組合せ最適化問題に対する多面体的手法とその発展

小林 佑輔

京都大学 数理解析研究所

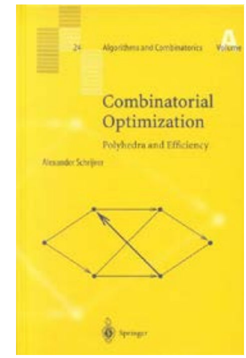
組合せ最適化セミナー＠RIMS

2020年8月5日

内容：組合せ最適化における多面体的手法

組合せ的な制約 → 線形不等式制約 + 整数制約

- 扱う問題
  - ２部グラフのマッチング
  - （線形）マトロイド交叉
  - 線形マトロイドパリティ



A. Schrijver (2003)

Combinatorial Optimization:
Polyhedra and Efficiency

- なぜ多面体的手法？
  - 組合せ最適化の古典・王道
  - 重み付きの問題を扱うのに必須
  - 近似アルゴリズム設計に有用
  - 近年の高速アルゴリズムで利用　Lee-Sidford-Wong (2015)
  - 重み付き線形マトロイドパリティの説明のため　Iwata-Kobayashi (2017)

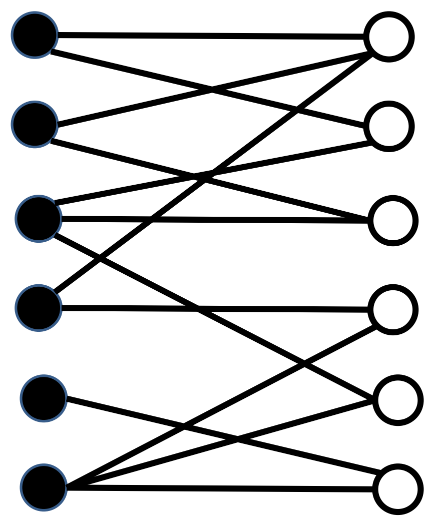
２部グラフのマッチング

２部グラフのマッチング

入力:　２部グラフ $G=(U, V; E)$

問題:　最大サイズのマッチングは？

どの点にも
１本以下の辺が接続



U　　　　V

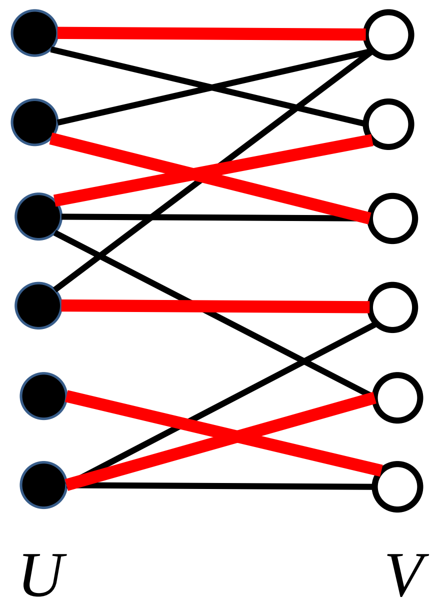
- 学生 と 研究室
- 病院 と 研修医
- 労働者 と 仕事　etc.

２部グラフのマッチング

どの点にも
１本以下の辺が接続

入力:　２部グラフ $G=(U, V; E)$

問題:　最大サイズのマッチングは？



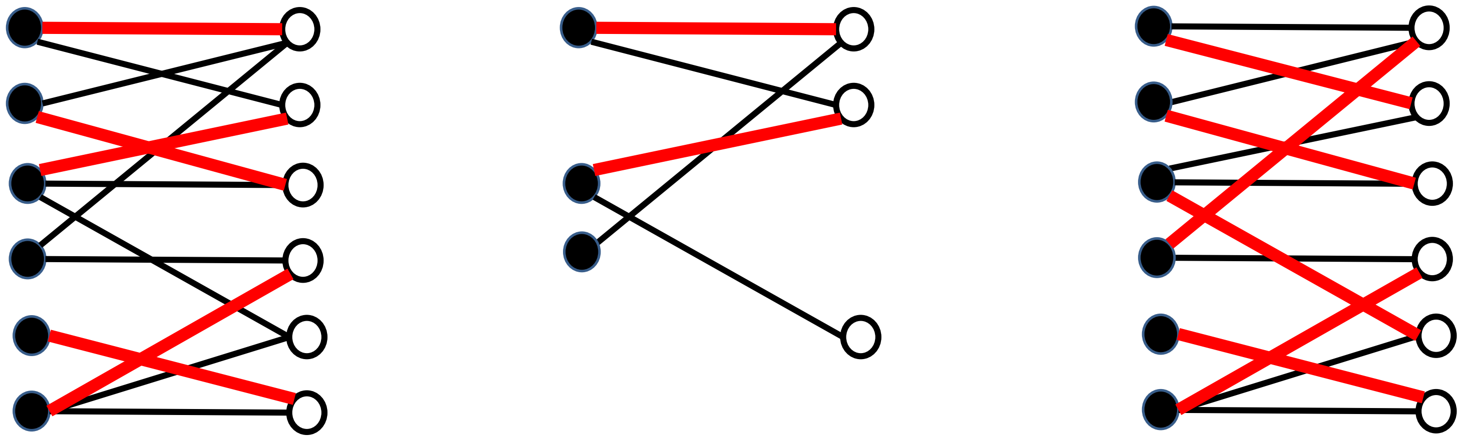
- 学生 と 研究室
- 病院 と 研修医
- 労働者 と 仕事　etc.

増加道

マッチング M に関する

交互道：M と $E - M$ の枝が交互に現れる道

増加道：交互道で両端点が M に接続しない

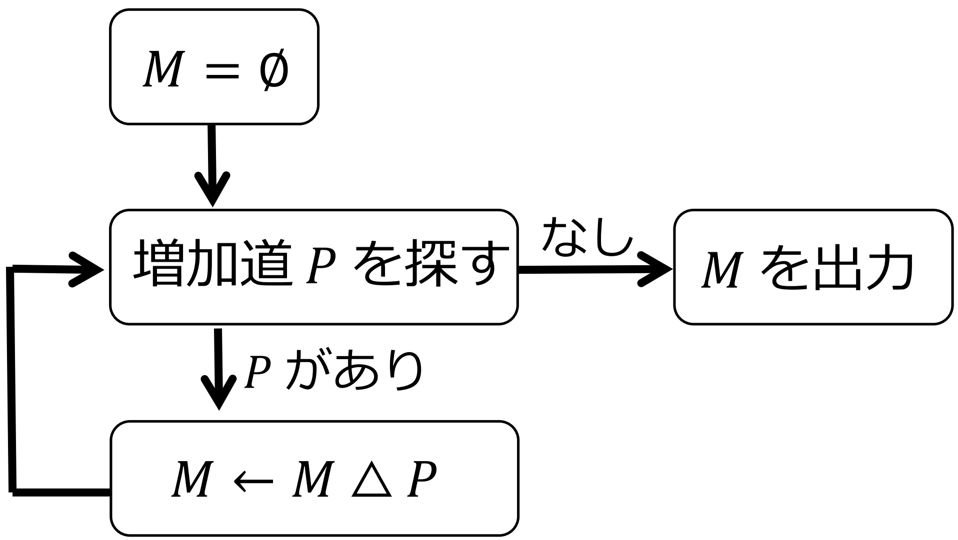


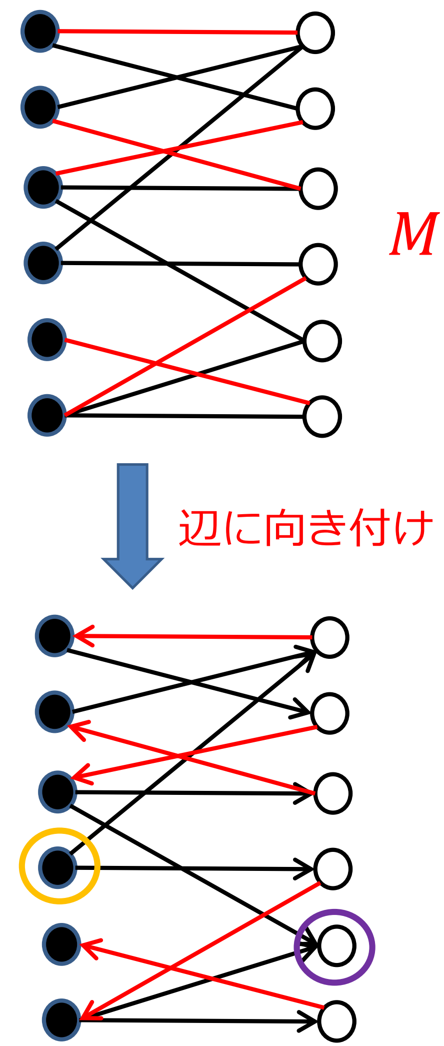
M　　増加道 P　　$M \triangle P$

観察：$M \triangle P$ は M よりサイズが 1 大きいマッチング

増加道アルゴリズム

van der Waerden (1927), Kőnig (1931)





- 出力は最大マッチング？ → <u>演習</u>
- 増加道の探索は簡単？

から への有向パスを探索

<u>Remark</u>

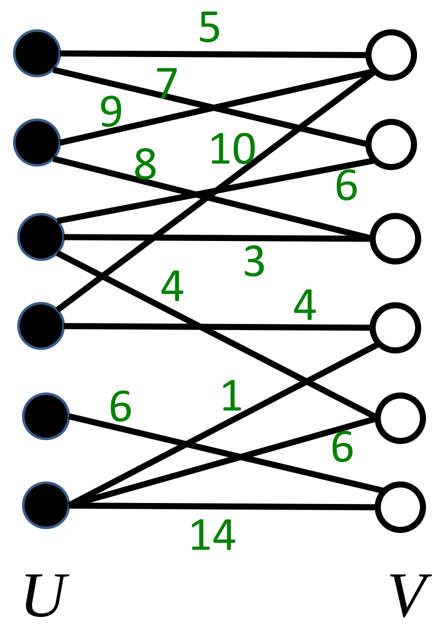
一般グラフでは増加道の探索が大変

重み付きマッチング

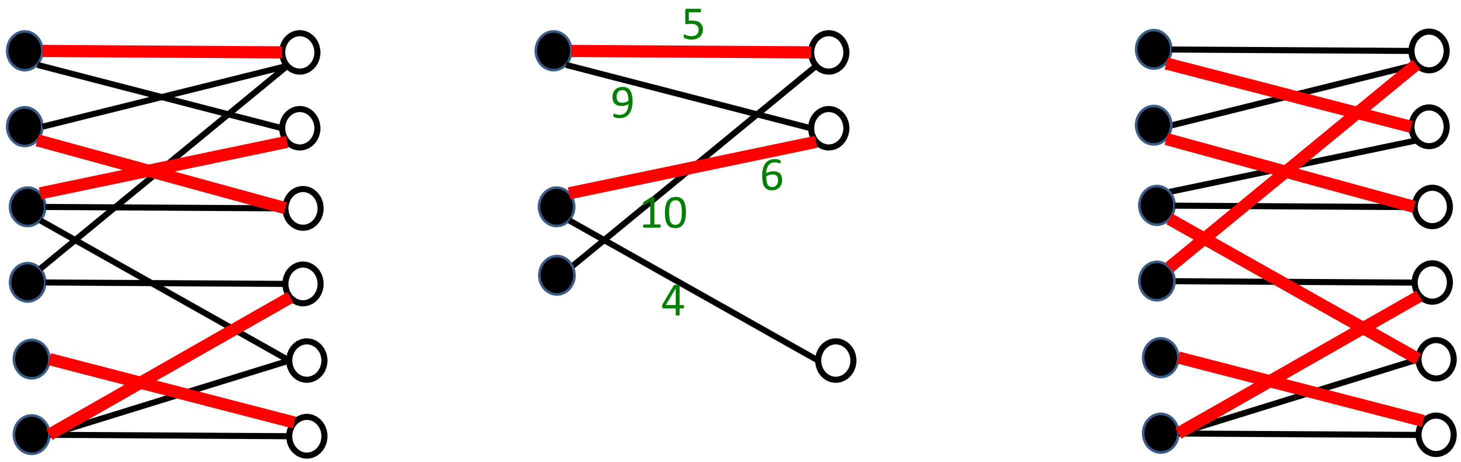
入力: 2部グラフ $G = (U, V; E)$, 枝重み $w(e)$

問題: 最大重みのマッチングは？
最小重みの完全マッチングは？

2つは本質的に等価



増加道による重みの変化



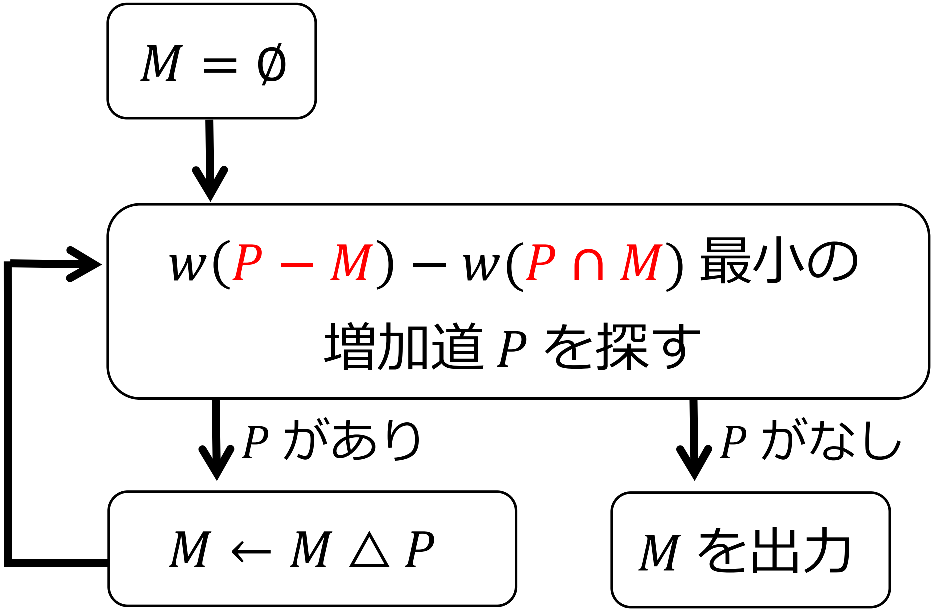
M　　　増加道 P　　　$M \triangle P$

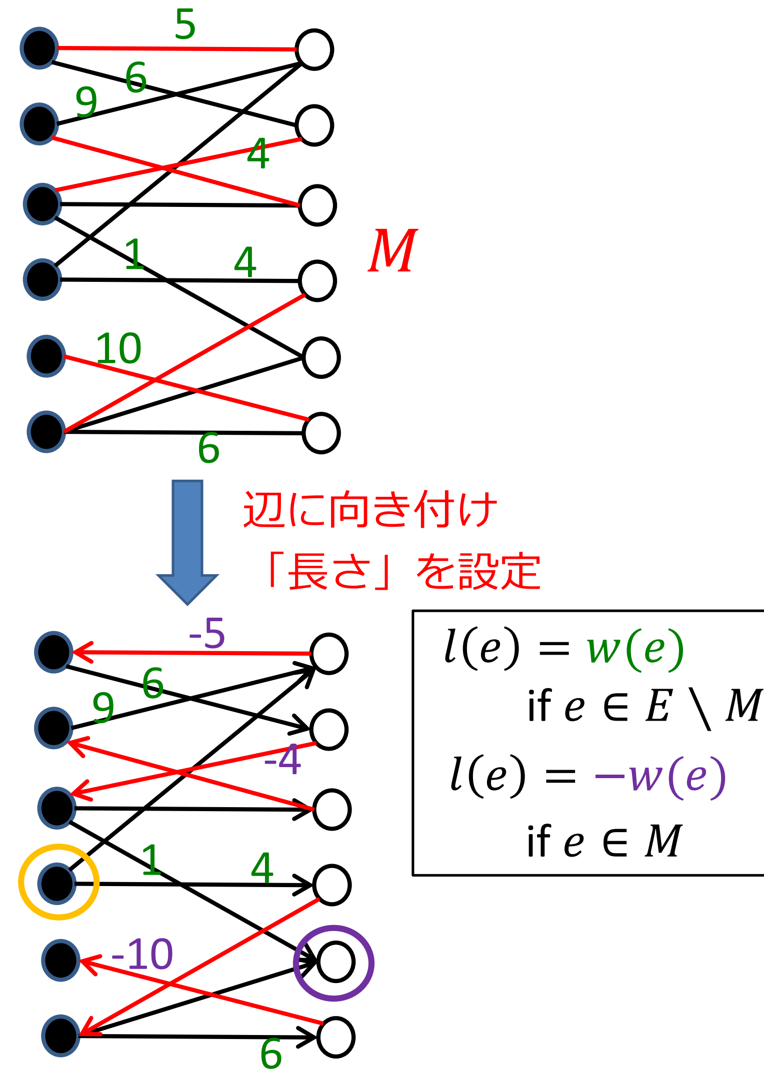
観察：

- ➢ $M \triangle P$ は M よりサイズが１大きいマッチング
- ➢ 重みの増分は $w(P - M) - w(P \cap M)$

最小重み完全マッチングに対するアルゴリズム

(Gが完全マッチングを持つと仮定)





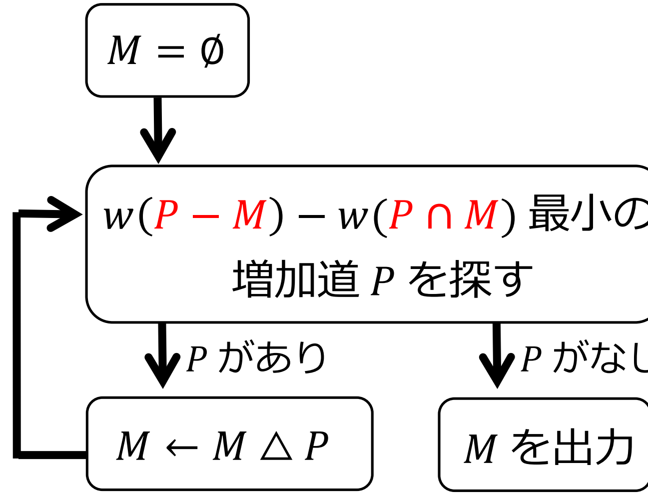
- 出力の最適性？ → 次ページ
- 増加道の探索は簡単？

→ （負閉路がなければ） OK

から への最短パスを探索

出力の最適性

M_i : i 回更新して得られたサイズ i のマッチング



定理

M_i はサイズ i のマッチングの中で最小重み

帰納法　　　（$i = 0$ のときは明らか）

M_i はサイズ i の最小重みマッチングと仮定

P: $\underbrace{w(P - M) - w(P \cap M)}_{=:\ l(P)}$ 最小の増加道

$\Rightarrow$ $w(M_{i+1}) = w(M_i) + l(P)$

N をサイズ $i+1$ のマッチングとする $\Rightarrow$

M_i 増加道 Q が $M_i \cup N$ に存在

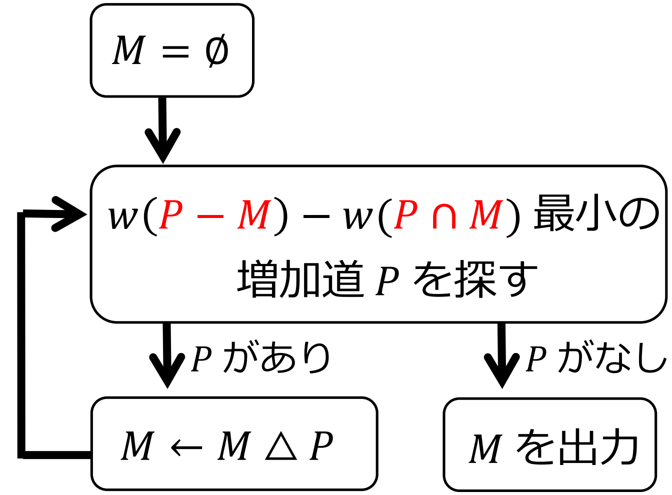
$$w(N) = w(\underbrace{N \triangle Q}_{\text{サイズ } i \text{ のマッチング}}) + l(Q) \geq w(M_i) + l(P) = w(M_{i+1})$$

出力の最適性

M_i : i 回更新して得られたサイズ i のマッチング

定理

M_i はサイズ i のマッチングの中で最小重み



Remarks

- この定理から補助グラフに負閉路がないことも保証される
- 「最大（最小）重みマッチングを求める問題」も同様に解ける

  （各サイズでの最大重みマッチングを求め，その中で最大のものをとる）

  Hungarian Method　Kuhn (1955)　　based on works of Kőnig and Egerváry

２部グラフの完全マッチング多面体

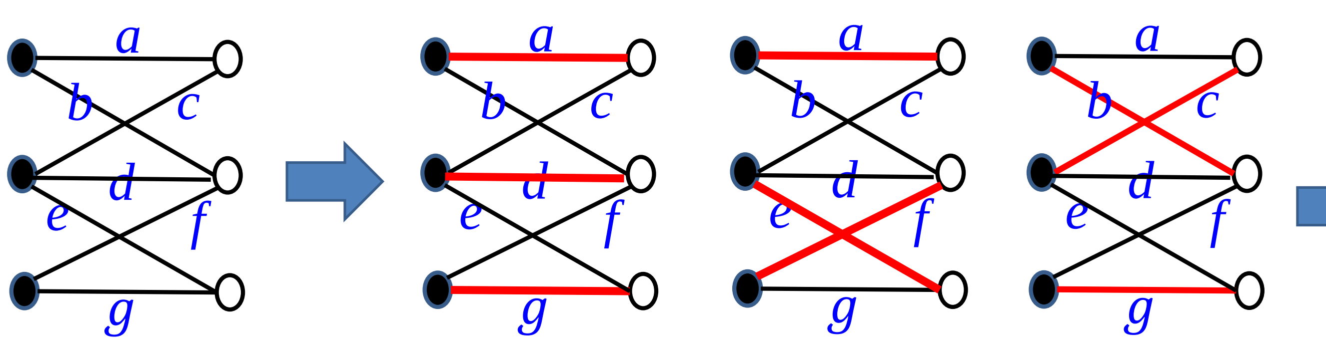
なぜ解けるか？ どのような良い性質があるのか？

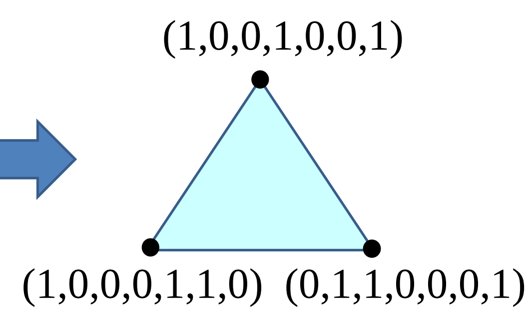
一つの答え： 完全マッチング多面体 の表現があるから

$$\| $$

$$\mathrm{conv}\{\chi_M \mid M \subseteq E : \text{perfect matching}\}$$

（完全マッチングの特性ベクトルの凸包）





(1,0,0,1,0,0,1) (1,0,0,0,1,1,0) (0,1,1,0,0,0,1)

$a\ b\ c\ d\ e\ f\ g$ $a\ b\ c\ d\ e\ f\ g$ $a\ b\ c\ d\ e\ f\ g$

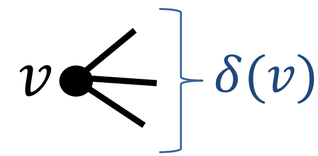
in $\mathbf{R}^E$

２部グラフの完全マッチング多面体

完全マッチング多面体
（完全マッチングの特性ベクトルの凸包）

$$=\quad \begin{array}{ll} \displaystyle\sum_{e\in\delta(v)} x(e) = 1 & (v \in U \cup V) \\ x(e) \geq 0 & (e \in E) \end{array}$$

Egerváry (1931), Birkoff (1946), Dantzig (1951)



<u>Remarks</u>

- $\subseteq$ は簡単．$\supseteq$ が非自明.
- この定理を認めれば，線形計画問題を解くことでも，
  最大（最小）重み完全マッチングを求められる.
- 補助グラフを用いて $\supseteq$ を示す．（他の証明もあり）

２部グラフの完全マッチング多面体

完全マッチング多面体

（完全マッチングの特性ベクトルの凸包）

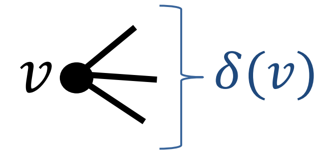
$=$

P

$$\sum_{e\in\delta(v)} x(e) = 1 \quad (v \in U \cup V)$$

$$x(e) \geq 0 \quad (e \in E)$$

Egerváry (1931), Birkoff (1946), Dantzig (1951)



<u>⊇ の証明</u>

P の各頂点が整数であることを示せばよい．

以下の LP と双対を考える．

LP

Min. $\displaystyle\sum_{e\in E} w(e)x(e)$

Sub. to $\displaystyle\sum_{e\in\delta(v)} x(e) = 1 \quad (v \in U \cup V)$

$x(e) \geq 0 \quad (e \in E)$

Dual-LP

Max. $\displaystyle\sum_{v\in U\cup V} y(v)$

Sub. to $y(u) + y(v) \leq w(e)$

$(e = (u, v) \in E)$

LP

Min. $\displaystyle\sum_{e\in E} w(e)x(e)$

Sub. to $\displaystyle\sum_{e\in\delta(v)} x(e) = 1 \quad (v \in U \cup V)$

$x(e) \ge 0 \quad (e \in E)$

Dual-LP

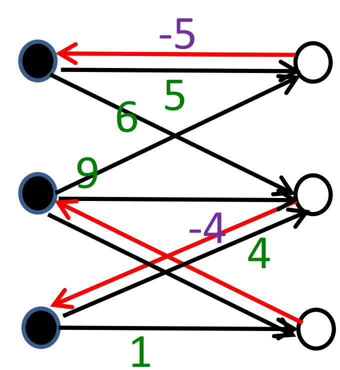
Max. $\displaystyle\sum_{v\in U\cup V} y(v)$

Sub. to $y(u) + y(v) \le w(e)$

$(e = (u, v) \in E)$

最小重み完全マッチング M に対して補助グラフを構成

($e \in M$ に逆向き枝を 追加)



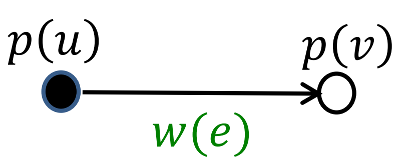
$l(e) = w(e)$ if e : 順向き

$l(e) = -w(e)$ if e : 逆向き

負閉路がないので，$\exists p \in \mathbf{R}^V$

$p(s) + l(e) \ge p(t)$

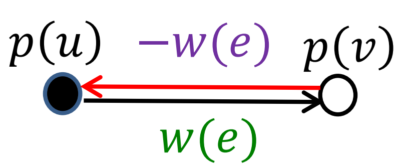
($e = (s, t)$: 有向枝)



$\boxed{-p(u)} + \boxed{p(v)} \le w(e)$

$y(u)$ $y(v)$

$\boxed{-p(u)} + \boxed{p(v)} = w(e)$



$y(u) + y(v) \le w(e)$ for $e \in E$

$y(u) + y(v) = w(e)$ for $e \in M$

LP

Min. $\displaystyle\sum_{e \in E} w(e)x(e)$

Sub. to $\displaystyle\sum_{e \in \delta(v)} x(e) = 1 \quad (v \in U \cup V)$

$x(e) \geq 0 \quad (e \in E)$

Dual-LP

Max. $\displaystyle\sum_{v \in U \cup V} y(v)$

Sub. to $y(u) + y(v) \leq w(e)$

$(e = (u, v) \in E)$

最小重み完全マッチング M

$y(u) + y(v) \leq w(e)$	for $e \in E$
$y(u) + y(v) = w(e)$	for $e \in M$

- $x = \chi_M$ は LP の実行可能解
- y は Dual-LP の実行可能解
- 相補性条件を満たす

⇒ x, y は最適解

任意の w に対して LP は整数最適解を持つ ⇒

$$\sum_{e \in \delta(v)} x(e) = 1 \quad (v \in U \cup V)$$

$$x(e) \geq 0 \quad (e \in E)$$

は完全マッチング多面体

LP

Min. $\sum_{e \in E} w(e)x(e)$

Sub. to $\sum_{e \in \delta(v)} x(e) = 1 \quad (v \in U \cup V)$

$x(e) \geq 0 \quad (e \in E)$

Dual-LP

Max. $\sum_{v \in U \cup V} y(v)$

Sub. to $y(u) + y(v) \leq w(e)$

$(e = (u, v) \in E)$

参考　この証明により，以下も言える：

任意の整数ベクトル w に対して

Dual-LP は整数最適解を持つ

このような性質を持つとき，不等式系（多面体ではない！）

$$\sum_{e \in \delta(v)} x(e) = 1 \quad (v \in U \cup V)$$

$$x(e) \geq 0 \quad (e \in E)$$

は 完全双対整数性 (Total dual integrality) を持つという

２部グラフのマッチングのまとめ

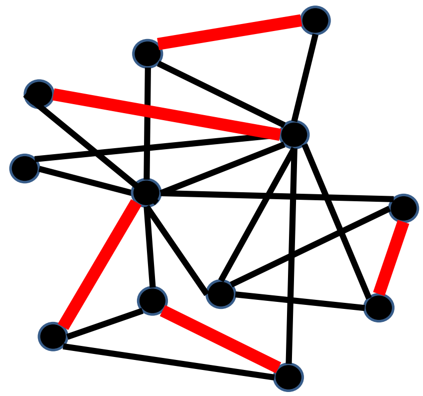
- 増加道を用いた多項式時間アルゴリズム
- 完全マッチング多面体の表現がある
- LP緩和 と 双対問題 が有用

参考：一般グラフのマッチング

入力: グラフ $G=(V, E)$, 枝重み $w(e)$

問題: 最大サイズのマッチングは？

最大重みのマッチングは？



- 増加道を用いた多項式時間アルゴリズムが存在

ブロッサムアルゴリズム Edmonds (1965)

- 多面体の表現

完全マッチング多面体

(完全マッチングの特性ベクトルの凸包)

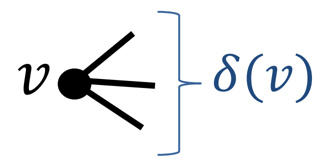
Edmonds (1965)

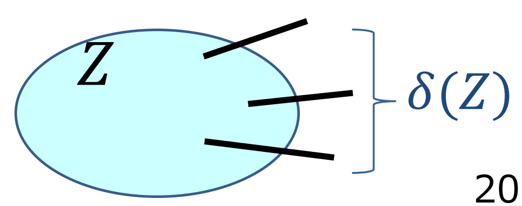
$$=$$

$$\sum_{e\in\delta(v)} x(e) = 1 \qquad (v \in V)$$

$$\sum_{e\in\delta(Z)} x(e) \geq 1 \qquad (Z \subseteq V, |Z|: \mathrm{odd})$$

$$x(e) \geq 0 \qquad (e \in E)$$





マトロイド上の最適化

マトロイド

$\mathbf{M} = (V, \mathcal{F})$ がマトロイド　$(\mathcal{F} \subseteq 2^V)$　　Whitney (1935)

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{array}{|l|}\hline \emptyset \in \mathcal{F} \\ I \subseteq J \in \mathcal{F} \Rightarrow I \in \mathcal{F} \\ \forall I, J \in \mathcal{F}, |I| < |J| \Rightarrow \exists e \in J \setminus I \in \mathcal{F}, I \cup \{e\} \in \mathcal{F} \\ \hline \end{array}$$

独立集合 (independent set)：　$I \in \mathcal{F}$

基 (basis, base)：極大な独立集合

本日の話：線形マトロイド (≒ 行列)

V：行列 A の列集合

$\mathcal{F}$：線形独立な列集合全体

$$A = \overbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}}^{V}$$

マトロイド上の最適化

入力:　（線形）マトロイド $\mathbf{M} = (V, \mathcal{F})$, 非負重み $w(v)$ $(v \in V)$

問題:　最大重みの独立集合は？

$w(v_1) \geq w(v_2) \geq \cdots \geq w(v_n)$ とソートしておく

貪欲アルゴリズム

$I = \emptyset$ と初期化

for $i = 1,2,\ldots,n$

　　if $I + v_i \in \mathcal{F}$,　$I \leftarrow I + v_i$

I を出力

$$A = \begin{array}{c} \overbrace{\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]}^{V} \\ \begin{array}{cccccc} 5 & 6 & 9 & 1 & 4 & \cdots \end{array} \end{array}$$

最適性の証明

$w(v_1) \geq w(v_2) \geq \cdots \geq w(v_n)$

$I = \emptyset$ と初期化
for $i = 1,2,\dots,n$
　if $I + v_i \in \mathcal{F}$,
I を出力

定理

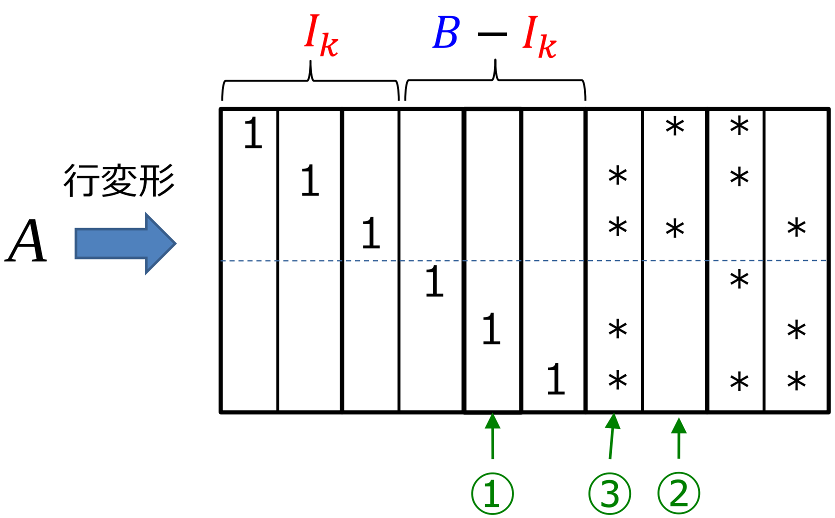
$\forall k$, I_k は最大重み基に含まれる

I_k: $i = k$ まで for 文を適用した I

帰納法　（$k = 0$ のときは明らか）

I_k が最大重み基 B に含まれると仮定

v_{k+1} がどこにあるかで場合分け



① $v_{k+1} \in B - I_k$

$I_{k+1} = I_k + v_{k+1}$ は B に含まれるのでOK

② $I_k + v_{k+1} \notin \mathcal{F}$

$I_{k+1} = I_k$ は B に含まれるのでOK

③ それ以外

$\exists x \in B - I_k$, $B' := B - x + v_{k+1}$ は基

$w(v_{k+1}) \geq w(x)$

⇒ B' は最大重み基

$I_{k+1} = I_k + v_{k+1}$ は B' に含まれるのでOK

独立集合多面体

独立集合多面体
（独立集合の特性ベクトルの凸包）

$$=$$

$$\sum_{v \in U} x(v) \le r(U) \qquad (U \subseteq V)$$
$$x(v) \ge 0 \qquad (v \in V)$$

Edmonds (1970)

ランク関数

$$r(U) \coloneqq \max\{|I| : I \subseteq U, I \in \mathcal{F}\}$$

Remarks

- $\subseteq$ は簡単． $\supseteq$ が非自明.
- 不等式は指数個ある
- 不等式系は，完全双対整数性を持つ