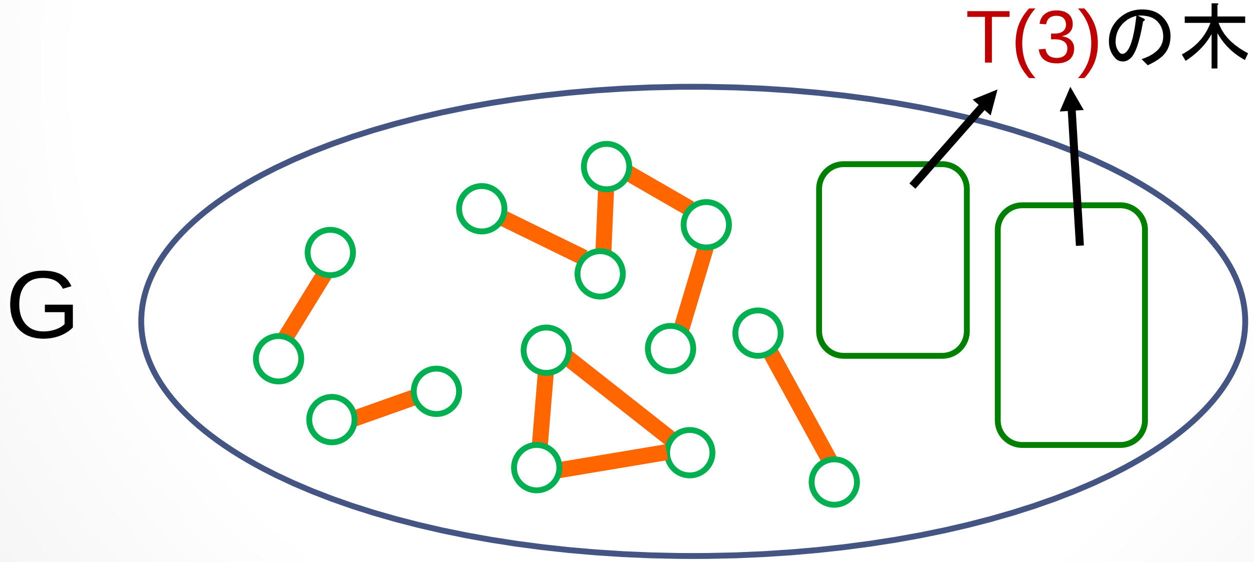
$$\mathrm{iso}(T(R)-S) = |E(R)| \;+\; |\mathrm{Leaf}(R)|$$
$$= |R|-1 \;+\; |R|/2 + 1$$
$$= (3/2)|R|$$

$|S|=|R|=|V(R)|$

iso(G-S)≦(3/2)|S|

定理　G に{P_2,C_3,P_5,$\mathbb{T}$(3)}-因子がある
ための**必要十分条件**は

iso(G-S)≦(**3/2**)|S|　for all　Φ≠S ⊂V(G).



{P_2,C_3,P_5,T(3)}-因子

$k \geqq 2$ を整数とする.

下記の条件を満たす G を考える

$$\mathrm{iso}(G-S) \leqq (\mathbf{k+1/2})|S| \quad \text{for } S \subset V(G).$$

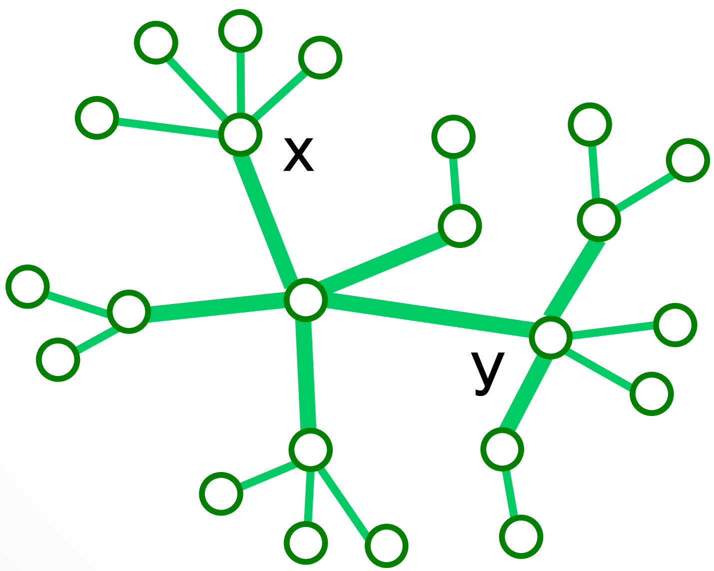
$\mathbb{T}(2k+1)$ の構成，$k \geqq 2$

R は次の条件を満たす木

$\deg_{R\text{-}Leaf(R)}(v) \in \{1,3, \ldots, 2k+1\}$,

$2 \cdot$(vに隣接する葉の数)$+ \deg_{R\text{-}Leaf(R)}(v) \leqq 2k+1.$

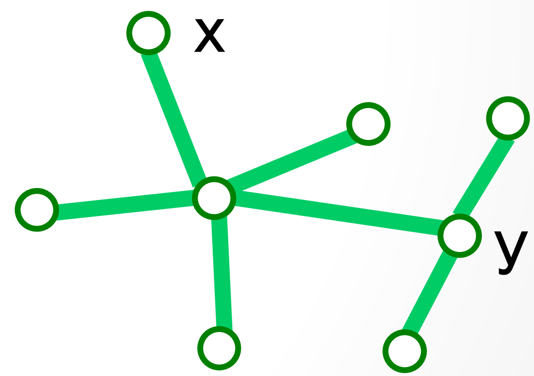
R



k=4

2k+1=9

x: 2・4+1=9 y: 2・2+3=7



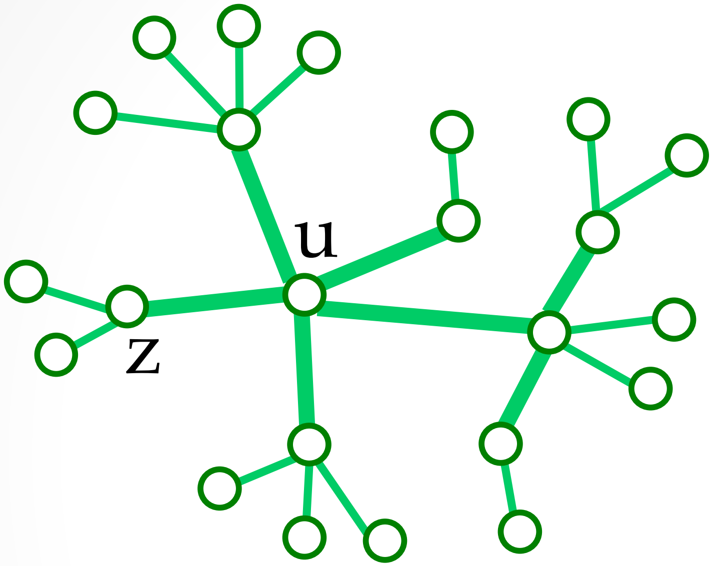
R-Leaf(R)

{1,3,5,7,9}

$\mathbb{T}(2k+1)$ の構成，k≧2

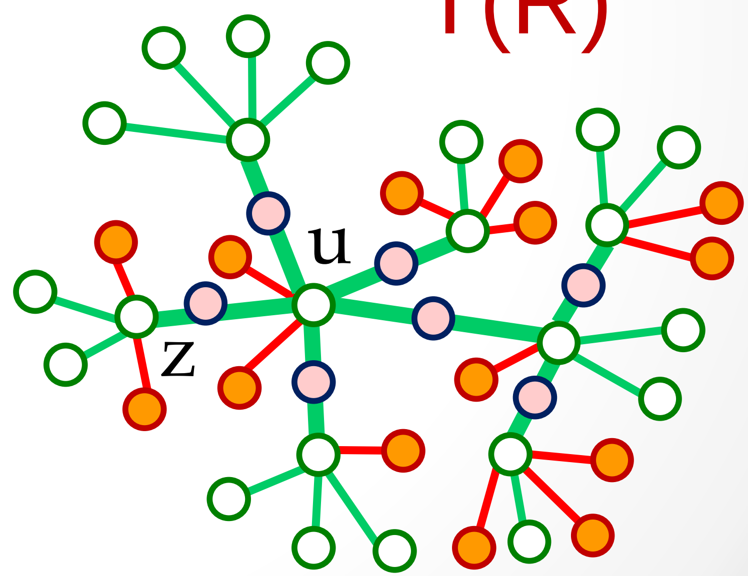
R-Leaf(R) の各辺
に○を入れる

R



k=4

T(R)



$\deg_{R\text{-}Leaf(R)}(v) = 2r+1$

Add (k-r- #leaves adj to v) pendedges to v.

z: r=0, 4-0-2=2   u: r=2, 4-2-0=2

$\mathbb{T}(2k+1)$ の構成，$k \geqq 2$

$\mathbb{T}(2k+1)=\{ T(R) : R$ は下記の条件を満たす木$\}$

$\deg_{R\text{-}Leaf(R)}(v) \in \{1,3, \ldots, 2k+1\}$,

$2 \cdot (v$ に隣接する葉の数$) + \deg_{R\text{-}Leaf(R)}(v) \leqq 2k+1.$

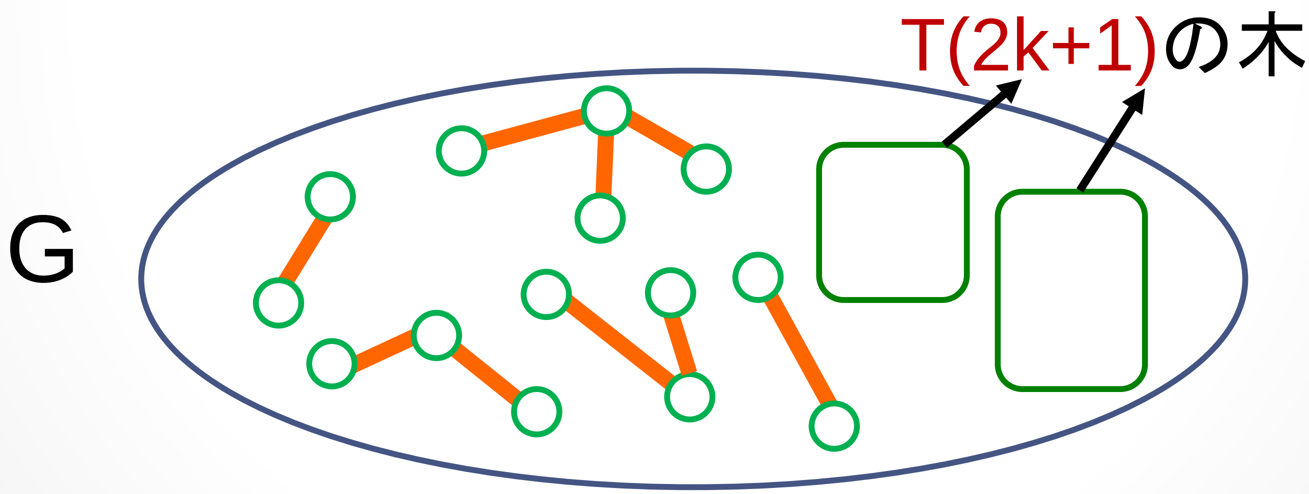
iso(G-S)$\leqq$(k+1/2)|S| を満たす G

定理 (Lu, Kano, Yu; 2019+)　k$\geqq$2.

G に $\{K_{1,1},\ldots,K_{1,k},\mathbb{T}(2k+1)\}$-因子があるための

必要十分条件 は

iso(G-S)$\leqq$(**k+ 1/2**)|S|　for all　$\Phi\neq S\subset V(G)$.



$\{K_{1,1}, K_{1,2}, K_{1,3}, T(7)\}$-因子　k=3 odd(G−S)≦f(S)　for all　Φ≠S⊂V(G)

を満たす グラフG の因子

（全域部分グラフ）

f(x)が整数の場合はほぼ解決された

$\omega(G-S) \leqq f(S)$ for all $\Phi \neq S \subset V(G)$

を満たす グラフG の因子

（全域部分グラフ）

f(x)が整数の場合はほぼ解決された

長時間のご視聴
ありがとうございます