組合せ最適化セミナー 演習問題

2020 年 8 月 5 日
小林佑輔

問 1. グラフ $G = (V, E)$ において，マッチング M が最大マッチングであることと，M に関する増加道が存在しないことが同値であることを示せ．

問 2. 完全マッチング多面体を定める以下の不等式系が，完全双対整数性を持たないようなグラフ $G = (V, E)$ を与えよ．

$$\begin{aligned} \sum_{e\in\delta(v)} x(e) &= 1 && (v \in V) \\ \sum_{e\in\delta(Z)} x(e) &\geq 1 && (Z \subseteq V,\ |Z| : \mathrm{odd}) \\ x(e) &\geq 0 && (e \in E) \end{aligned}$$

問 3. $r : 2^V \to \mathbb{Z}_+$ をマトロイドのランク関数とする．多面体 $\{x \in \mathbb{R}^V \mid x(U) \leq r(U)\ (\forall U \subseteq V),\ x \geq 0\}$ が整数多面体であることを示せ．

問 4. マトロイド交叉のアルゴリズムで，ショートカットのあるパス P を用いて更新すると，$I \triangle P$ が共通独立集合でなくなる例を与えよ．

問 5. 重み付きマトロイド交叉を考える．I をサイズ i の 2 つの（線形）マトロイドの共通独立集合とする．このとき，I がサイズ i の共通独立集合の中で最小重みであることと，I に関する補助グラフ $D(I)$ が負閉路を持たないことが同値であることを示せ．

問 6. (1) グラフ的マトロイドは線形マトロイドであることを示せ．すなわち，グラフ $G = (V, E)$ に対して，$\mathcal{F} \subseteq 2^E$ を「閉路を含まない辺部分集合全体」としたとき，$(E, \mathcal{F})$ が線形マトロイドであることを示せ．

(2) 各頂点の次数が 3 のグラフにおいて最小サイズのフィードバック頂点集合を求める問題が，最大サイズの独立パリティ集合を求める問題に帰着されることを示せ．ただし，グラフ $G = (V, E)$ の頂点部分集合 $S \subseteq V$ がフィードバック頂点集合であるとは，$G - S$ が閉路を含まないことをいう．

問 7. 行列 A に対して，$P(A)$ と $\widehat{A}$ をスライドのように定義する．このとき，

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & * & * \end{array}\right]$$

に対して，$\left(\bigcap_{A'\sim A} P(\widehat{A'})\right) \setminus P(A)$ に含まれるベクトルが存在することを示せ．ただし，$*$ の各要素は代数的独立とする．また，そのベクトルが $\displaystyle\bigcap_{Z,\ A'_Z\sim A_Z} P(\widehat{A'_Z}/W)$ に含まれないことを示せ．

自習課題． 講義で与えた線形マトロイド交叉アルゴリズムの正当性の証明を，一般のマトロイド交叉の場合に拡張せよ．