組合せ最適化問題に対する多面体的手法とその発展　２コマ目

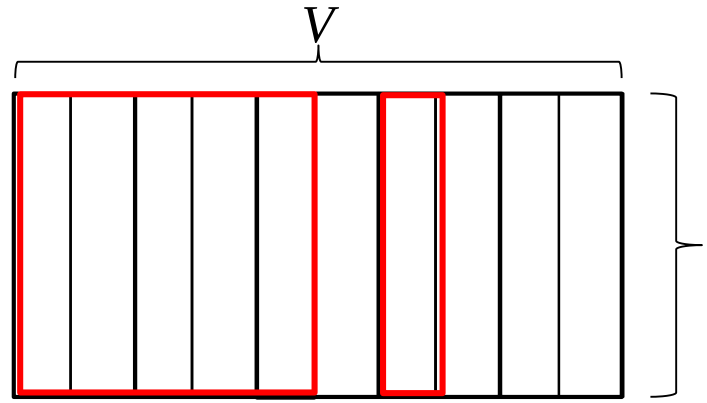
（線形）マトロイド交叉

Edmonds (1968, 1970)

線形マトロイド交叉

入力：

$$A_1 = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{V} \left.\vphantom{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}}\right\} U$$

$A_2 =$ 

共通独立集合 : 列ベクトルの集合がどちらでも一次独立

共通基 B : $A_1[B, U]$ も $A_2[B, U]$ も 正則

問題： 最大の共通独立集合は？

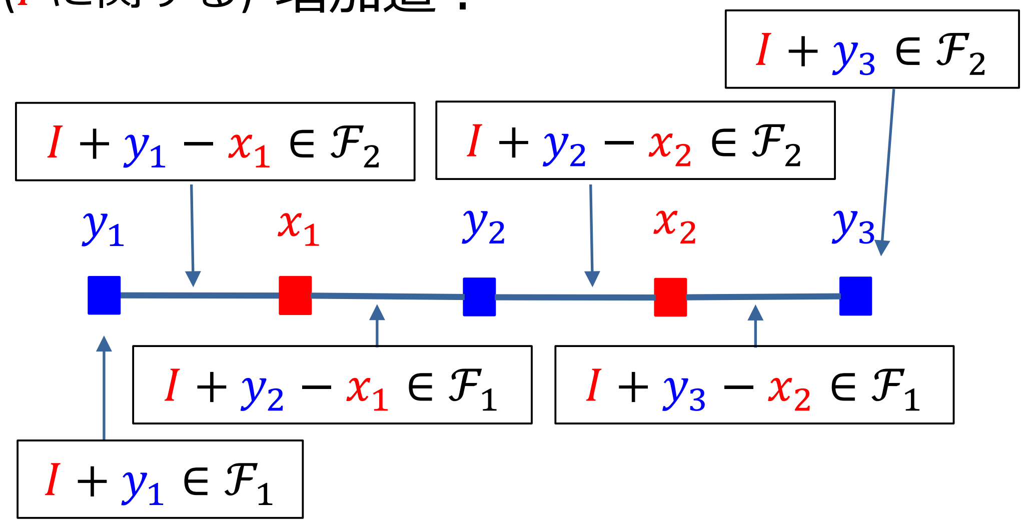
最小重みの 共通基 B は？ （重み $w\colon V \to \mathbf{R}$）

（線形）マトロイド交叉アルゴリズム

入力：（線形）マトロイド $\mathbf{M}_1 = (V, \mathcal{F}_1), \mathbf{M}_2 = (V, \mathcal{F}_2)$

問題： 最大の共通独立集合は？

(I に関する) 増加道：



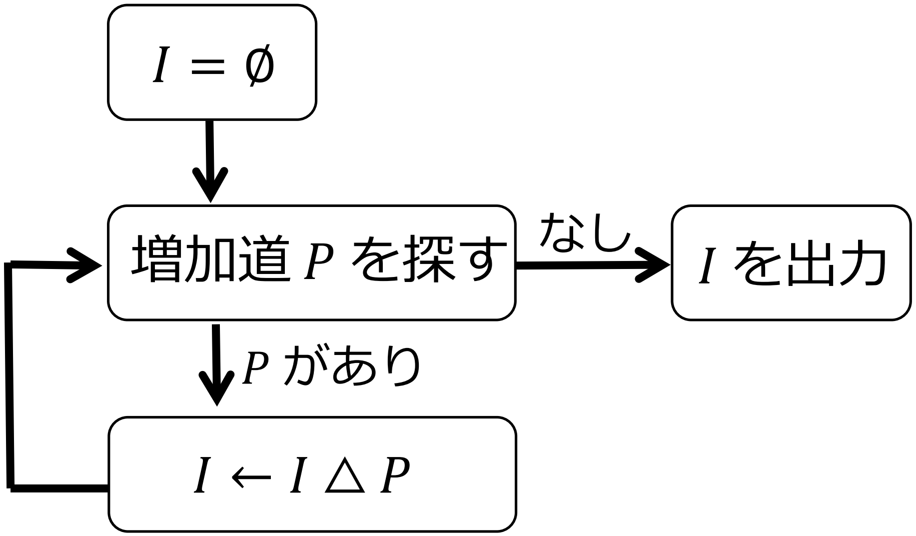
$$A_1 = \begin{array}{cccccccccc} 1 & & & & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & & 2 & 2 & 1 & & 2 & 5 \\ & & 1 & & & & 4 & 2 & & \\ & & & 1 & & & & 2 & 1 & \\ & & & & 1 & & & & 2 & \\ & & & & 4 & & & & & \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \end{array}$$

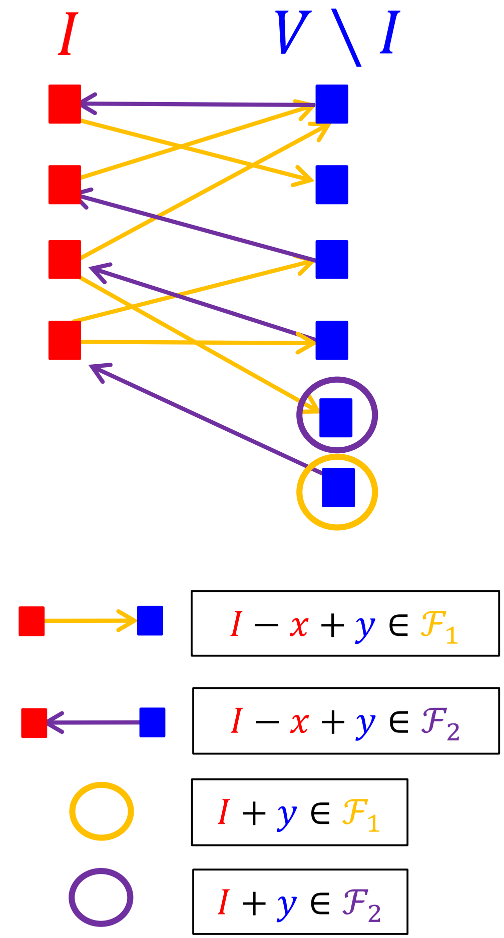
$$A_2 = \begin{array}{cccccccccc} 1 & & & & 3 & 1 & & & & 1 \\ & 1 & & & & 2 & & & 2 & \\ & & 1 & & 2 & & & & & \\ & & & 1 & & & 2 & & 4 & \\ & & & & & & 5 & & & 3 \\ & & & & & & & 1 & & 4 \end{array}$$

$$I = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

- 観察：$I \triangle P$ は I よりサイズが１大きい
- 観察（？）：$I \triangle P$ は共通独立集合？？

増加道アルゴリズム（？）





- $I \triangle P$ は独立集合？
- 出力は最大独立集合？
- 増加道の探索は簡単？ → 補助グラフ上の探索

から への有向パスを探索

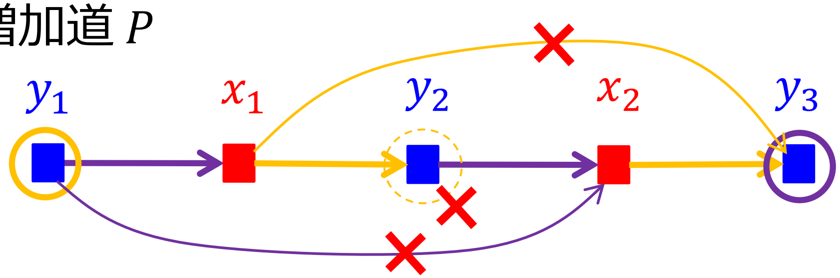
$I \triangle P$ は独立集合

定理

枝数最小の増加道 P に対して，$I \triangle P$ は独立集合
（ショートカットを持たない）

略証

増加道 P



$I - x + y \in \mathcal{F}_1$

$I - x + y \in \mathcal{F}_2$

$I + y \in \mathcal{F}_1$

$I + y \in \mathcal{F}_2$

$$
A_1 = \begin{array}{c}
\left[\begin{array}{cccc|cccccc}
1 & & & & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & & 2 & 2 & 1 & & 2 & 5 \\
 & & 1 & & & & 4 & 2 & & \\
 & & & 1 & & & & 2 & 1 & \\
 & & & & 1 & & & & 2 & \\
 & & & & 4 & & & & &
\end{array}\right] \\
\begin{array}{cccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \end{array}
\end{array}
$$

$$
A_2 = \left[\begin{array}{cccc|cccccc}
1 & & & & & 1 & & & & 1 \\
 & 1 & & & & 2 & & & 2 & \\
 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & 1 & & & 2 & & 4 & \\
 & & & & & & 5 & & & 3 \\
 & & & & & & & 1 & & 4
\end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{c|c}
\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} &
\left[\begin{array}{cccc|ccc}
1 & & & & & \boxed{1} & \boxed{} \\
 & 1 & & & 2 & 2 & \boxed{1} \\
 & & 1 & & & & 4 \\
 & & & 1 & & & \\
 & & & & \boxed{1} & & \\
 & & & & 4 & &
\end{array}\right]
\end{array} \\
\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array}
\end{array}
$$

A_1 の一部

□ の零/非零が確定

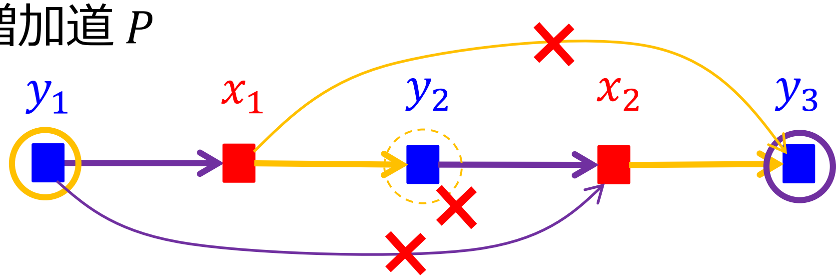
$I \triangle P$ は独立集合

定理

枝数最小の増加道 P に対して，$I \triangle P$ は独立集合
（ショートカットを持たない）

略証

増加道 P



$I - x + y \in \mathcal{F}_1$

$I - x + y \in \mathcal{F}_2$

$I + y \in \mathcal{F}_1$

$I + y \in \mathcal{F}_2$

$A_1 =$

x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
1					1		1		
	1			2	2	1		2	5
		1				4	2		
			1				2	1	
				1				2	
				4					

上三角性が重要！

x_1
x_2

x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3
1					1	
	1			2	2	1
		1				4
			1			
				1		
				4		

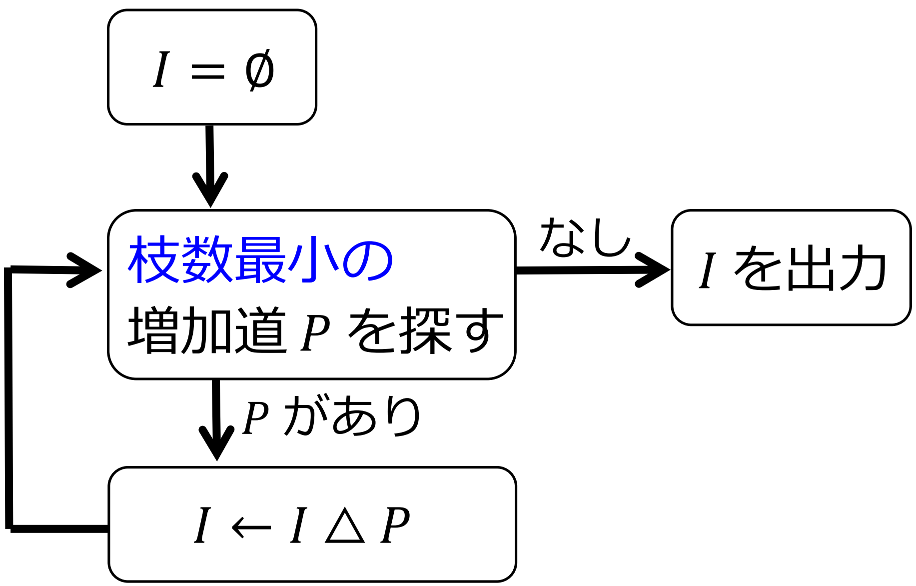
A_1 の一部

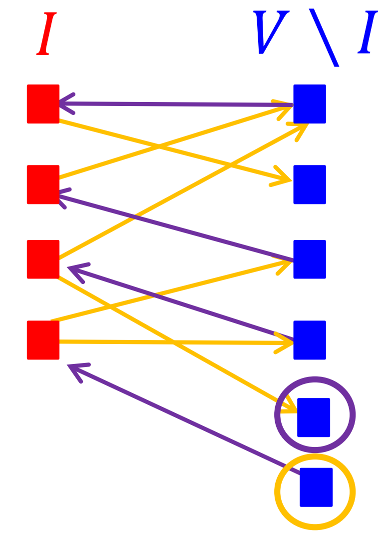
□ の零/非零が確定

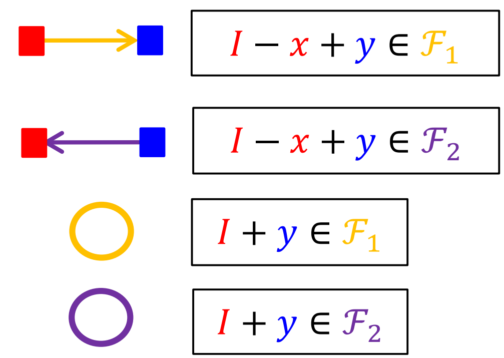
x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3
1					1	
	1			2	2	1
		1				4
			1			
				1		
				4		

は独立

増加道アルゴリズム（修正版）



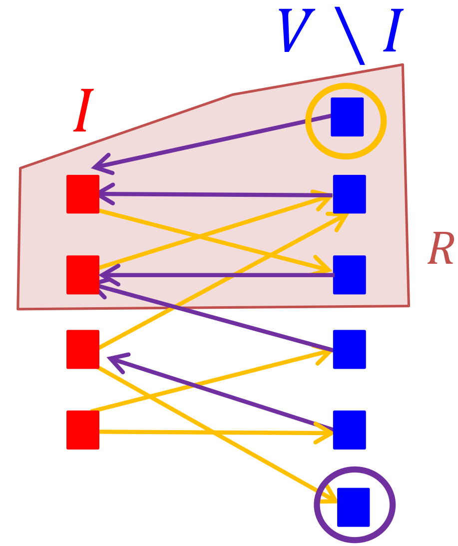




- $I \triangle P$ は独立集合？ → OK
- 出力は最大独立集合？
- 増加道の探索は簡単？ → 補助グラフ上の探索

○ から ○ への有向パスを探索

出力は最大独立集合



○ から ○ への有向パスがないと仮定

⇒ ○ から到達できる点全体を R とする

$$A_1 = \left[\begin{array}{cccc|c|c} 1 & & & & * & * \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & * & 0 \\ & & & 1 & & \\ & & & & * & 0 \end{array}\right]$$

R

$$A_2 = \left[\begin{array}{cccc|c|c} 1 & & & & 0 & * \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & * & * \\ & & & 1 & & \\ & & & & 0 & * \end{array}\right]$$

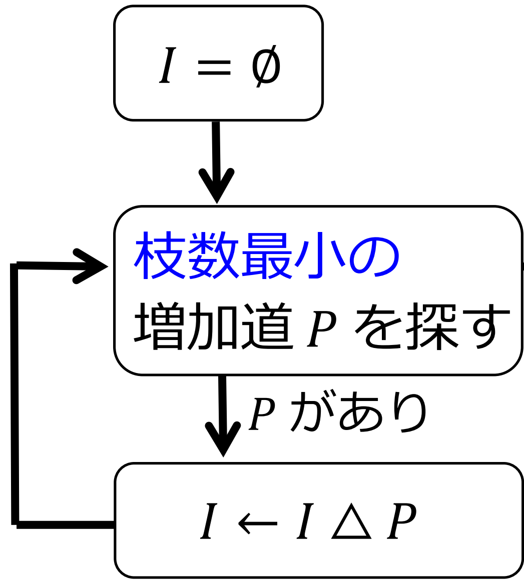
→	$I - x + y \in \mathcal{F}_1$
←	$I - x + y \in \mathcal{F}_2$
○	$I + y \in \mathcal{F}_1$
○	$I + y \in \mathcal{F}_2$

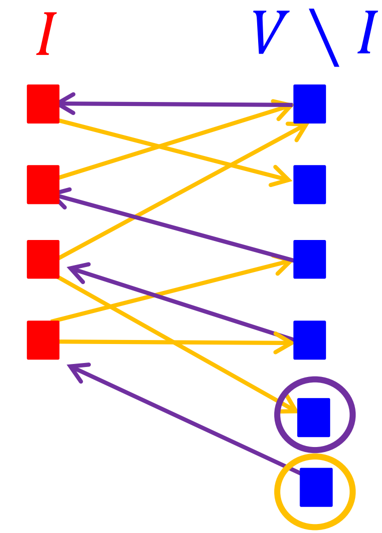
定理

$$\max\{|J| : J \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2\} = \min_{R \subseteq V}\{r_1(V \setminus R) + r_2(R)\}$$

⇒ $|I| = r_1(V \setminus R) + r_2(R) \geq \max\{|J| : J \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2\}$

増加道アルゴリズム（修正版）





$I - x + y \in \mathcal{F}_1$

$I - x + y \in \mathcal{F}_2$

$I + y \in \mathcal{F}_1$

$I + y \in \mathcal{F}_2$

- $I \triangle P$ は独立集合？ → OK
- 出力は最大独立集合？ → OK
- 増加道の探索は簡単？ → 補助グラフ上の探索

○ から ○ への有向パスを探索

重み付き（線形）マトロイド交叉

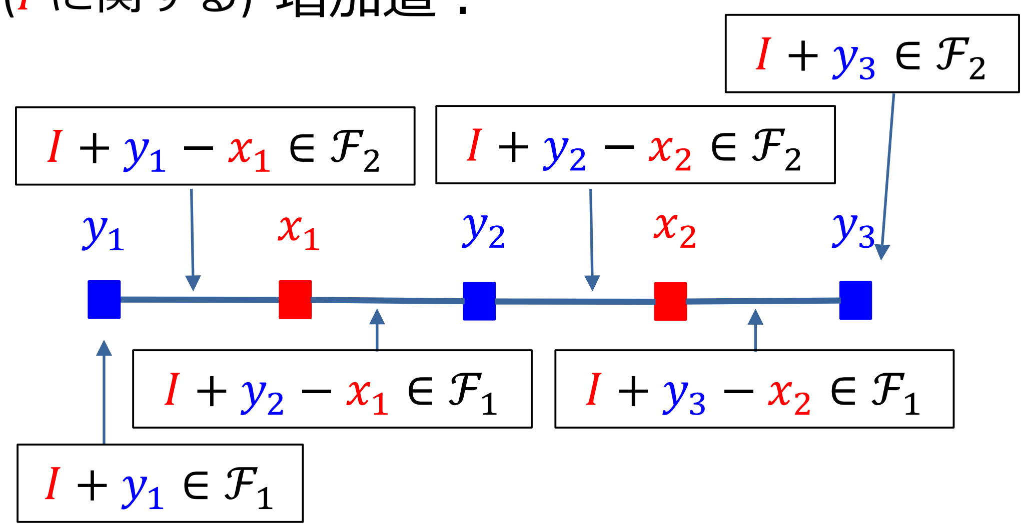
Edmonds (1979), Lawler (1976)
Iri & Tomizawa (1976), Frank (1981)

重み付き（線形）マトロイド交叉

入力：（線形）マトロイド $\mathbf{M}_1 = (V, \mathcal{F}_1), \mathbf{M}_2 = (V, \mathcal{F}_2)$

問題：最小重みの共通基は？　　（重み $w: V \to \mathbf{R}$）

(I に関する) 増加道：



$$A_1 = \begin{array}{cccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ \hline 1 & & & & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & & 2 & 2 & 1 & & 2 & 5 \\ & & 1 & & & & 4 & 2 & & \\ & & & 1 & & & & 2 & 1 & \\ & & & & 1 & & & & 2 & \\ & & & & 4 & & & & & \end{array}$$

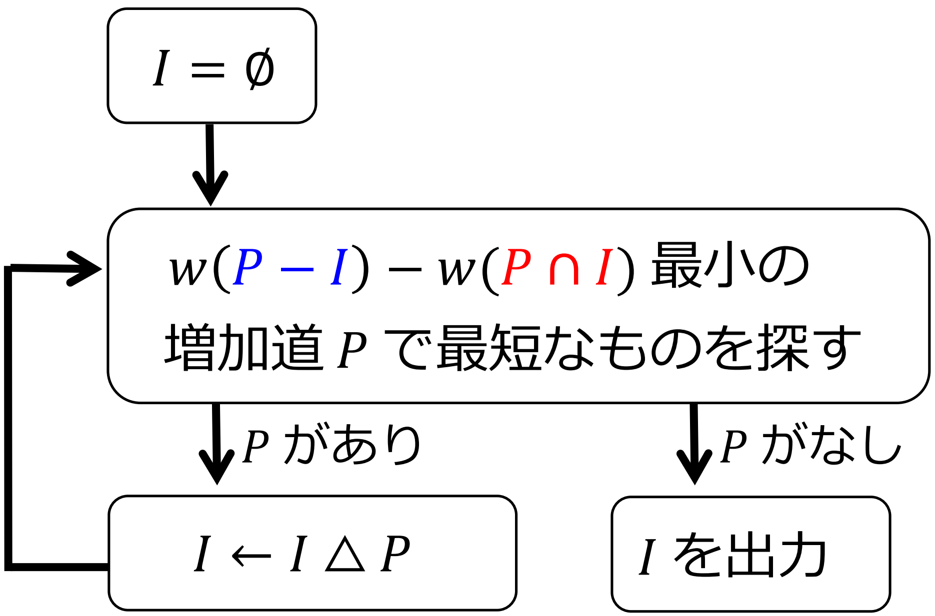
$$A_2 = \begin{array}{cccccccccc} 1 & & & & 3 & 1 & & & & 1 \\ & 1 & & & & 2 & & & 2 & \\ & & 1 & & 2 & & & & & \\ & & & 1 & & & 2 & & 4 & \\ & & & & & & 5 & & & 3 \\ & & & & & & & 1 & & 4 \end{array}$$

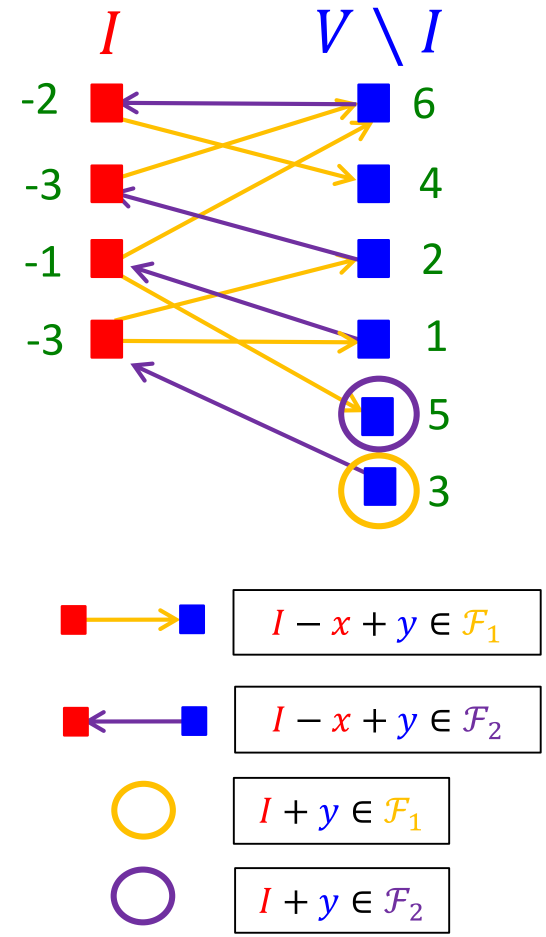
観察：重みの増分は $w(P - I) - w(P \cap I)$

$I = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

最小重み共通基に対するアルゴリズム（？）

(共通基を持つと仮定)





- $I \triangle P$ は独立集合？
- 出力は最小重み共通基？
- 増加道の探索は簡単？ → (負閉路がなければ) OK

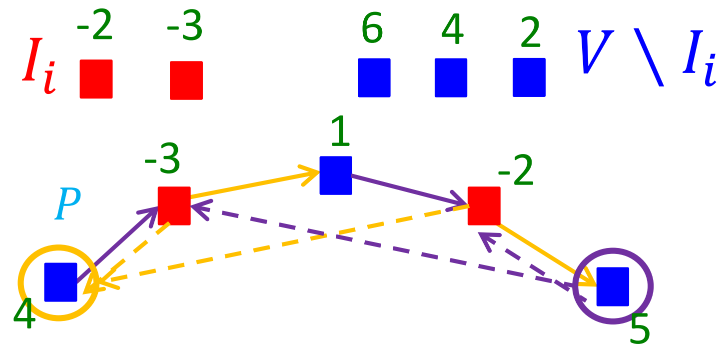
$D(I)$

出力の正当性・最適性

I_i : i 回更新して得られたサイズ i の集合

定理

I_i はサイズ i の最小重み共通独立集合

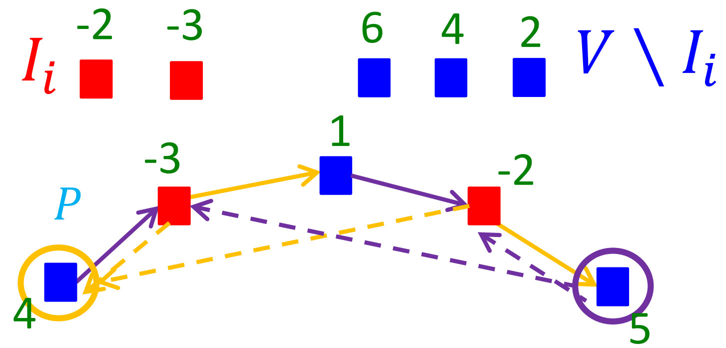


補題（演習問題）

共通独立集合 I がサイズ $|I|$ の中で最小重み ⟺ $D(I)$ が負閉路を持たない

出力の正当性・最適性

I_i : i 回更新して得られたサイズ i の集合



定理

I_i はサイズ i の最小重み共通独立集合

帰納法　　　（$i = 0$ のときは明らか）

- I_i がサイズ i の最小重み共通独立集合と仮定
- P: $l(P)$ 最小の増加道

⇒ $D(I_i)$ が負閉路を持たない

補題（演習問題）

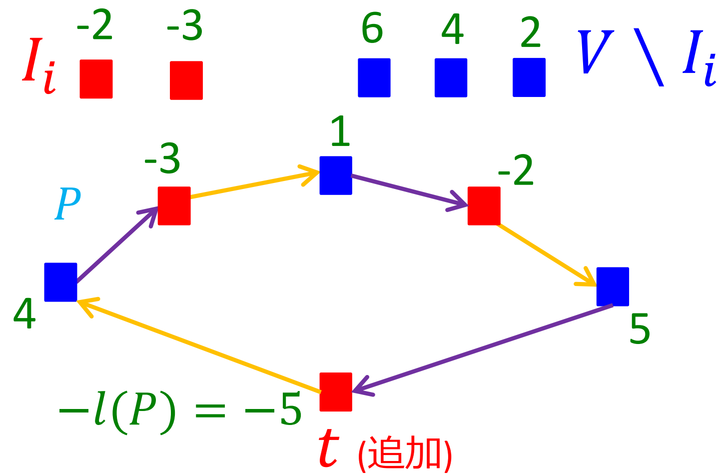
共通独立集合 I がサイズ $|I|$ の中で最小重み ⇔ $D(I)$ が負閉路を持たない

出力の正当性・最適性

I_i : i 回更新して得られたサイズ i の集合

定理

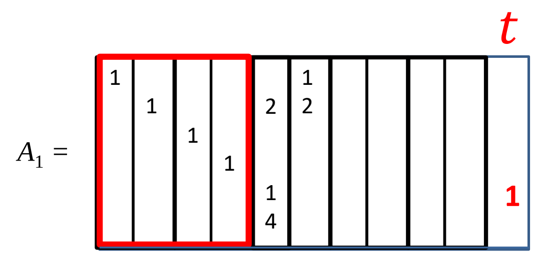
I_i はサイズ i の最小重み共通独立集合



帰納法　　　　（$i = 0$ のときは明らか）

- I_i がサイズ i の最小重み共通独立集合と仮定
- P: $l(P)$ 最小の増加道

⇨ $D(I_i)$ が負閉路を持たない

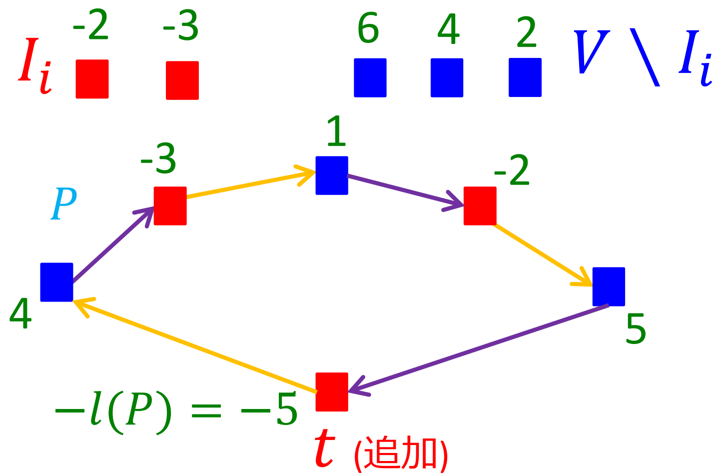


補題（演習問題）

共通独立集合 I がサイズ $|I|$ の中で最小重み ⟺ $D(I)$ が負閉路を持たない

出力の正当性・最適性

I_i : i 回更新して得られたサイズ i の集合

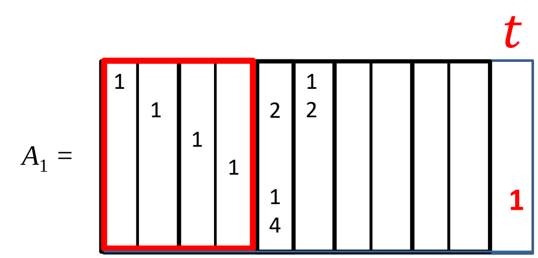


定理

I_i はサイズ i の最小重み共通独立集合

帰納法　　　　（$i = 0$ のときは明らか）

- I_i がサイズ i の最小重み共通独立集合と仮定
- P: $l(P)$ 最小の増加道



⇒ $D(I_i)$ が負閉路を持たない

⇒ $D'(I_i + t)$ が負閉路を持たない
（修正したマトロイドで）

⇒ $I_i + t$ がサイズ $i + 1$ の最小重み共通独立集合
（修正したマトロイドで）

注 ⇒ $I_i \triangle P$ はサイズ $i + 1$ の最小重み共通独立集合

注：$I_i \triangle P$ が共通独立集合なら

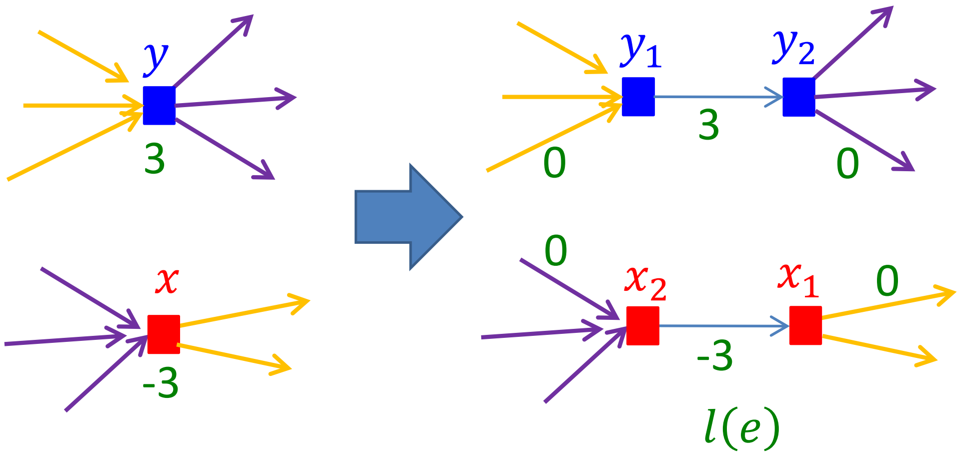
補題（演習問題）

共通独立集合 I がサイズ $|I|$ の中で最小重み ⇔ $D(I)$ が負閉路を持たない

$I_i \triangle P$ は共通独立集合 (1)

注：Pにはショートカットがあるかも

準備：各点を2点に分割（点の重みは見づらいので）

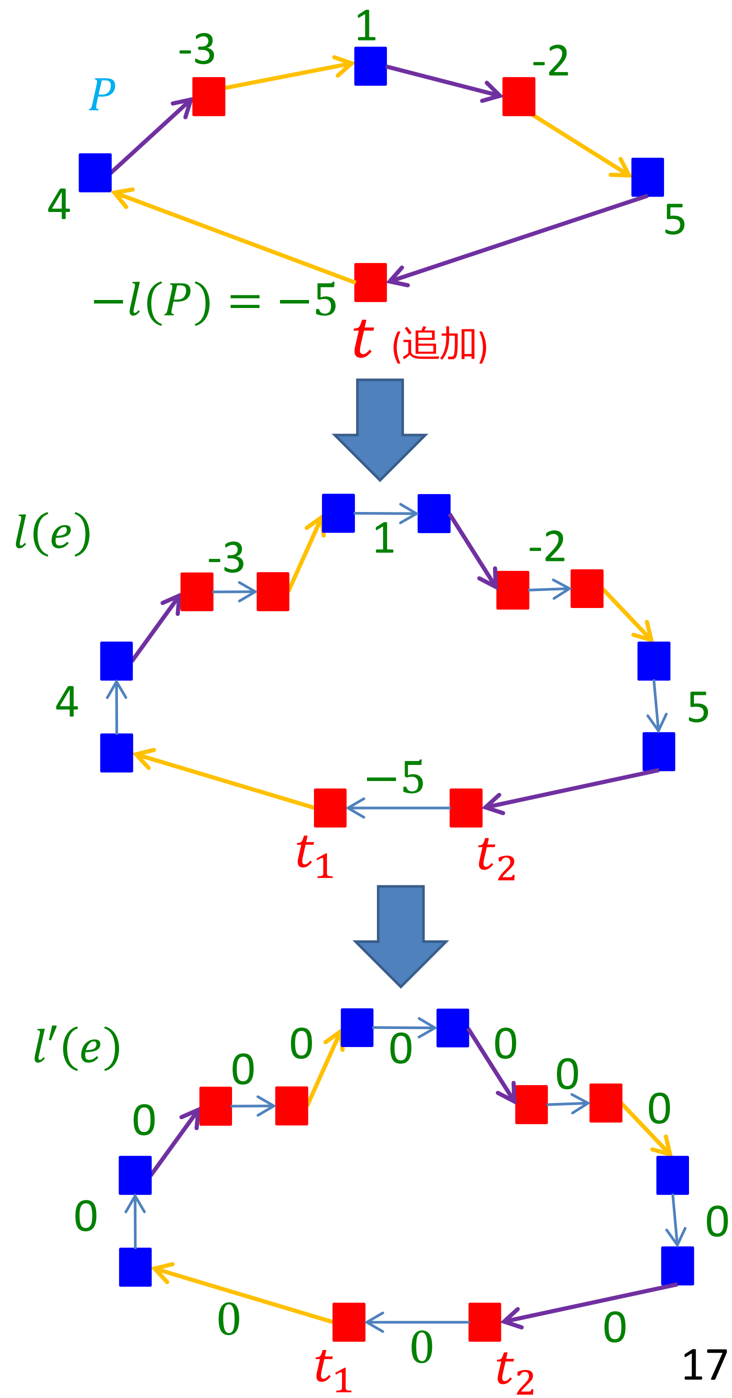


$\exists p \in \mathbf{R}^V$

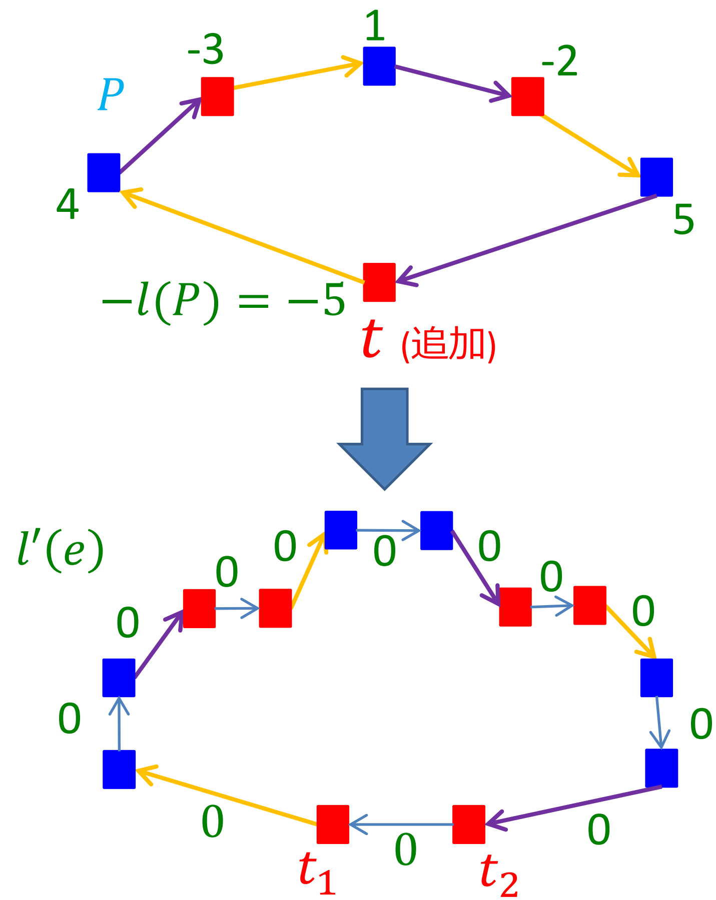
$l'(e) \coloneqq l(e) - p(v) + p(u)$ $(e = (u, v)$: 有向枝)

非負

観察：ショートカットは $l'(e) > 0$



$I_i \triangle P$ は共通独立集合 (2)



$\exists p \in \mathbf{R}^V$

$l'(e) \coloneqq l(e) - p(v) + p(u) \quad (e = (u, v)$: 有向枝)

非負

観察：ショートカットは $l'(e) > 0$

A_1 の P に関係する部分のみ

$$A_1 = \begin{array}{c|cccc|c|ccccc|} \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{4}{c}{I_i \cap P} & \multicolumn{1}{c}{t} & \multicolumn{5}{c}{P \setminus I_i} \\ \hline & 1 & & & & & 1 & & & & * \\ & & 1 & & & & & 1 & & * & \\ & & & 1 & & & * & & 1 & & \\ & & & & 1 & & & * & & 1 & \\ & & & & & 1 & & * & * & & 1 \\ \hline \end{array} \quad \leftarrow l'(e) > 0$$

主張：$\boxed{}$ は正則

略証　正則でないとすると，det に寄与する項が対角以外に存在

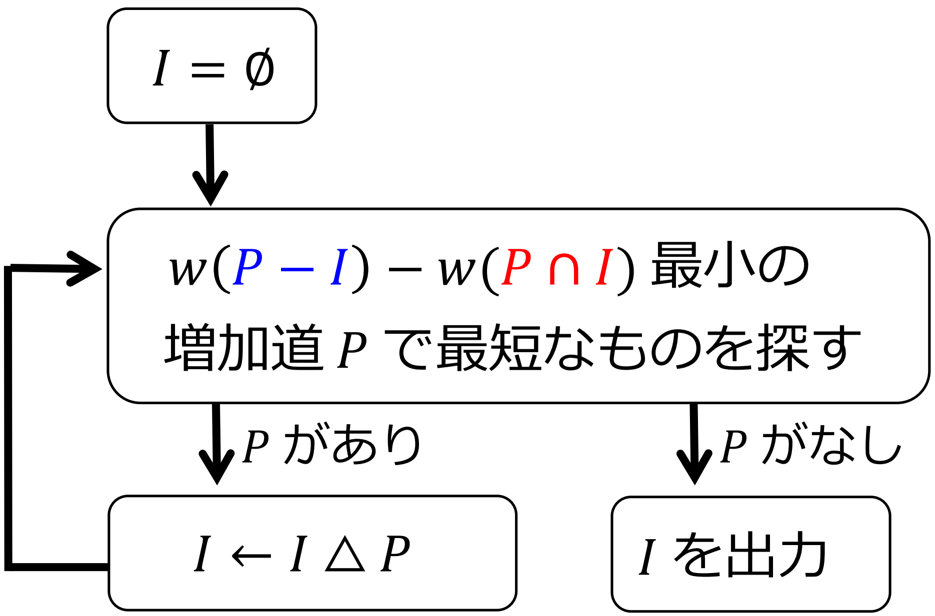
⇨ 各成分に対応する $l'(e)$ は非負，
少なくとも一つは $l'(e) > 0$ の成分を含む

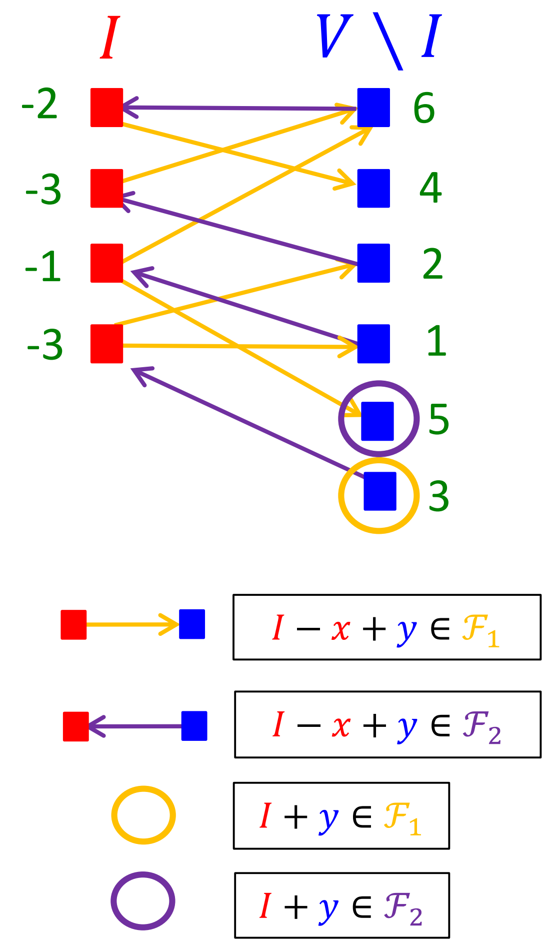
⇨ 各成分に対応する $l'(e)$ の総和は正 ⇨ 矛盾

$I_i \triangle P$ は独立集合

最小重み共通基に対するアルゴリズム

(共通基を持つと仮定)





$D(I)$

- $I \triangle P$ は独立集合？
- 出力は最小重み共通基？

} OK

- 増加道の探索は簡単？ → (負閉路がなければ) OK

マトロイド交叉多面体

マトロイド交叉多面体

マトロイド交叉多面体
$\mathrm{conv}\{\chi_I \mid I \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2\}$

$=$

$$
\begin{aligned}
\sum_{v \in U} x(v) &\le r_1(U) \qquad &(U \subseteq V)\\
\sum_{v \in U} x(v) &\le r_2(U) \qquad &(U \subseteq V)\\
x(v) &\ge 0 \qquad &(e \in V)
\end{aligned}
$$

Remarks

- ⊆は簡単．⊇が非自明.
- 不等式は指数個ある
- 不等式系は，完全双対整数性を持つ

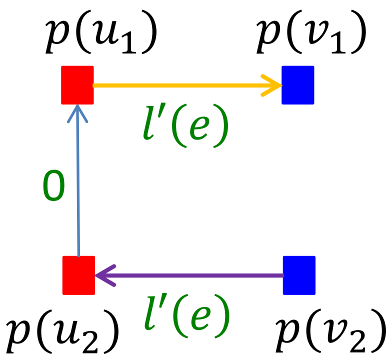
p の性質 （アルゴリズム終了時）

$l'(e) \coloneqq l(e) - p(v) + p(u) \quad (e = (u, v)$: 有向枝)

非負

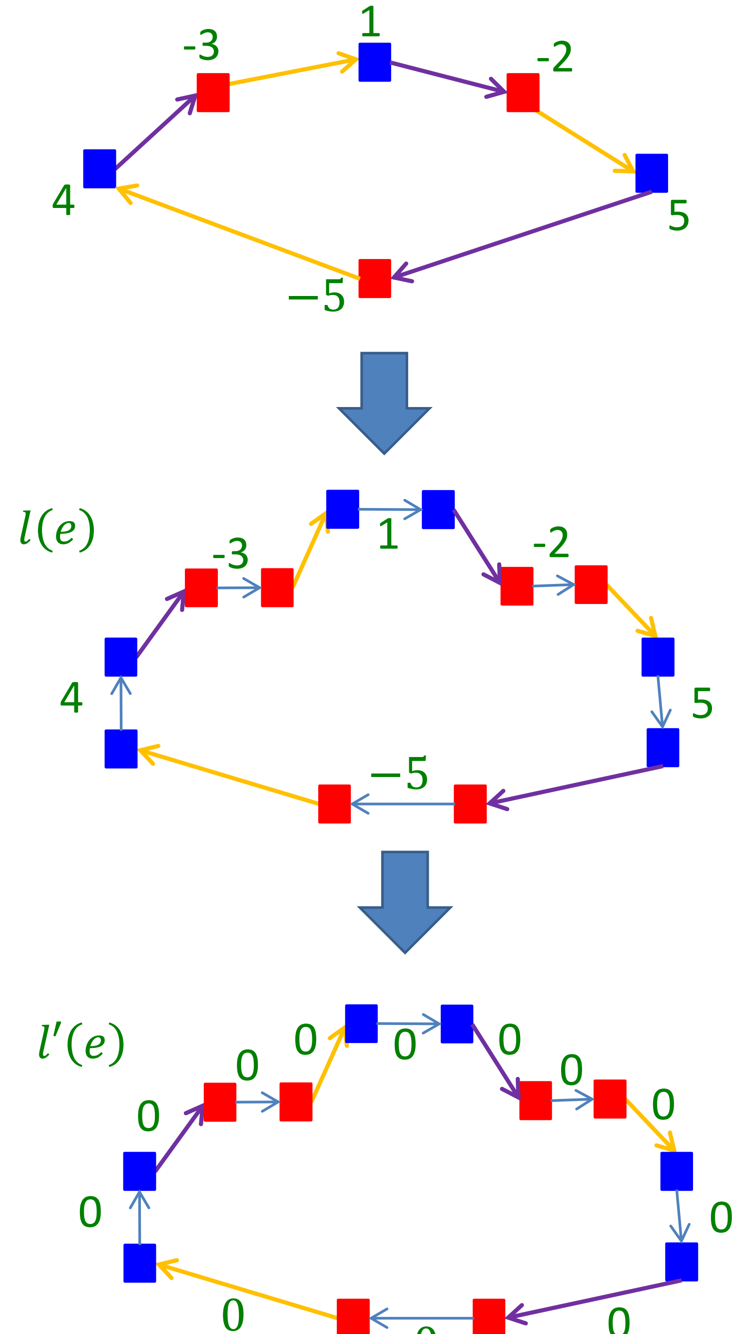
$I - x + y \in \mathcal{F}_1$

$I - x + y \in \mathcal{F}_2$



$p(u_1) \geq p(v_1)$

$p(u_2) \leq p(v_2)$



$p(u_1) - p(u_2) = l(e) = -w(e)$ $\qquad I$

$p(v_2) - p(v_1) = l(e) = w(e)$ $\qquad V \setminus I$

$w_1(u) = -p(u_1) \qquad w_2(u) = p(u_2)$

$w_1(v) = -p(v_1) \qquad w_2(v) = p(v_2)$

とおくと

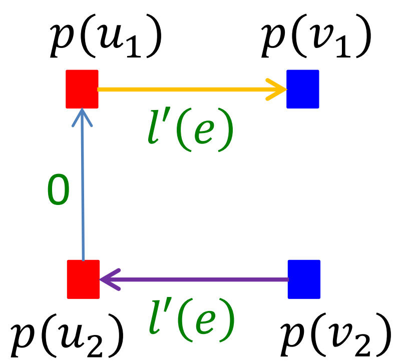
p の性質 （アルゴリズム終了時）

$l'(e) \coloneqq l(e) - p(v) + p(u) \quad (e = (u, v)$: 有向枝)

非負

$\boxed{I - x + y \in \mathcal{F}_1}$

$\boxed{I - x + y \in \mathcal{F}_2}$



$w_1(u) \leq w_1(v)$

$w_2(u) \leq w_2(v)$

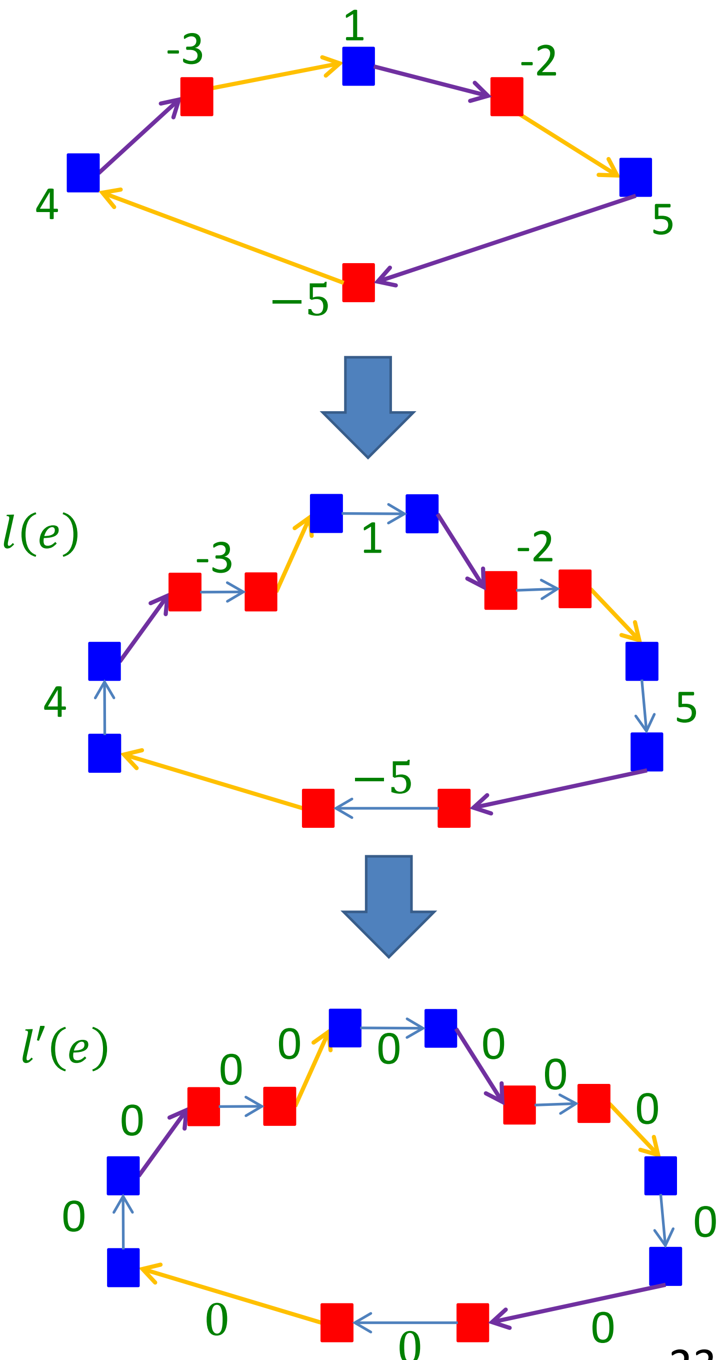
$w_1(u) + w_2(u) = w(e)$

$w_1(v) + w_2(v) = w(e)$

$w_1(u) = -p(u_1) \qquad w_2(u) = p(u_2)$

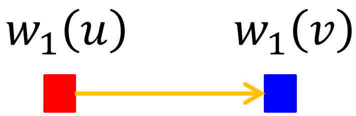
$w_1(v) = -p(v_1) \qquad w_2(v) = p(v_2)$

とおくと



Weight Splitting Theorem

$I - x + y \in \mathcal{F}_1$



$w_1(u) \leq w_1(v)$

$I - x + y \in \mathcal{F}_2$

$w_2(u) \leq w_2(v)$

$w_1(u) + w_2(u) = w(e)$

$w_1(v) + w_2(v) = w(e)$

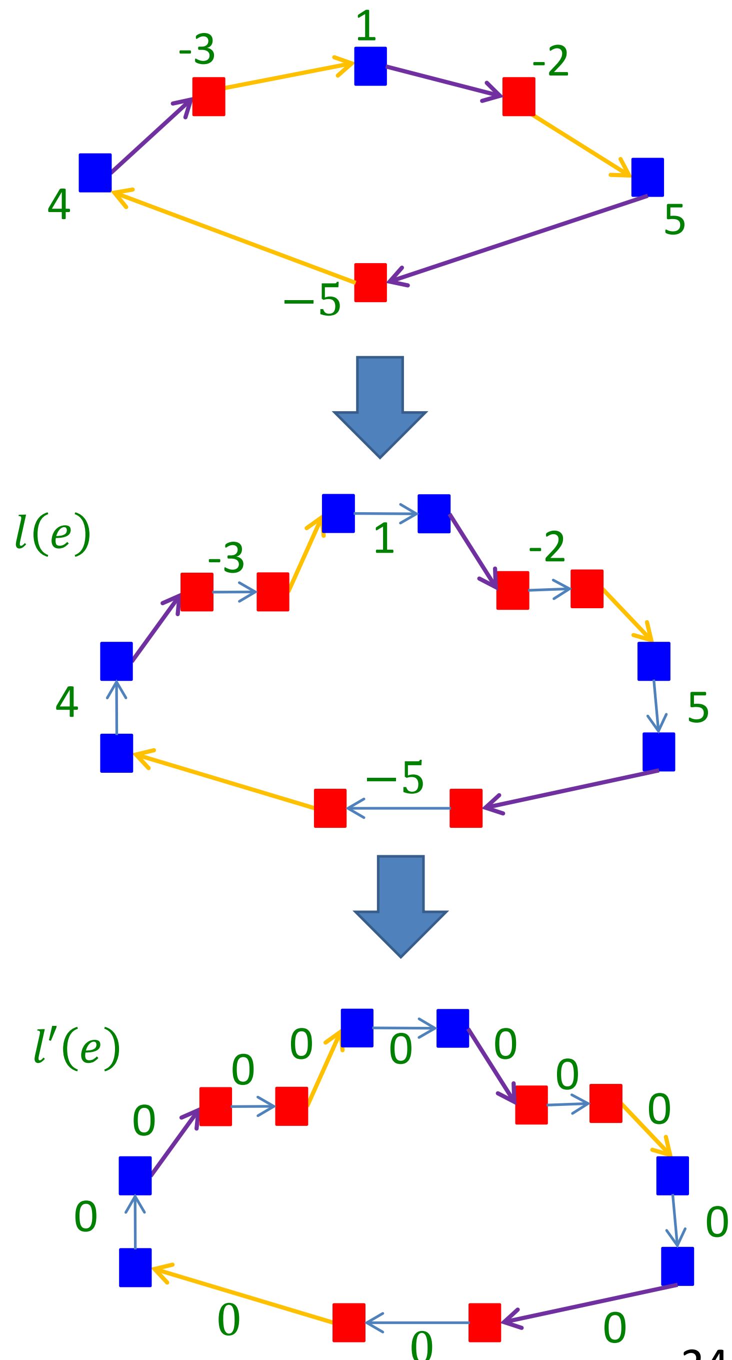
定理

I は w に関する最小重み共通基

⇕

$\exists w_1, w_2 \in \mathbf{R}^V$ with $w_1 + w_2 = w$ s.t.

- I は w_1 に関する $\mathbf{M}_1$ の最小重み基
- I は w_2 に関する $\mathbf{M}_2$ の最小重み基



Weight Splitting Theorem

$I - x + y \in \mathcal{F}_1$

$w_1(u)$ $w_1(v)$

$w_1(u) \leq w_1(v)$

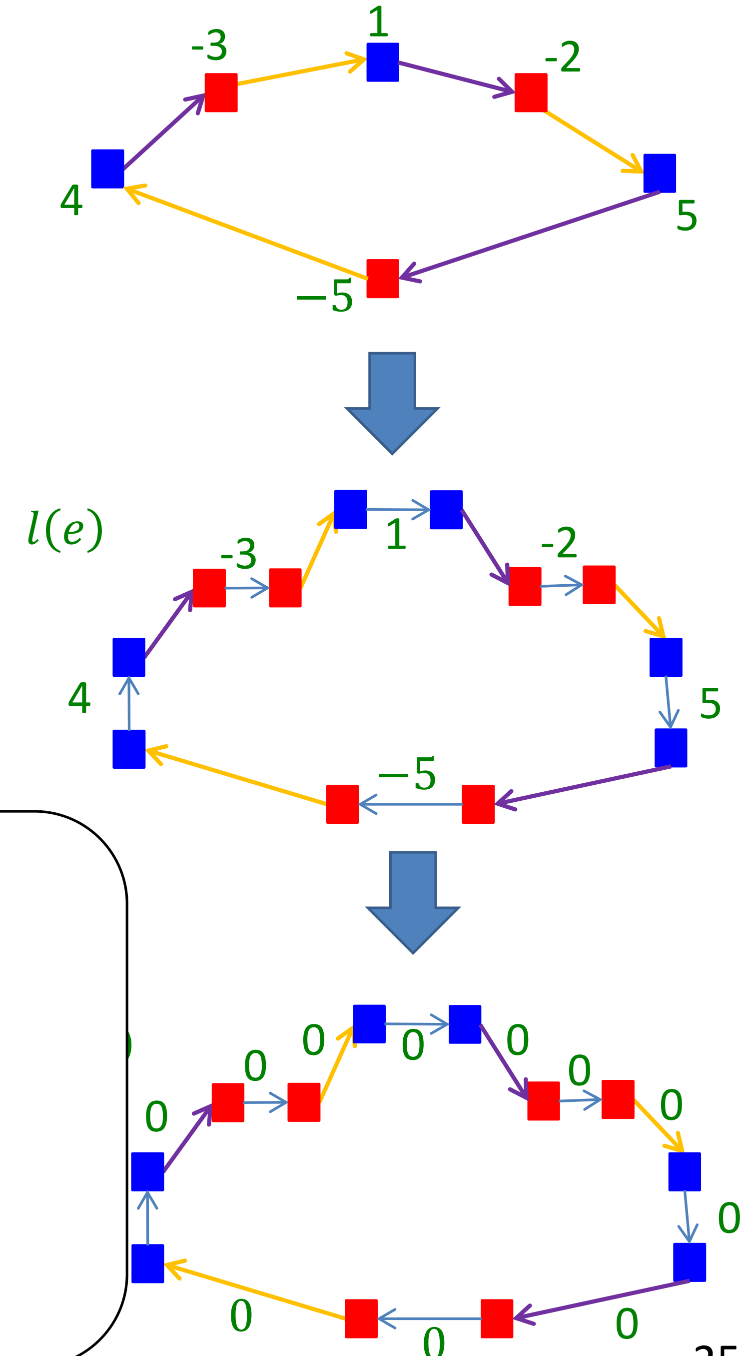
$I - x + y \in \mathcal{F}_2$

$w_2(u)$ $w_2(v)$

$w_2(u) \leq w_2(v)$

$w_1(u) + w_2(u) = w(e)$

$w_1(v) + w_2(v) = w(e)$



定理

I は w に関する最大重み共通独立集合

⇕

$\exists w_1, w_2 \in \mathbf{R}^V$ with $w_1 + w_2 = w$ s.t.

- I は w_1 に関する $\mathbf{M}_1$ の最大重み独立集合
- I は w_2 に関する $\mathbf{M}_2$ の最大重み独立集合

マトロイド交叉多面体

マトロイド交叉多面体
$\mathrm{conv}\{\chi_I \mid I \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2\}$

$=$

P

$$\sum_{v\in U} x(v) \le r_1(U) \qquad (U \subseteq V)$$
$$\sum_{v\in U} x(v) \le r_2(U) \qquad (U \subseteq V)$$
$$x(v) \ge 0 \qquad (e \in V)$$

<u>$\supseteq$ の証明</u>

P の各頂点が整数であることを示せばよい.

以下の LP と双対を考える.

LP

Max. $\displaystyle\sum_{v\in V} w(v)x(v)$

Sub. to $x \in$ **P**

Dual-LP

Min. $\displaystyle\sum_{U\subseteq V} (r_1(U)y_1(U) + r_2(U)y_2(U))$

Sub. to $\displaystyle\sum_{U:v\in U} (y_1(U) + y_2(U)) \ge w(v)$ $\quad (v \in V)$

$y_1, y_2 \ge 0$

$\boxed{\text{LP}}$ の最適値 $\geq$ 共通独立集合の最大重み

これの等号を示したい

$$= \max\{w_1(X) : X \in \mathcal{F}_1\} + \max\{w_2(X) : X \in \mathcal{F}_2\} \quad (w_1 + w_2 = w)$$

Weight Splitting Theorem

$$= \max\{\sum_{v \in V} w_1(v)x(v) : \sum_{v \in U} x(v) \leq r_1(U) \ \ (\forall U \subseteq V), x \geq 0\}$$

独立集合多面体の整数性

$$+ \max\{\sum_{v \in V} w_2(v)x(v) : \sum_{v \in U} x(v) \leq r_2(U) \ \ (\forall U \subseteq V), x \geq 0\}$$

$$= \min\{\sum_{U \subseteq V} r_1(U)y_1(U) : \sum_{U:\, v \in U} y_1(U) \geq w_1(v) \ \ (\forall v \in V), y_1 \geq 0\}$$

双対性

$$+ \min\{\sum_{U \subseteq V} r_2(U)y_2(U) : \sum_{U:\, v \in U} y_2(U) \geq w_2(v) \ \ (\forall v \in V), y_2 \geq 0\}$$

y_1, y_2 は $\boxed{\text{Dual-LP}}$ の実行可能解

$\geq$ $\boxed{\text{Dual-LP}}$ の最適値 $=$ $\boxed{\text{LP}}$ の最適値

双対性

Dual-LP

Min. $\sum_{U \subseteq V} (r_1(U)y_1(U) + r_2(U)y_2(U))$

Sub. to $\sum_{U:v \in U} (y_1(U) + y_2(U)) \geq w(v) \quad (v \in V)$

$y_1, y_2 \geq 0$

マトロイド交叉のまとめ

- （重み付き）マトロイド交叉は多項式時間で解ける
- 増加道による更新を繰り返せばよい
- 「ショートカットの無い」増加道 が重要

  ⇨ 対応する行列の上三角性
- マトロイド交叉多面体の表現が知られている