組合せ最適化問題に対する多面体的手法とその発展　３コマ目

重み付き線形マトロイドパリティ

主結果

重み付き線形マトロイドパリティ問題 に対して

初の多項式時間アルゴリズムを与えた

Iwata-Kobayashi (2017)

重み付き線形マトロイドパリティ問題 とは．．．？

- 重み付き線形マトロイドマッチング問題とも呼ばれる
- 重み付き2部グラフマッチングの 一般化の一般化
- 30年以上多項式時間可解性が未解決だった

線形マトロイドパリティ問題

線形マトロイドパリティ

重み無し：Lovász (1978)

重み付き：Iwata-Kobayashi (2017+), Pap (??)

一般グラフのマッチング

重み無し：Edmonds (1965)

重み付き：Edmonds (1965)

（線形）マトロイド交叉

重み無し：Edmonds (1968)

重み付き：Lawler (1975)
Iri-Tomizawa (1976)
Edmonds (1979)

2部グラフのマッチング

重み無し：van der Waerden (1927), Kőnig (1931)

重み付き： Egerváry (1931), Kuhn (1955)

線形マトロイドパリティ (or Matroid matching or Matchoid)

入力：

$$A = \left.\overbrace{\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]}^{V}\right\} U$$

ライン $l = \{u, \bar{u}\} \in L$

パリティ集合: ラインの和集合

問題： 最大サイズの 独立パリティ集合

線形マトロイドパリティ (or Matroid matching or Matchoid)

入力：

$$A = \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}}^{V} \left.\vphantom{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}}\right\} U$$

ライン $l = \{u, \bar{u}\} \in L$

パリティ集合: ラインの和集合

問題： 最大サイズの 独立パリティ集合

重み付き線形マトロイドパリティ

入力：

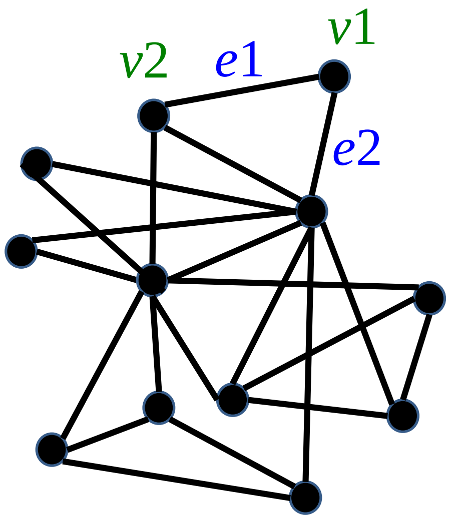
$$A = \left.\overbrace{\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]}^{V}\right\} U$$

ライン $l = \{u, \bar{u}\} \in L$

パリティ基: パリティ集合 & 基

問題： 最小重みのパリティ基　（重み $w\colon L \to \mathbf{R}$）

マッチング → 線形マトロイドパリティ



$$A = \begin{array}{c|cc|cc|}
 & e1 & & e2 & \\
v1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
v2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

マッチング ⇔ 独立パリティ集合

完全マッチング ⇔ パリティ基

線形マトロイド交叉 → 線形マトロイドパリティ

$$A_1 = \begin{array}{ccc} e & f & \\ \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} 1 & 1 & 0 & & & & & \\ 1 & 0 & 1 & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 1 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & \end{array}\right] \end{array}$$

$$A_2 = \begin{array}{ccc} e & f & \\ \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} 1 & 0 & 1 & & & & & \\ 2 & 1 & 0 & & & & & \\ 3 & 3 & 4 & & & & & \\ 4 & 0 & 2 & & & & & \\ 0 & 1 & 2 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & \end{array}\right] \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{cccccc} e & f & A_1 & & & \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ \hline & & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 2 & 1 & 0 \\ & 0 & & 3 & 3 & 4 \\ & & & 4 & 0 & 2 \\ & & & 0 & 1 & 2 \\ & & & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ & & & e & f & A_2 \end{array}$$

ライン

共通独立集合 ⟺ 独立パリティ集合

共通基 ⟺ パリティ基

線形マトロイドパリティ問題

線形マトロイドパリティ
重み無し：Lovász (1978)
重み付き：Iwata-Kobayashi (2017+), Pap (??)

一般グラフのマッチング
重み無し：Edmonds (1965)
重み付き：Edmonds (1965)

（線形）マトロイド交叉
重み無し：Edmonds (1968)
重み付き：Lawler (1975)
Iri-Tomizawa (1976)
Edmonds (1979)

2部グラフのマッチング
重み無し：van der Waerden (1927), Kőnig (1931)
重み付き： Egerváry (1931), Kuhn (1955)

応用

➢ （重み無し）線形マトロイドパリティ

- Structural solvability analysis of electric networks　Milić (1974)
- Pinning down planar skeleton structures　Lovász (1980)
- Feedback vertex set in subcubic graphs　Ueno, Kajitani, and Gotoh (1988)
- Maximum genus cellular embedding　Furst, Gross, McGeoch (1988)
- Maximum number of disjoint S-paths　Lovász (1980), Schrijver (2003)

➢ 重み付き線形マトロイドパリティ

- Approximation algorithm for Steiner Tree　Prömel & Steger (2000)
- Weighted disjoint S-paths　Yamaguchi (2016)
- Weighted Feedback vertex set in subcubic graphs　Kobayashi & Yamaguchi (2017)

既存アルゴリズム

$|V|=n,\ \ |U|=m$

➢ （重み無し）線形マトロイドパリティ

Authors	Running time	
Lovász (1978)	Polynomial	
Gabow & Stallmann (1986)	$O(nm^3)$	(or $O(nm^{2.38})$)
Orlin & Vande Vate (1990)	$O(nm^4)$	(or $O(nm^{3.38})$)
Orlin (2008)	$O(nm^3)$	(or $O(nm^{2.38})$)
Cheung, Lau, Leung (2011)	$O(nm^2)$	(or $O(nm^{1.38})$)

← 乱択

➢ 重み付き線形マトロイドパリティ

- Camerini, Galbiati, and Maffioli (1992)
- Cheung, Lau, and Leung (2014)

乱択・擬多項式

アルゴリズム

提案アルゴリズムの方針・ポイント

- アルゴリズム
  - 増加道アルゴリズム

    (重み無し版に対する Gabow and Stallmann のアルゴリズムを元に)
  - “主双対アプローチ”

注意: 明示的な LP 表現は与えていない

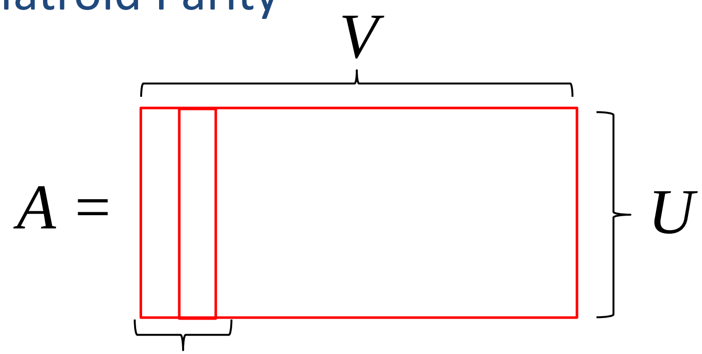
- 最適性の保証
  - “双対変数”の性質
  - 多項式行列の Pfaffian を用いた定式化
  - 組合せ緩和の思想　Murota (1990)

Augmenting Path Algorithm (unweighted)

Gabow and Stallmann (1986)

Linear Matroid Parity

Input



Line $l = \{u, \bar{u}\} \in L$

Parity set: union of lines

w.l.o.g. assume that A is row-full rank

Find An independent parity set of maximum size

Augmenting Path Algorithm (unweighted)

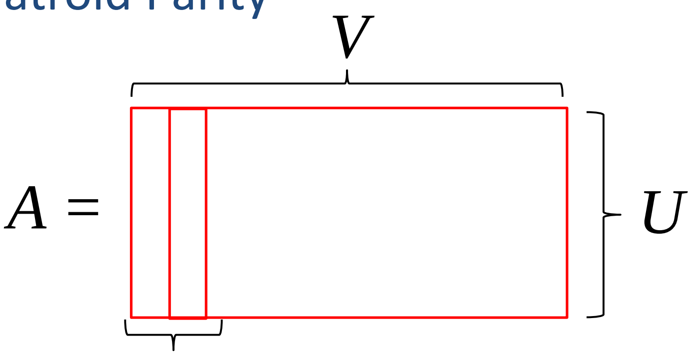
Gabow and Stallmann (1986)

Initial Solution

B : an arbitrary base

Linear Matroid Parity

Input



Line $l = \{u, \bar{u}\} \in L$

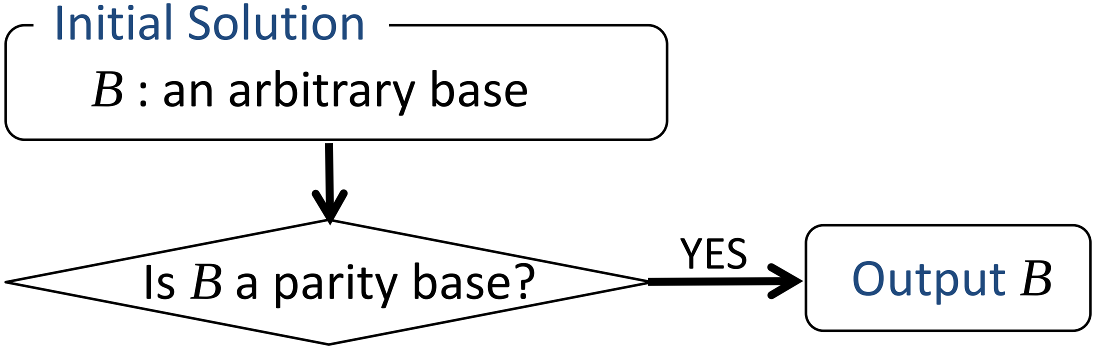
Parity set: union of lines

w.l.o.g. assume that A is row-full rank

Find An independent parity set of maximum size

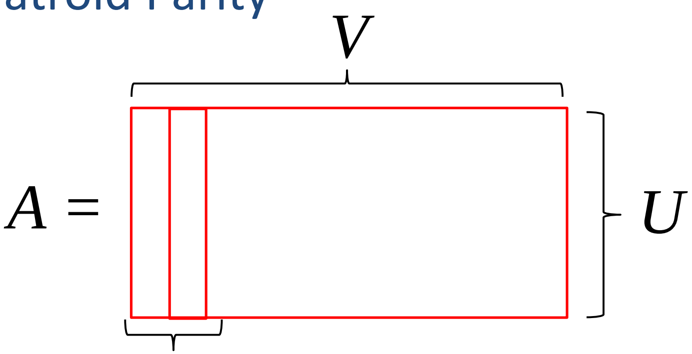
Augmenting Path Algorithm (unweighted)

Gabow and Stallmann (1986)



Linear Matroid Parity

Input



Line $l = \{u, \bar{u}\} \in L$

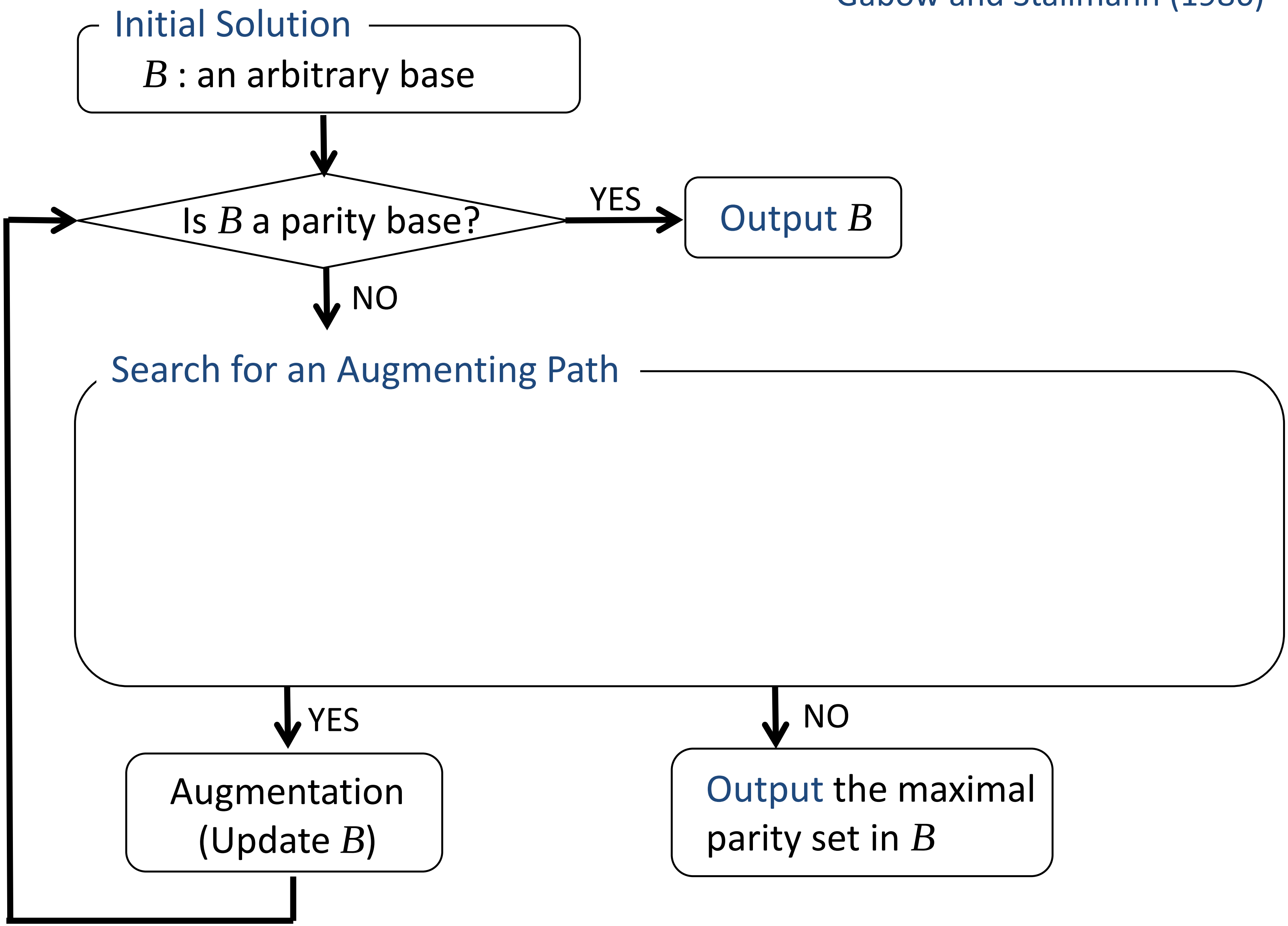
Parity set: union of lines

w.l.o.g. assume that A is row-full rank

Find An independent parity set of maximum size

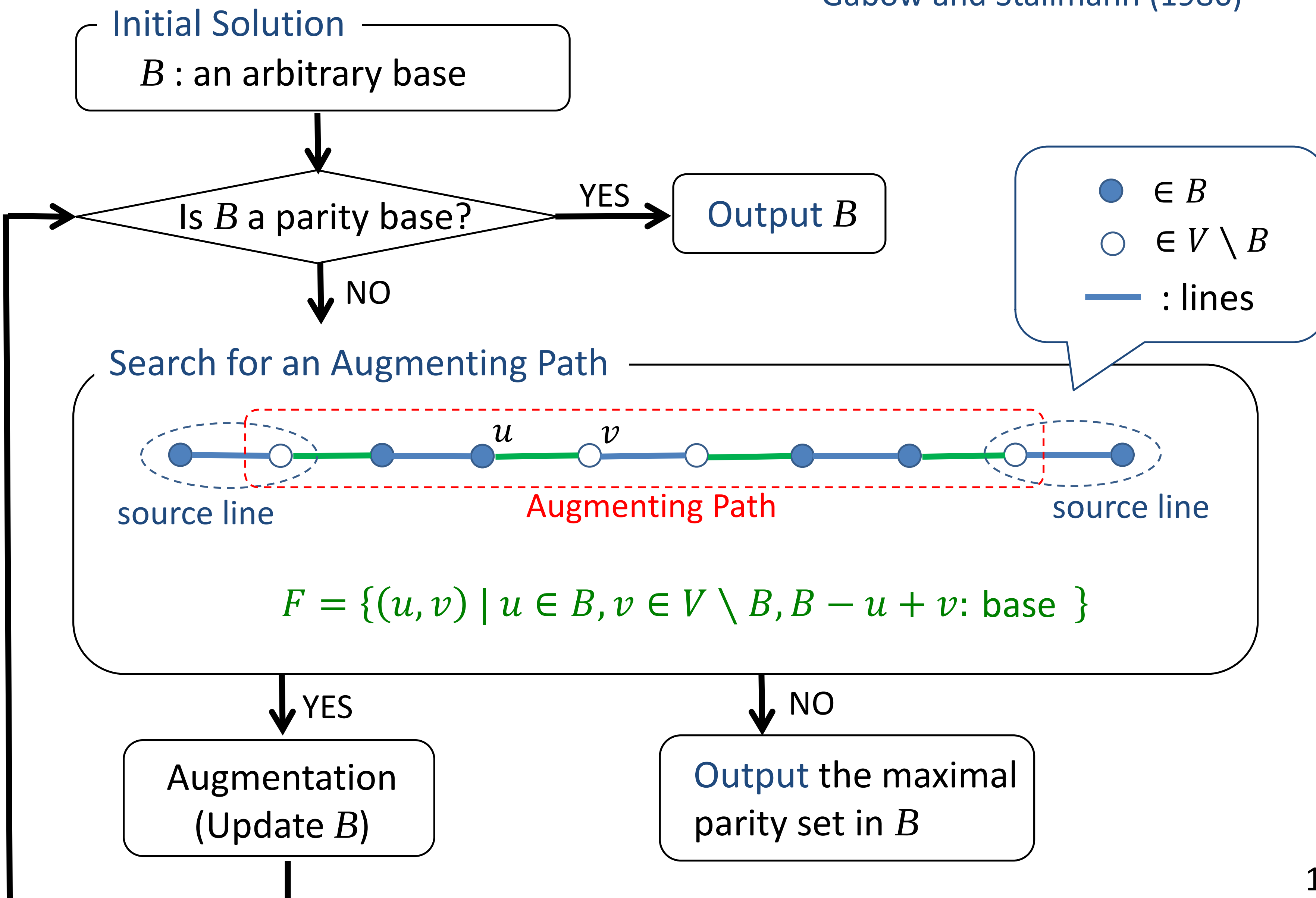
Augmenting Path Algorithm (unweighted)

Gabow and Stallmann (1986)



Augmenting Path Algorithm (unweighted)

Gabow and Stallmann (1986)



Augmenting Path Algorithm (unweighted)

Gabow and Stallmann (1986)

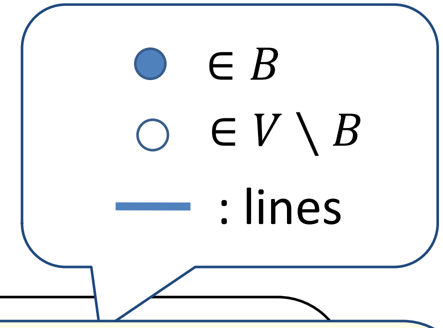
Initial Solution

B : an arbitrary base

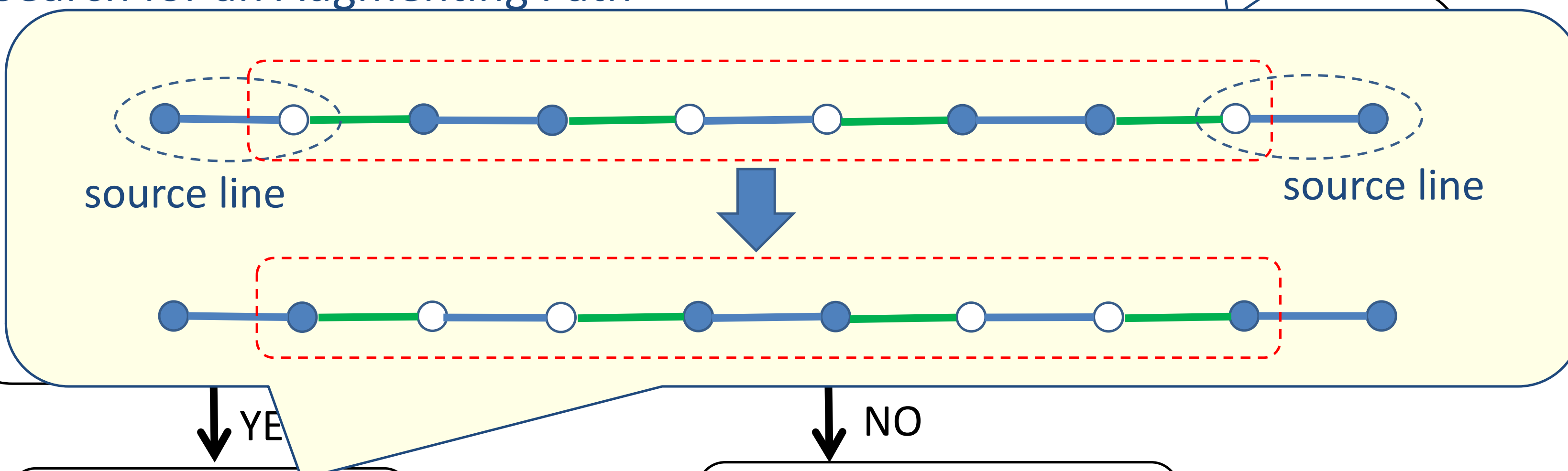
Is B a parity base?

YES → Output B

NO ↓



Search for an Augmenting Path



YE[S] → Augmentation (Update B)

NO → Output the maximal parity set in B

Augmenting Path Algorithm (unweighted)

Gabow and Stallmann (1986)

Initial Solution

B : an arbitrary base

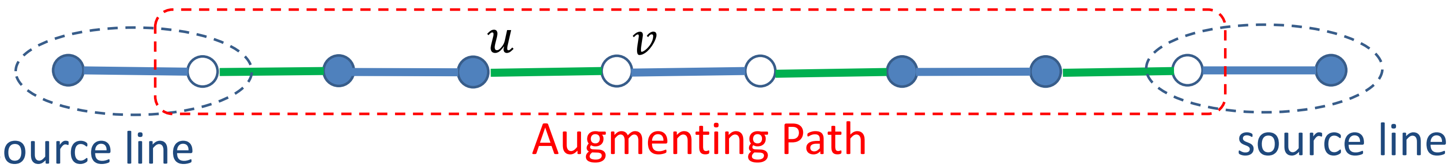
Is B a parity base?

NO

Omitted Details

- Creating *Blossoms*
- Introducing new vertices
- Validity proof

Search for an Augmenting Path



$$F = \{(u,v) \mid u \in B, v \in V \setminus B, B - u + v\text{: base } \}$$

YES

Augmentation
(Update B)

NO

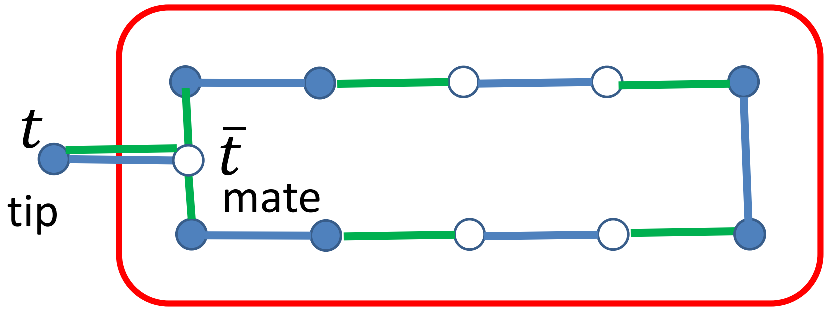
Output the maximal parity set in B

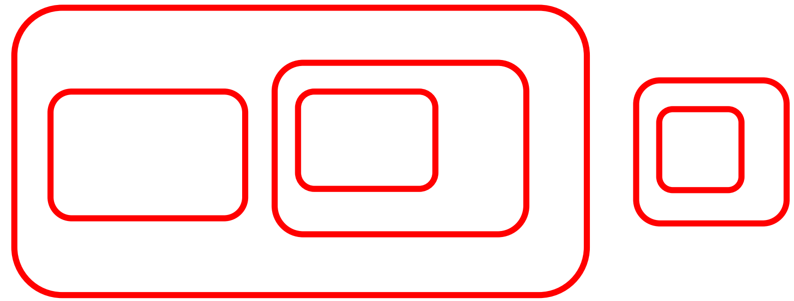
Dual Variables

- Laminar family of blossoms

$$\Lambda = \{H_1, H_2, \dots, H_\lambda\}$$

- Dual variables
  - $p: V \to \mathbf{R}$
  - $q: \Lambda \to \mathbf{R}_+$





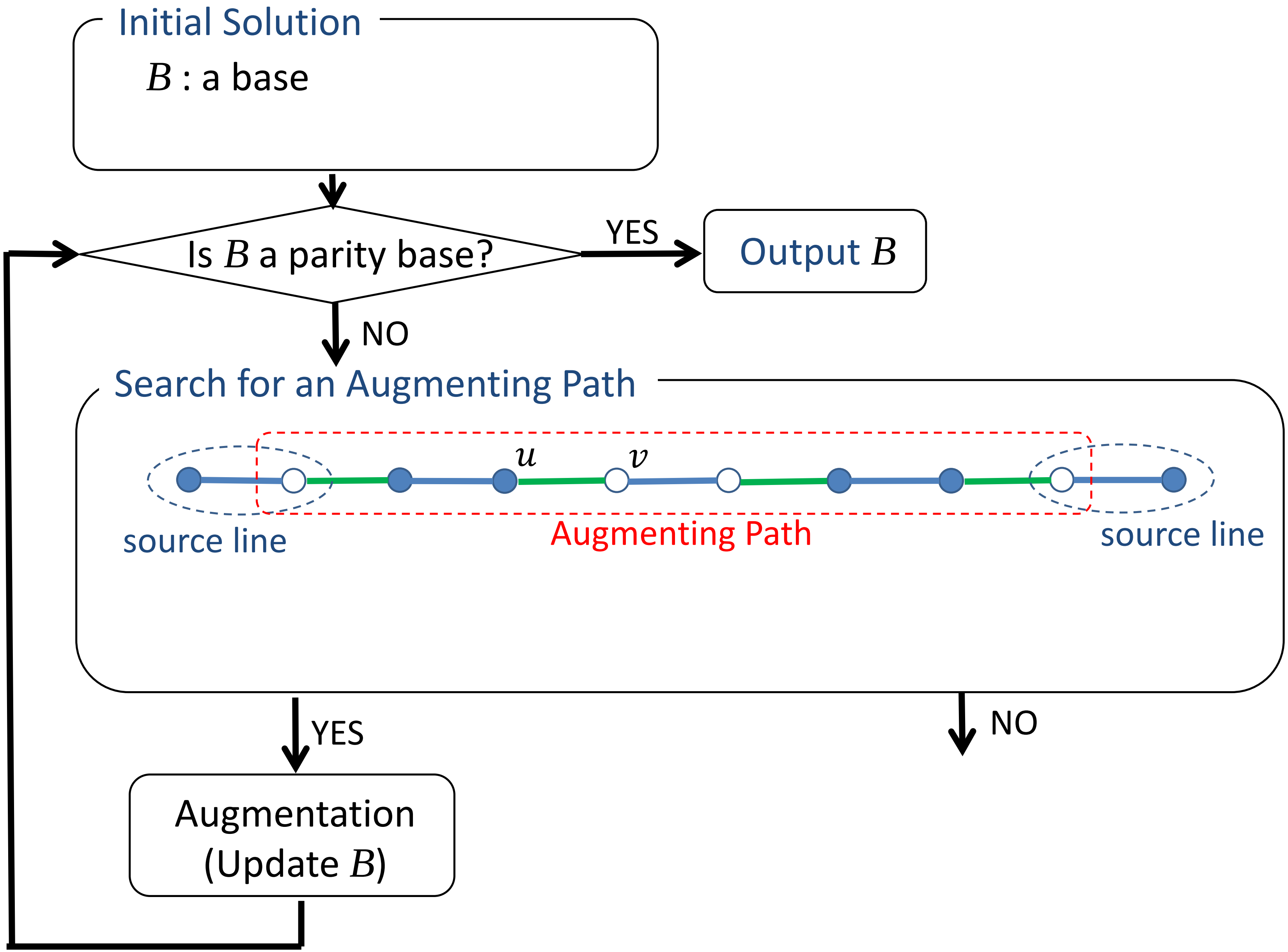
- Dual feasibility

(DF1) $p(u) + p(\bar{u}) = w(l)$ for $l = \{u, \bar{u}\}$

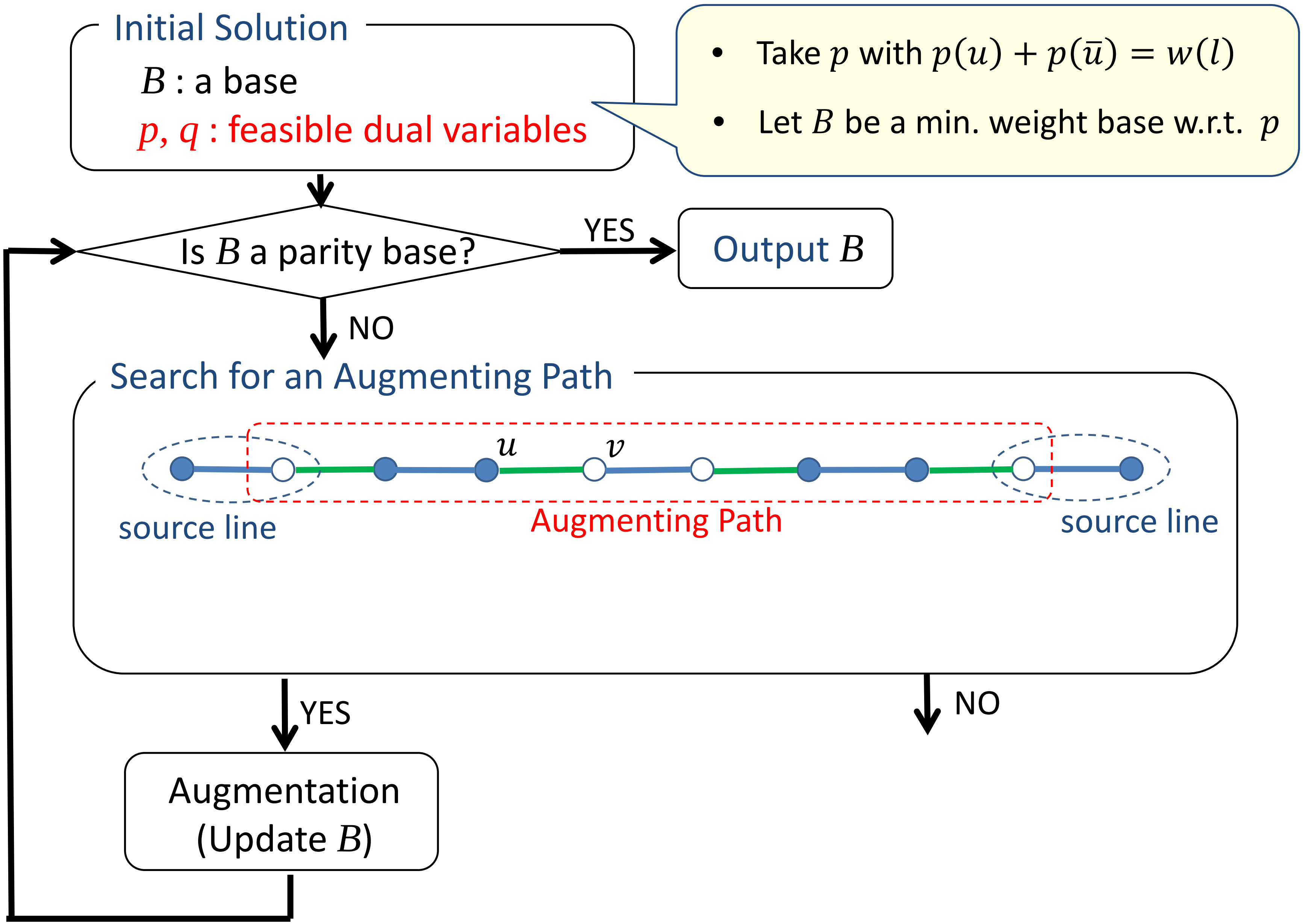
(DF2) $p(v) - p(u) \geq Q_{uv} := \sum_{H:\, uv \text{ crosses } H} q(H)$ if $C_{uv} \neq 0$

(DF3) $p(v) - p(u) = q(H)$ if u, v are tip of H and its mate

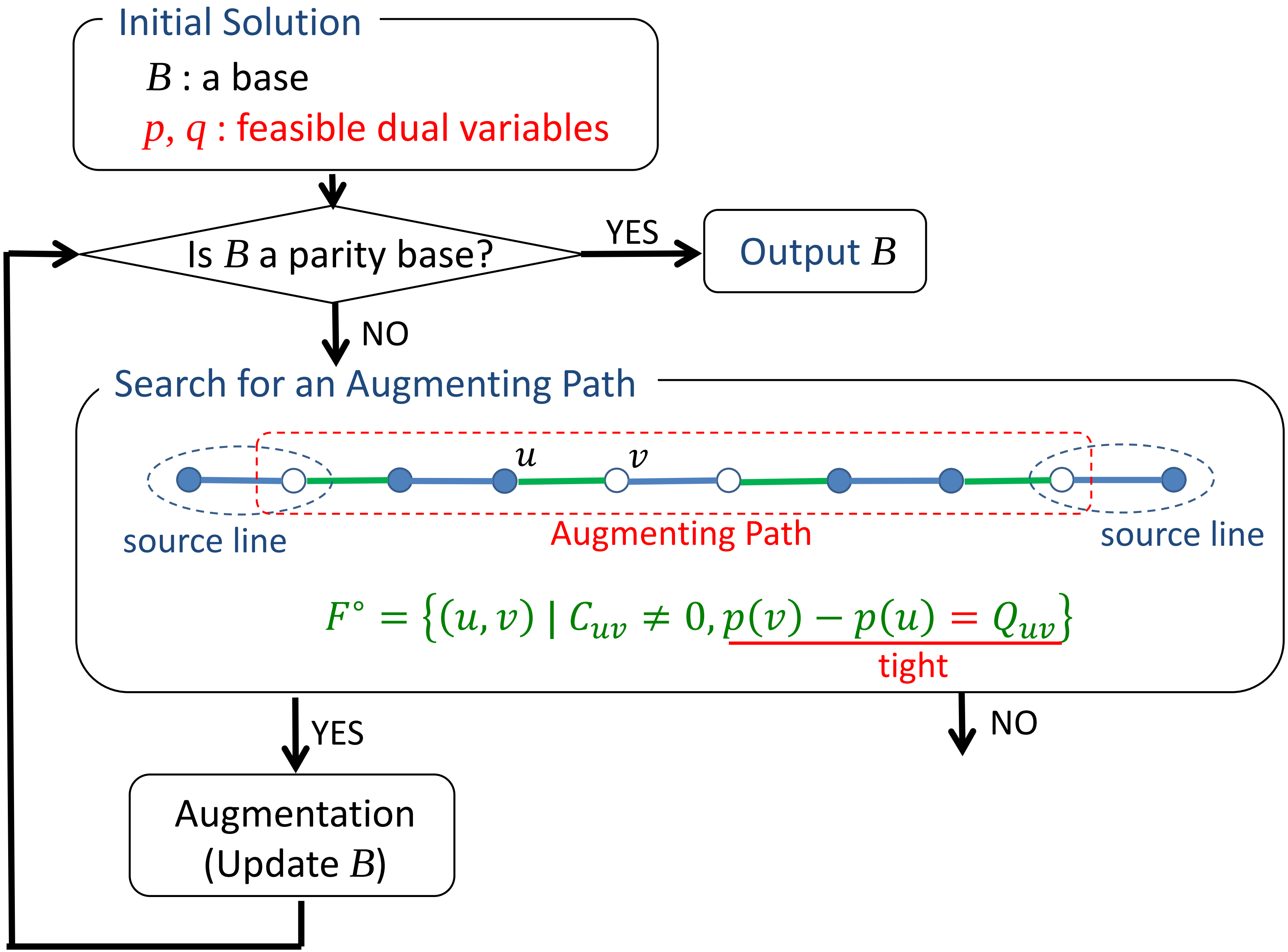
Primal Dual Algorithm (weighted)



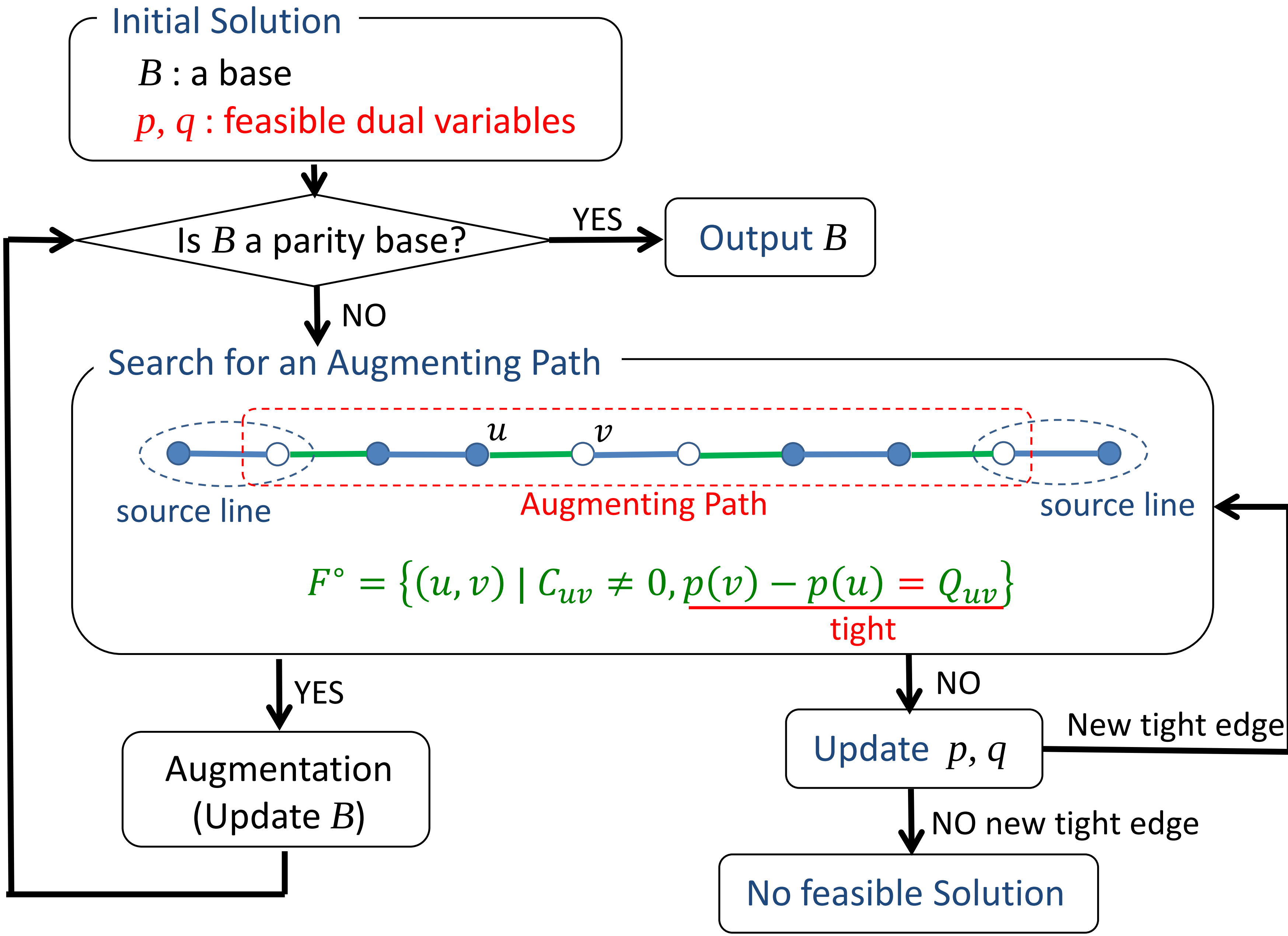
Primal Dual Algorithm (weighted)



Primal Dual Algorithm (weighted)



Primal Dual Algorithm (weighted)



なぜ最適性が保証できるのか？

≠最適性の証明

マッチング多面体

完全マッチング多面体

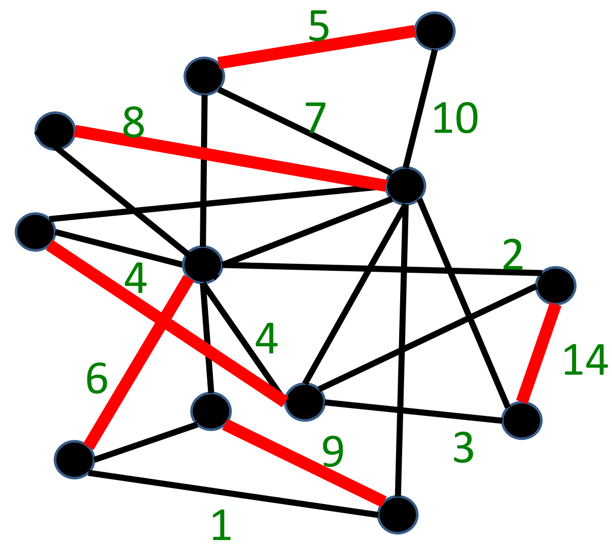
$\mathrm{conv}\{\chi_M \mid M \subseteq E : \text{perfect matching}\}$

||

$$\sum_{e\in\delta(v)} x(e) = 1 \qquad (v \in V)$$

$$\sum_{e\in\delta(Z)} x(e) \geq 1 \qquad (Z \subseteq V, |Z|: \mathrm{odd})$$

$$x(e) \geq 0 \qquad (e \in E)$$



マトロイド交叉多面体

マトロイド交叉多面体

$$\mathrm{conv}\{\chi_I \mid I \subseteq V: \text{common independent set}\}$$

$$\|$$

$$\sum_{e \in U} x(e) \leq r_1(U) \quad (U \subseteq V)$$

$$\sum_{e \in U} x(e) \leq r_2(U) \quad (U \subseteq V)$$

$$x(e) \geq 0 \quad (e \in V)$$

$$A_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} e & f & & & & & & \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} 1 & 1 & 0 & & & & & \\ 1 & 0 & 1 & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 1 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & \end{array}\right] \end{array}$$

$$A_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} e & f & & & & & & \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} 1 & 0 & 1 & & & & & \\ 2 & 1 & 0 & & & & & \\ 3 & 3 & 4 & & & & & \\ 4 & 0 & 2 & & & & & \\ 0 & 1 & 2 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & \end{array}\right] \end{array}$$

線形マトロイドパリティ多面体？

最適性証明のポイント

$P(A) \coloneqq \mathrm{conv}\{\chi_I \mid I \subseteq L\text{: 基をなすラインの集合}\}$ を

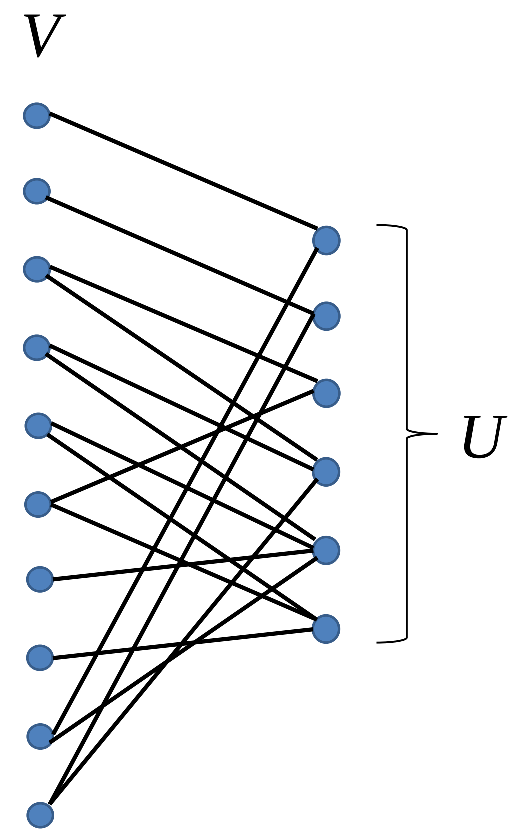
- 完全マッチング多面体を複数（指数個 or 無限個）使った
- 拡張定式化

で表現することができる

横断マトロイドパリティは容易

$$A = \left.\overbrace{\begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc} * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * & 0 & 0 \end{array}}^{V}\right\} U$$

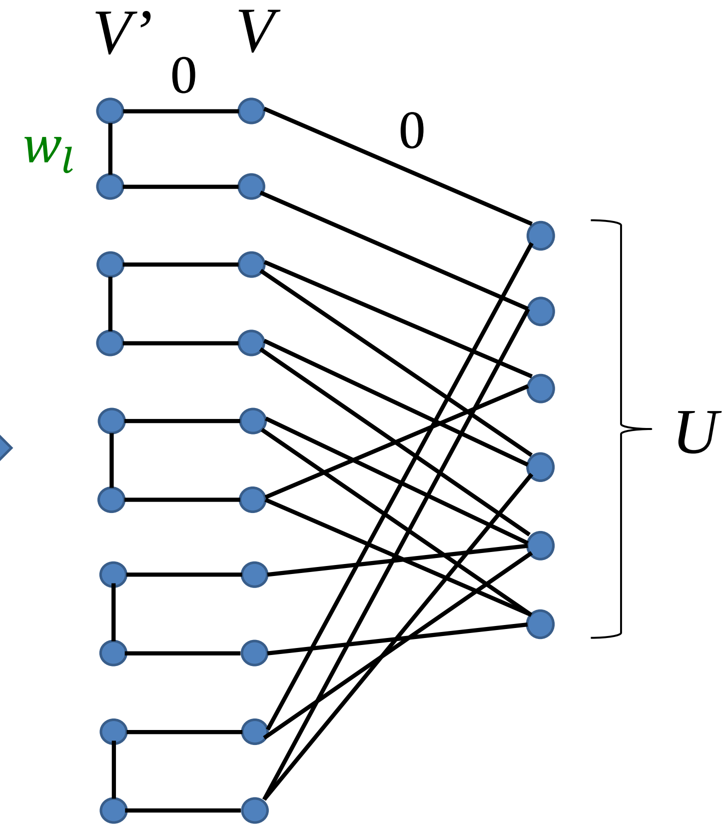
w_l



横断マトロイドパリティは容易

$$A=\overbrace{\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc} * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * & 0 & 0 \end{array}\right]}^{V}\Bigg\}\,U$$

w_l

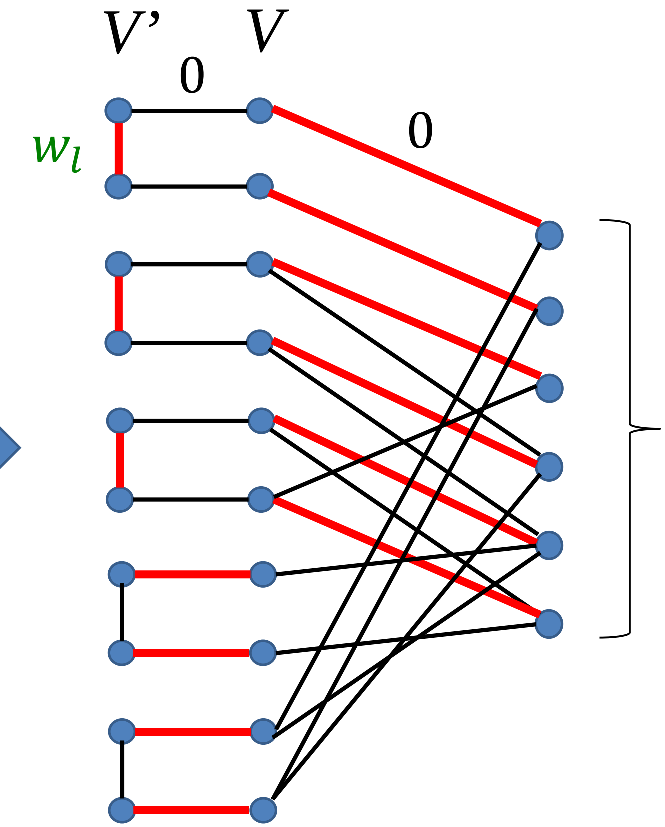


パリティ基 $\Longleftrightarrow$ 完全マッチング

横断マトロイドパリティは容易

$$A=\overbrace{\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{V} \Big\} U$$

w_l



パリティ基 ⟺ 完全マッチング

conv$\{\chi_I \mid I \subseteq L$: 基をなすラインの集合 $\}$ を

完全マッチング多面体の L への射影として表せる

横断マトロイドは線形マトロイドの緩和

$$A = \overbrace{\begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}}^{V} \left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\0\\0\\0\\0\\0\end{array}}\right\} U$$

の独立集合族
（基族）

$$\subseteq$$

$$\hat{A} = \overbrace{\begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc} * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * & 0 & 0 \end{array}}^{V} \left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\0\\0\\0\\0\\0\end{array}}\right\} U$$

の独立集合族
（基族）

線形マトロイドパリティ多面体

$$P(A) \subseteq P(\hat{A})$$

$$P(A) \subseteq \bigcap_{A' \sim A} P(\widehat{A'})$$

A' の数値情報を無視

A' は A に行変形をして得られる

$$P(A) \coloneqq \mathrm{conv}\{\chi_I \mid I \subseteq L\text{: 基をなすラインの集合 }\}$$

線形マトロイドパリティ多面体

$$P(A) \subseteq P(\hat{A})$$

A' の数値情報を無視

$$P(A) \subseteq \bigcap_{A' \sim A} P(\widehat{A'})$$

A' は A に行変形をして得られる

マトロイドの縮約

$$P(A) \subseteq \bigcap_{\substack{Z \\ A'_Z \sim A_Z}} P(\widehat{A'_Z}/W)$$

A から定義されるマトロイド

縮約

$$= \left(A_Z := \begin{array}{|c|c|} \hline Z & I \\ \hline A & O \\ \hline \end{array} \text{ から定義されるマトロイド} \right) \Big/ W$$

with column labels V (under Z and A) and W (under I and O).

線形マトロイドパリティ多面体

定理

数値情報を無視　　マトロイドの縮約

$$P(A) = \bigcap_{\substack{Z \\ A'_Z \sim A_Z}} \boxed{P(\widehat{A'}_Z / W)}$$

A'_Z は A_Z に行変形をして得られる

完全マッチング多面体の L への射影として表せる

複数の完全マッチング多面体を用いた $P(A)$ の拡張定式化

A から定義されるマトロイド

縮約

$$= \left(A_Z := \begin{array}{|c|c|} \hline Z & I \\ \hline A & O \\ \hline \end{array} \text{ から定義されるマトロイド} \right) \Big/ W$$

$$\begin{array}{cc} V & W \end{array}$$

線形マトロイドパリティ多面体

定理

数値情報を無視

マトロイドの縮約

$$P(A) = \bigcap_{\substack{Z \\ A'_Z \sim A_Z}} P(\widehat{A'}_Z / W)$$

A'_Z は A_Z に行変形をして得られる

実は，もう少し強く以下が成立

定理

$\forall w$：重み関数，$\exists Z$：付加する行列，$\exists A'_Z \sim A_Z$：行変形

$$\min\{w \cdot x \mid x \in P(A)\} = \min\{w \cdot x \mid x \in P(\widehat{A'}_Z / W)\}$$

アルゴリズムの解釈

- アルゴリズムで保持しているもの
  - B　　　　　　：基　　　　　　←　主問題の緩和解
  - 追加頂点（tip, mate）　：Z, 行変形の情報
  - Blossom　　　：Blossom　　　　←　双対問題の許容解
  - p, q　　　　　：双対変数

横断マトロイドを扱うときの
通常のマッチングの意味での

- 主双対アルゴリズム + 複雑な双対概念

線形マトロイドパリティのまとめ

- マッチングとマトロイド交叉の融合
- 数値情報を無視する「組合せ緩和」の思想
- 変数の追加，行列の変形を用いた，多面体の表現

自然な疑問

- 「多面体的表現」を直接得られないか？
- 「多面体的表現」からアルゴリズムは得られる？
- もっと簡単な表現はある？

  → 新たな変数を追加する操作は必要そう

おわりに

おわりに

- 多面体的手法：
  組合せ最適化における古典的だが強力な手法

- 重み付きの問題を扱う際に必須

- 指数サイズ（or 無限サイズ）の拡張定式化が
  他の問題に使えるか？

例：制約付き２マッチング問題

Yusuke Kobayashi:
Weighted triangle-free 2-matching problem with edge-disjoint forbidden triangles, IPCO2020.

Appendix：その他の難しいポイント

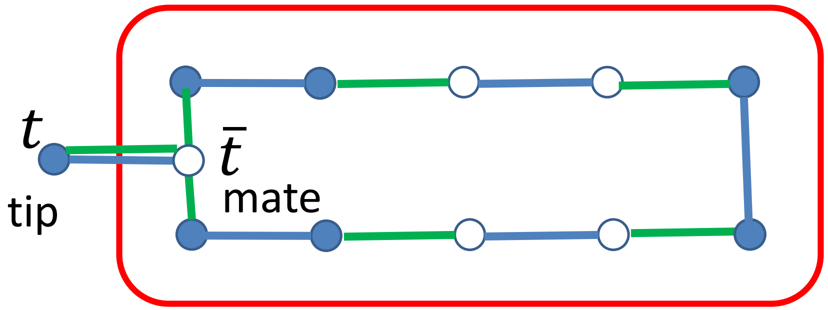
Dual Variables

How do we define tips and mates?

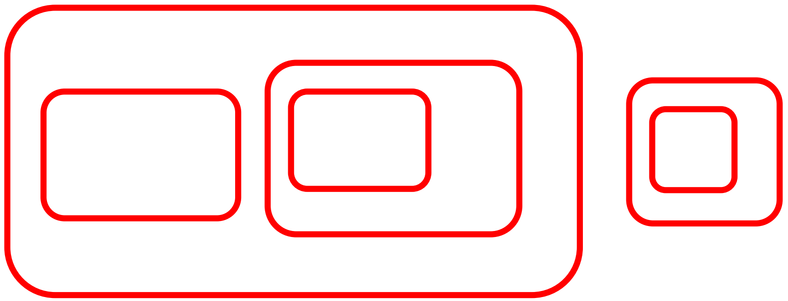
- Laminar family of blossoms

$$\Lambda = \{H_1, H_2, \ldots, H_\lambda\}$$

- Dual variables
  - $p: V \to \mathbf{R}$
  - $q: \Lambda \to \mathbf{R}_+$



Blossom



Laminar family

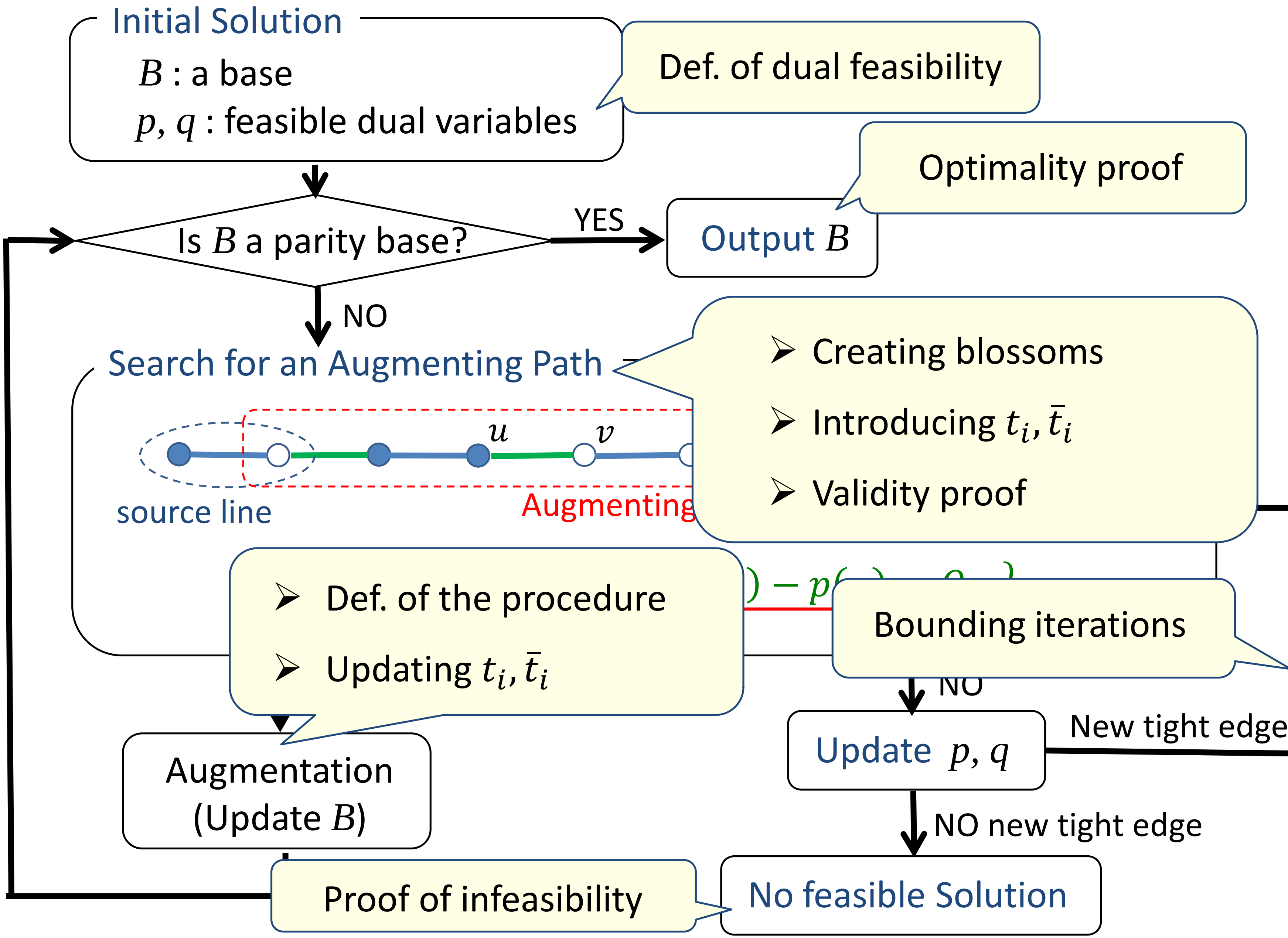
- Dual feasibility

(DF1) $p(u) + p(\bar{u}) = w(l)$ for $l = \{u, \bar{u}\}$

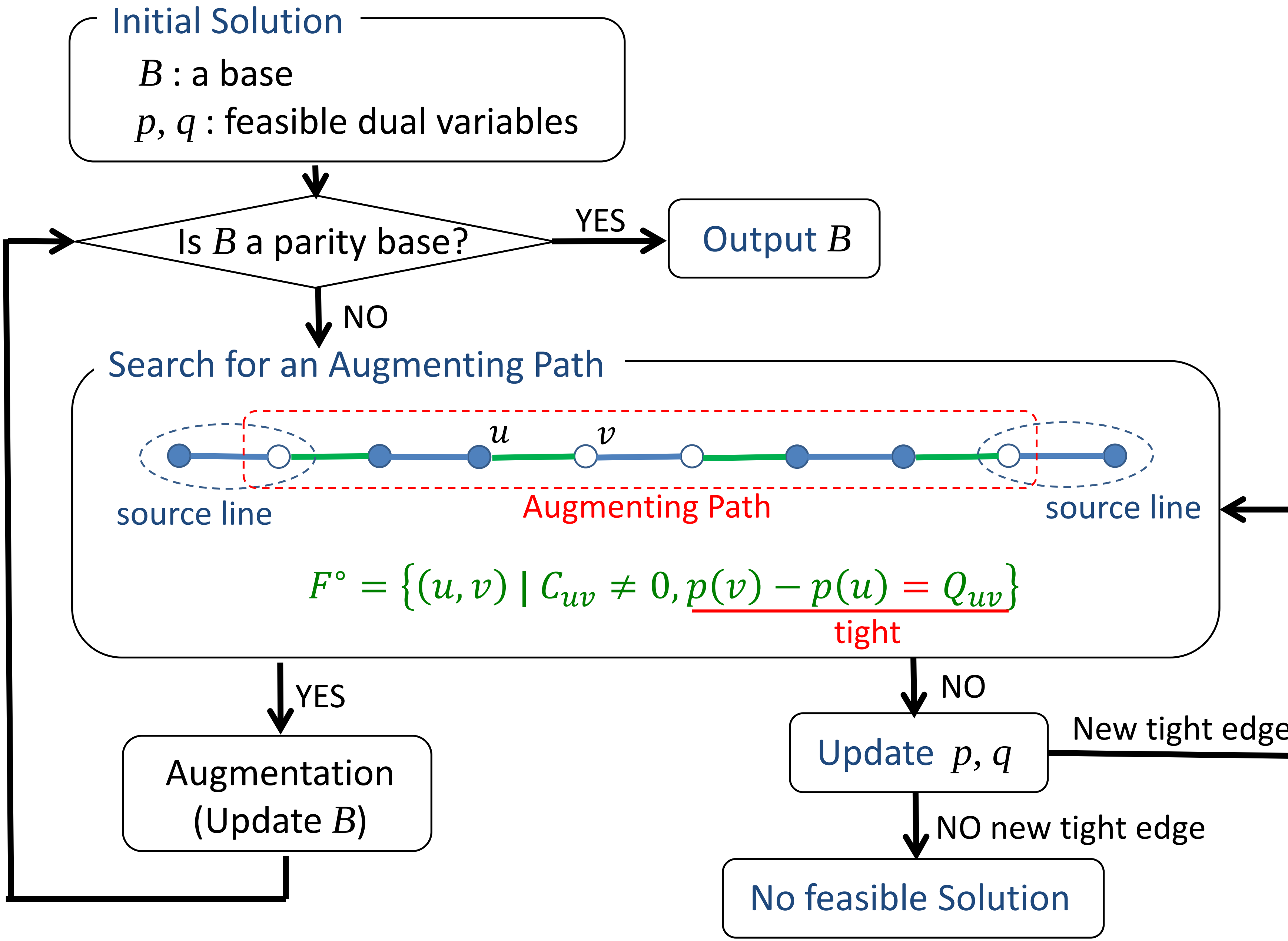
(DF2) $p(v) - p(u) \geq Q_{uv} := \sum_{H:\, uv \text{ crosses } H} q(H)$ if $C_{uv} \neq 0$

(DF3) $p(v) - p(u) = q(H)$ if u, v are tip of H and its mate

Primal Dual Algorithm (weighted)

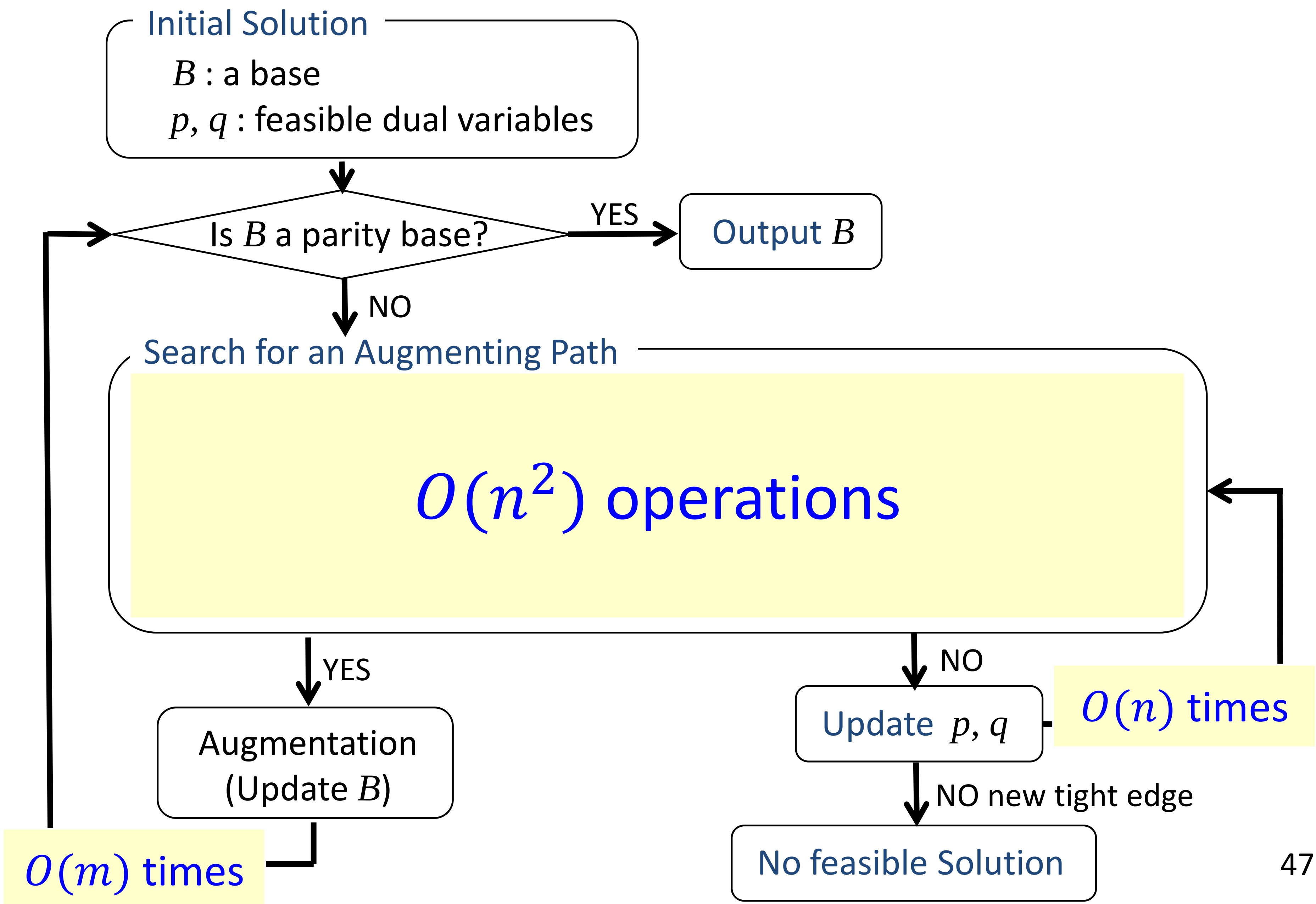


Primal Dual Algorithm (weighted)



Primal Dual Algorithm (weighted)

$|V|=n, \ |U|=m$



Conclusion

Theorem

Our algorithm finds a minimum weight parity base with $\mathrm{O}(n^3 m)$ arithmetic operations

- If the problem is over a fixed finite field $\mathbf{K}$, then it can be solved in $\mathrm{O}(n^3 m)$ time
- If the problem is over the rational field $\mathbb{Q}$, then it can be solved in polynomial time

(More arguments are required)