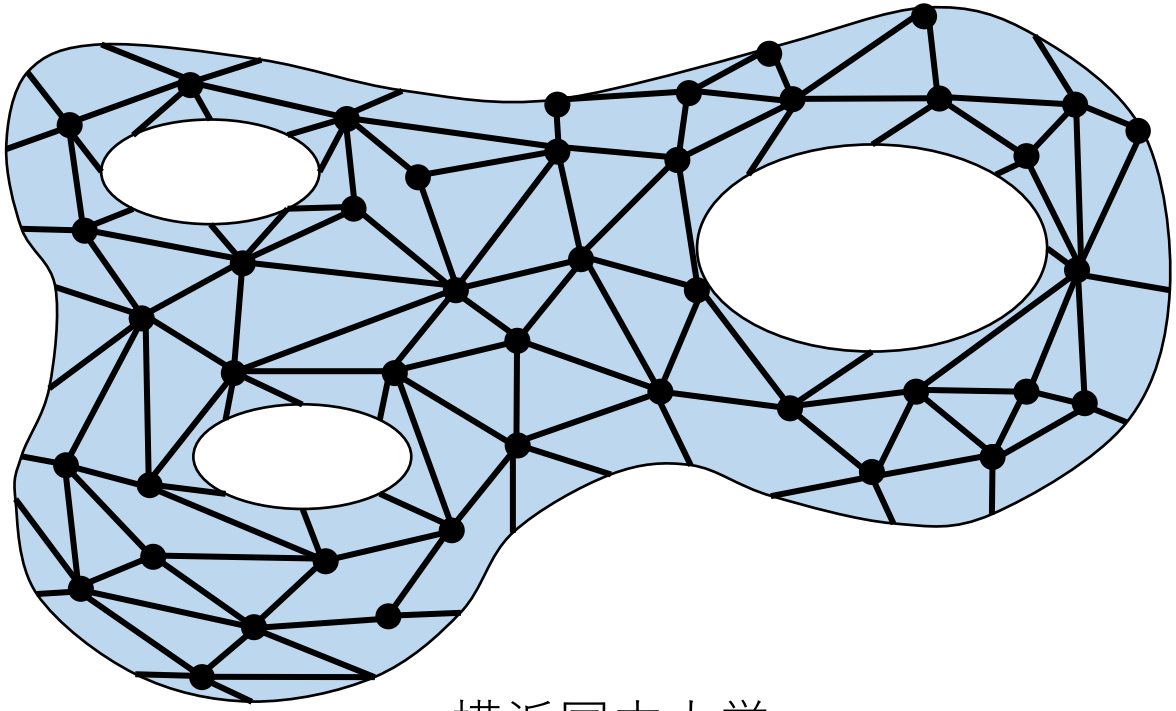
# 曲面上のグラフの彩色について①



横浜国立大学
環境情報研究院
中 本　敦 浩

# 自己紹介

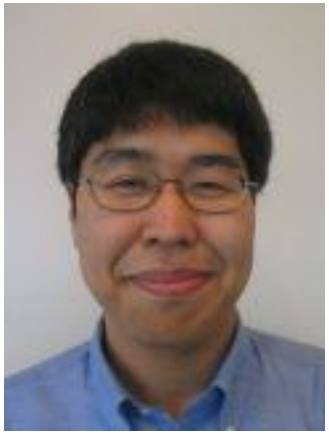
なかもと　あつひろ

## 中本 敦浩　　（1968.12.23生）

横浜国立大学 環境情報研究院・教授

理工学部　数物・電子情報系学科　数理科学EP

専門：位相幾何学的グラフ理論



小関健太　准教授

根上生也　教授

毎年１１月に横浜で「位相幾何学的グラフ理論研究集会」を行っている.

# 四色定理とその歴史

**どんな地図も，任意の隣接2国が異なる色を持つように，4色で塗れる．**

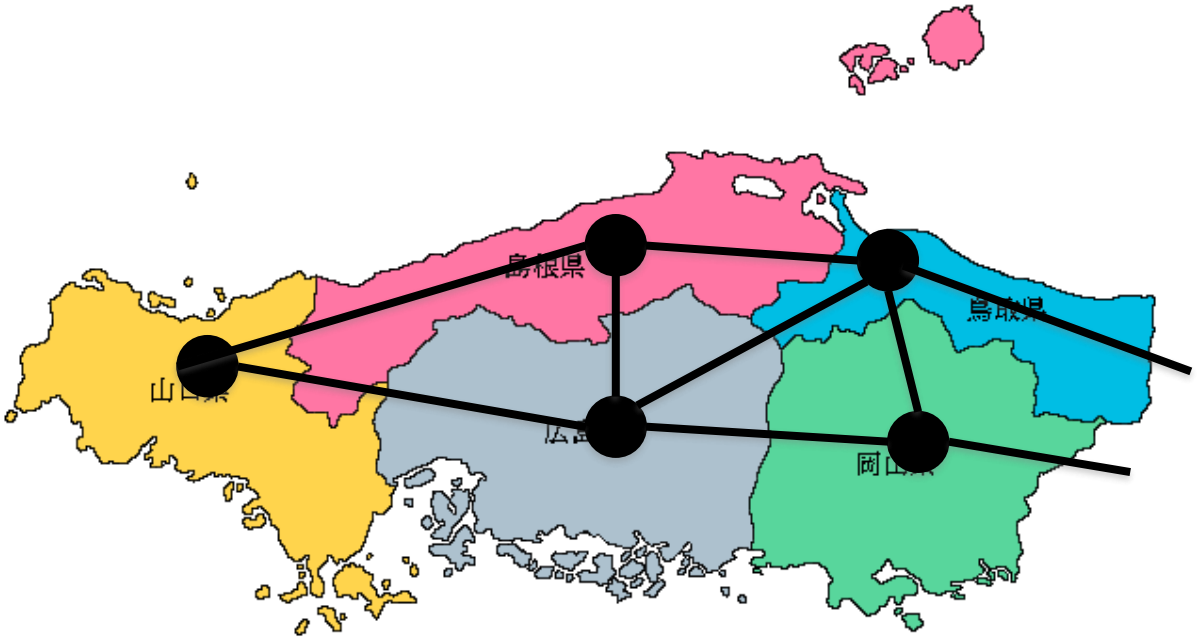
1852年，フランシス・ガスリーはこの**四色問題**を弟に質問した．
1878年，ケーリーがロンドン数学会にこの問題を提出した．
1879年，ケンペが間違った証明を与え，11年間信じられた．
1890年，ヒーウッドが間違いを指摘し，**五色定理**を証明した．

1977年，アッペルとハーケンにより，四色定理は証明された．

その証明では約2000通りの場合分けを潰すため，コンピュータを長い時間動かしている．エレ○ントな証明と言われた．

2000通りの場合分けは633通りになった
（Robertson, Sanders, Seymour, Thomas, 1996）

# 証明のアイデアは・・・




平面地図から，平面グラフが得られる．

# 四色定理

**四色定理.** （Appel&Harken, 1977）
どんな地図も，任意の隣接２国が異なる色を持つように，４色で色分けできる.

⇔

**四色定理.** （Appel&Harken, 1977）
どんな平面グラフの頂点も，辺で結ばれた任意の２頂点が異なる色を持つように，４色で色分けできる.

本講義では次を示すことから始める.

**命題.**
どんな平面グラフの頂点も，辺で結ばれた任意の２頂点が異なる色を持つように，６色で色分けできる.

**命題.**
どんな平面グラフの頂点も，辺で結ばれた任意の２頂点が異なる色を持つように，６色で塗れる．

１．なぜ，四色定理は難しいか．トーラス地図の色分けは７色で十分であることが知られており，四色定理より簡単だと言われている．それはなぜか．

２．曲面上で各面が偶角形のグラフの染色数を考えよう．曲面の偶角形分割から決まる代数的制約が染色数の違いをうむ．

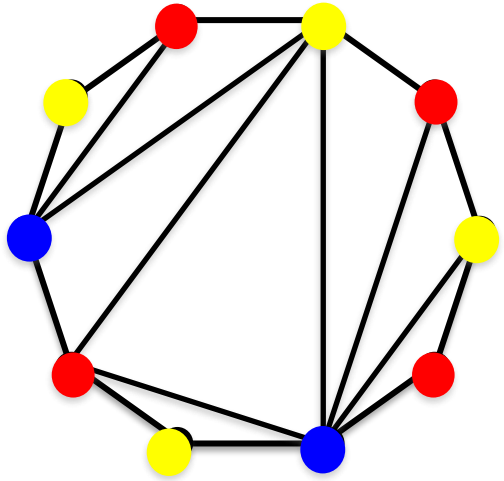
３．曲面上で各頂点の次数が偶数の三角形分割の染色数を考えよう．グラフ生成の定理がパワーを発揮する．また，また代数的な話題とも関係する．

４．Albertson予想．２，３をみると，再び，４色定理の難しさが見えてくる．

# 準備

$G$：グラフ
（ループは許さないが，多重辺は認める．）

$V(G)$：頂点集合，$E(G)$：辺集合



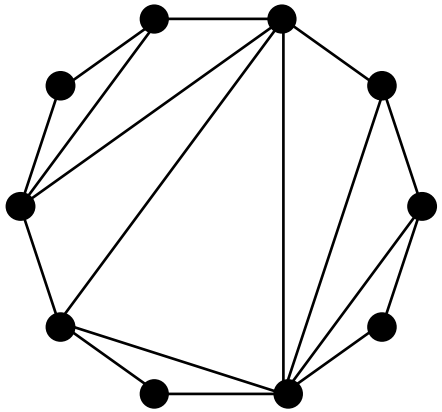
$c: V(G) \to \{1,\ldots, k\}$ : $k$-彩色

$\underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} c(x) \neq c(y)$ for $\forall xy \in E(G)$

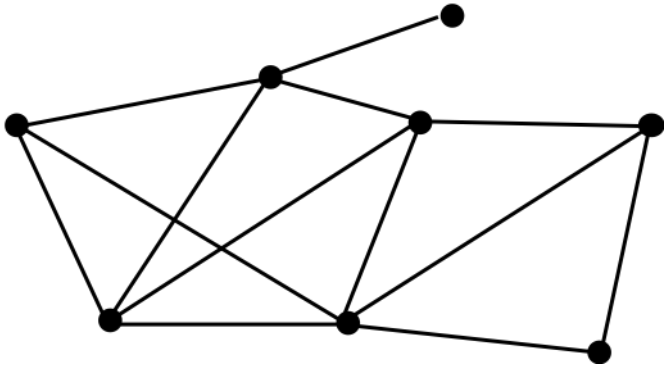
$\chi(G) \overset{\text{def.}}{=} \min\{ k : G \text{ は } k\text{-彩色可能}\}$

$G$の染色数

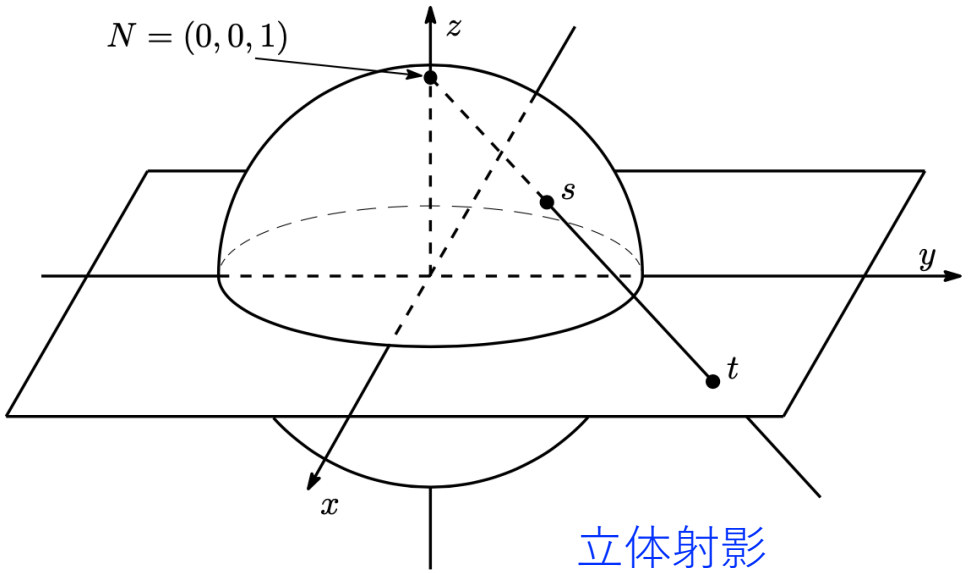
$G$： 平面グラフ $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 辺の交差なく平面に描かれたグラフ



$G$： 平面的グラフ $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 辺の交差なく平面に描けるグラフ

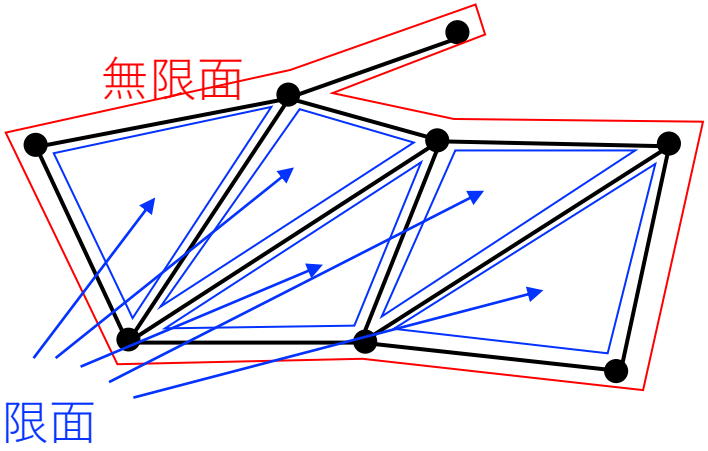


平面に辺の交差なく描ける
$\Leftrightarrow$ 球面に辺の交差なく描ける




立体射影

平面グラフの面： 平面を辺に沿って切ったときの各連結成分




$F(G)$：$G$ の面集合

**定理.** （**オイラー, 1758**）
$G$ : 連結な平面グラフ
$V, E, F$ を $G$ の頂点数，辺数，面数とするとき，

$$V - E + F = 2$$

Vertex : 頂点
Edge : 辺
Face : 面

**命題.**
$G$ : 平面的単純グラフ，$V \geqq 3 \quad \Rightarrow \quad E \leqq 3V - 6$
（等号成立 ⇔ 各面が三角形）

$3F \leqq 2E$ ←

各面が三角形以上

# 疎なグラフと密なグラフ
## Sparse graphs and dense graphs

● $G$ : $n$頂点平面的グラフ ⇒ $|E(G)| = O(n)$

一般には,
● $G$ : $n$頂点グラフ ⇒ $|E(G)| = O(n^2)$

**Diracの定理：**
$G$ : $n$頂点グラフ，$n \geqq 3$
最小次数$\geqq n/2$ ⇒ $G$：ハミルトン
「辺数の 2 倍＝次数の総和」より,
最小次数$\geqq n/2$ ⇒ $|E(G)| \geqq n^2/4$

**Tutteの定理：**
$G$ : 4-連結平面的 ⇒ $G$：ハミルトン

「疎」にもかかわらず,
興味深いグラフクラス

$G$ : $n$頂点平面的グラフ
⇒ $|E(G)| \leqq 3n-6$ ⇒ $2|E(G)| \leqq 6n-12$
⇒ 平均次数 $= \dfrac{2|E(G)|}{n} \leqq 6 - \dfrac{12}{n} < 6$

**⇒ 次数5以下の頂点を持つ**

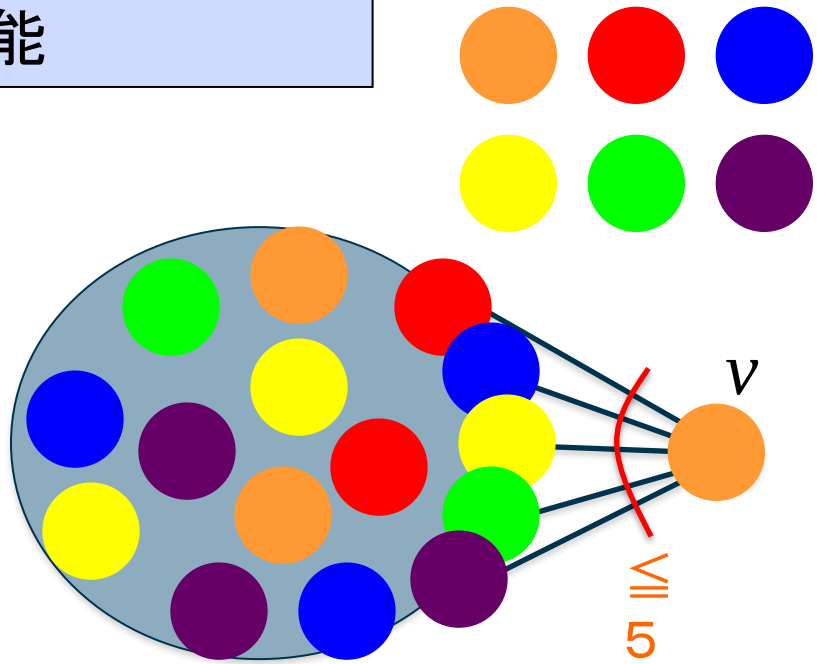
# まずは６色定理・・・これが本質的！

**命題. $G$ : 平面的 ⇒ $G$ : 6-彩色可能**

頂点数に関する数学的帰納法.

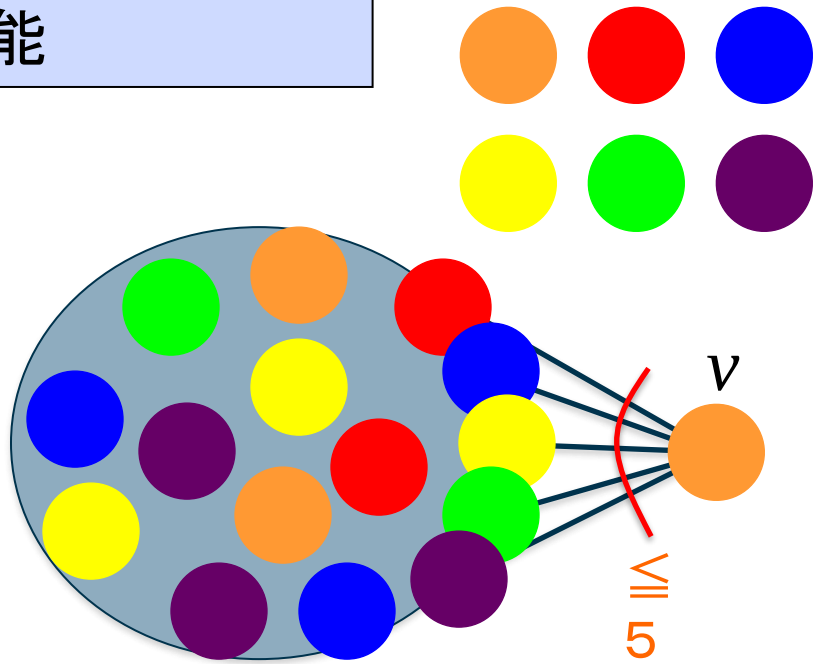
頂点数≦６　⇒　O.K.

頂点数≧７の平面グラフ$G$を考える.
$G$ は次数５以下の頂点$v$を持つ.
$G$-$v$も平面グラフだから，６色で塗れる．このとき，$G$ は６色で塗れる.



# まずは６色定理・・・これが本質的！

**命題. $G$ : 平面的 ⇒ $G$ : 6-彩色可能**




頂点数に関する数学的帰納法.

頂点数≦６　⇒　O.K.

頂点数≧７の平面グラフ$G$を考える.
$G$ は次数５以下の頂点$v$を持つ.
$G$-$v$も平面グラフだから，６色で塗れる．このとき，$G$ は６色で塗れる.

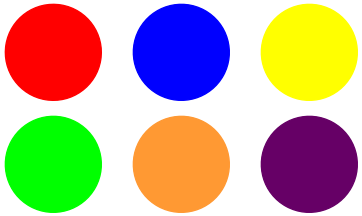
グラフ $G$ が ***k*-degenerate** (*k*-退化)
⇔ 任意の部分グラフが
def. 次数 $k$ 以下の頂点を持つ.

平面的グラフは5-degenerateだから，6-彩色可能

● $G$ : $k$-degenerate ⇒ $G$ : ($k$+1)-彩色可能

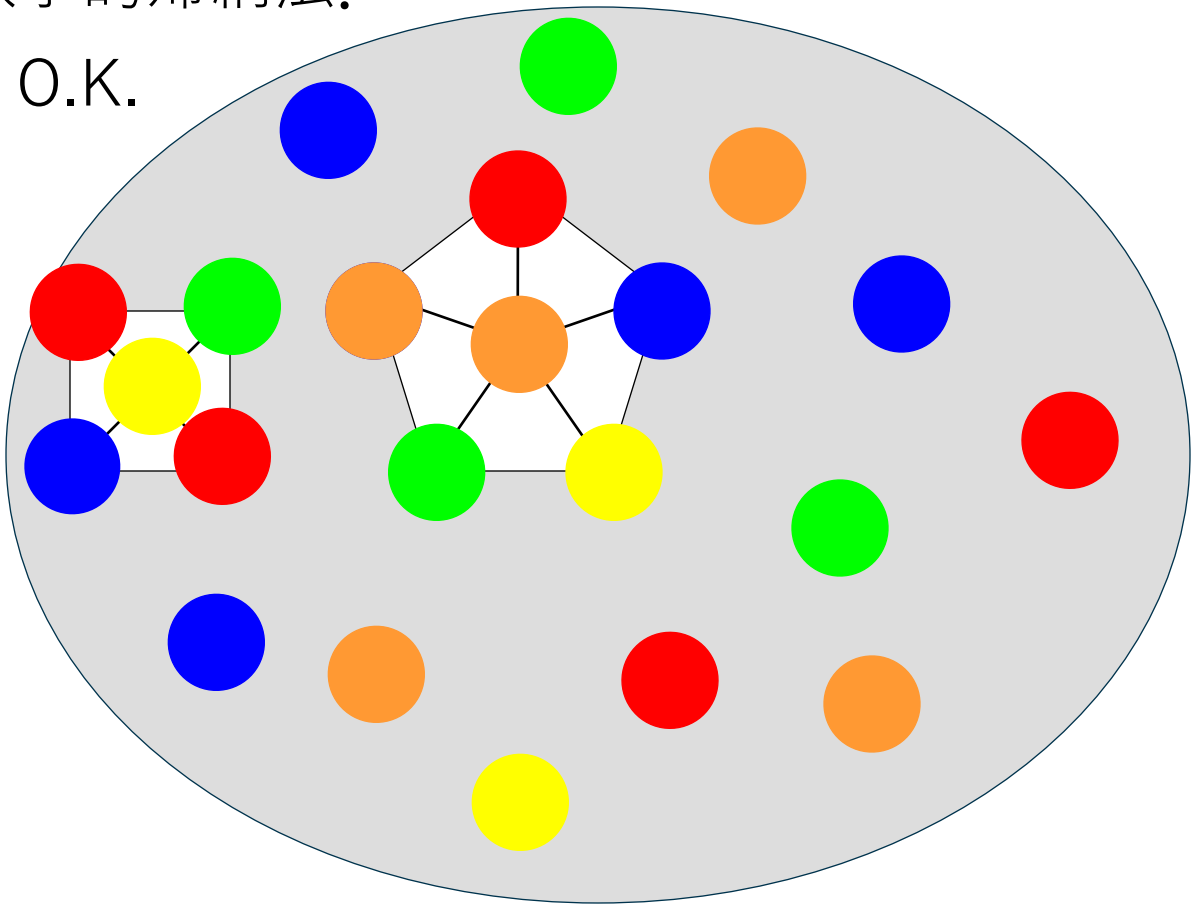
# 5 色定理

**定理.（ 5色定理, ヒーウッド, 1879 ）**
$G$ : 平面的 ⇒ $G$ : 5-彩色可能



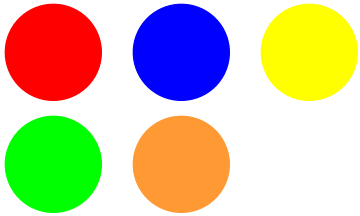
頂点数に関する数学的帰納法.

頂点数 ≦ 5　　⇒　　O.K.



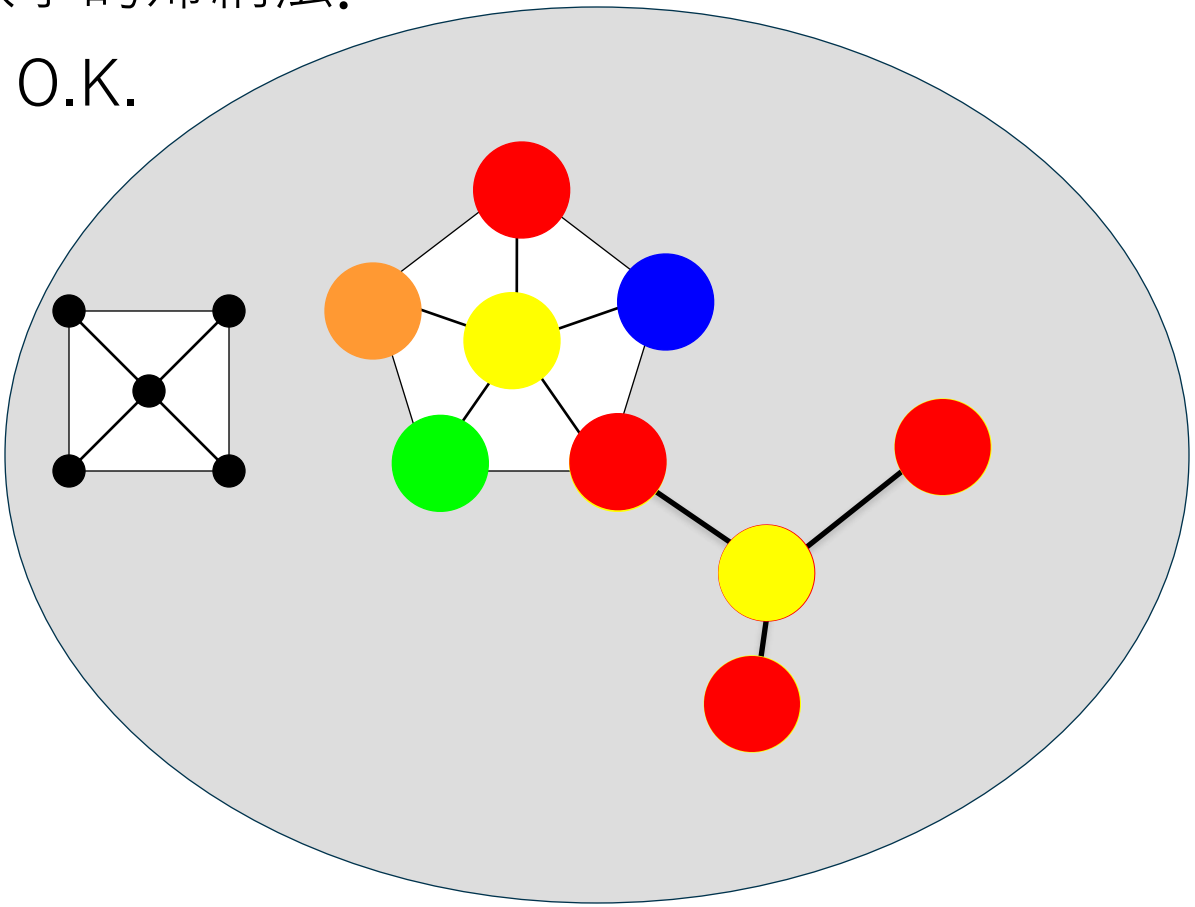
# 5 色定理

**定理.（ 5色定理, ヒーウッド, 1879 ）**
$G$ : 平面的 ⇒ $G$ : 5-彩色可能



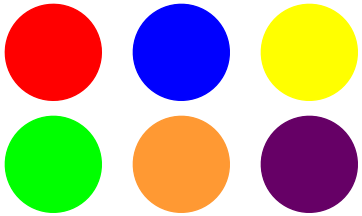
頂点数に関する数学的帰納法.

頂点数 ≦ 5　　⇒　　O.K.



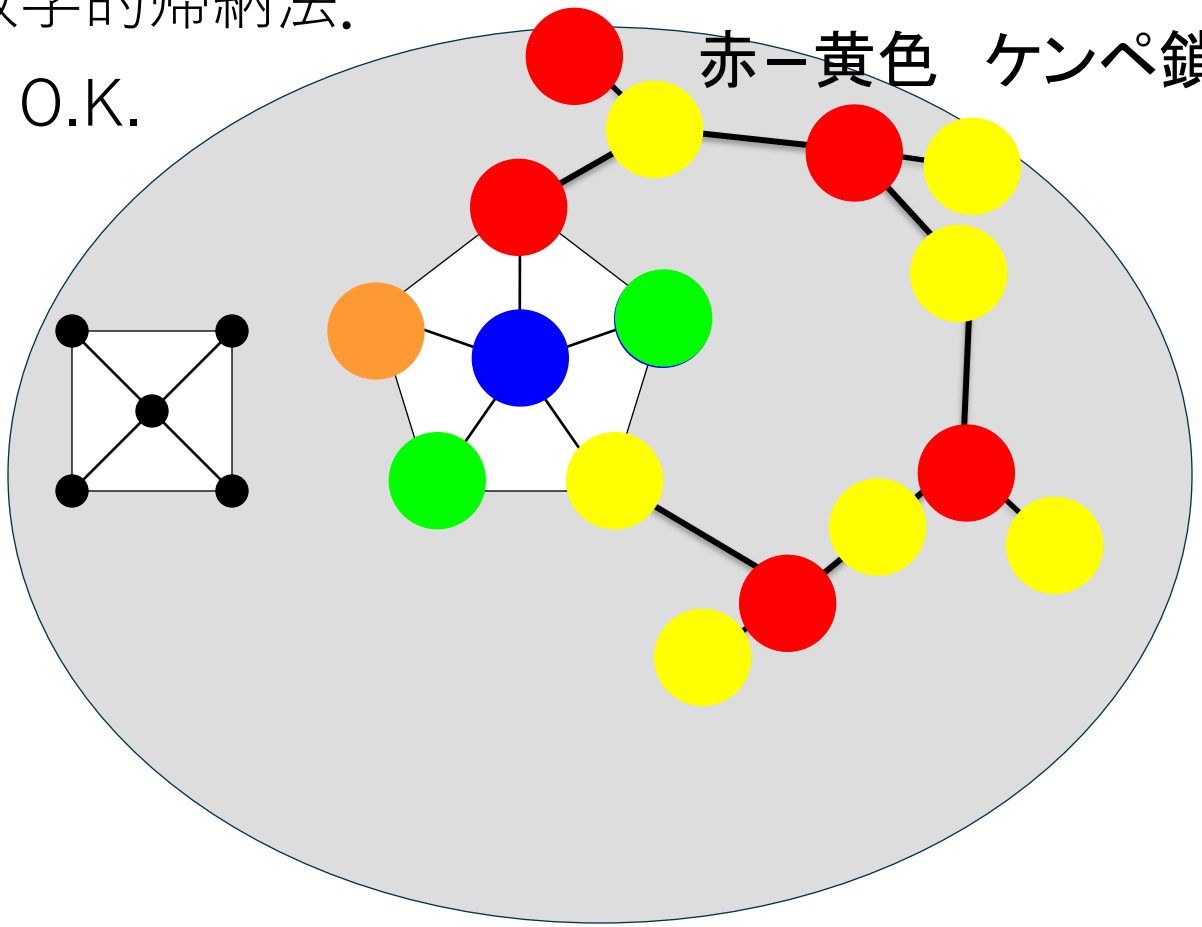
# 5 色定理

**定理.（ 5色定理, ヒーウッド, 1879 ）**
$G$ : 平面的 ⇒ $G$ : 5-彩色可能



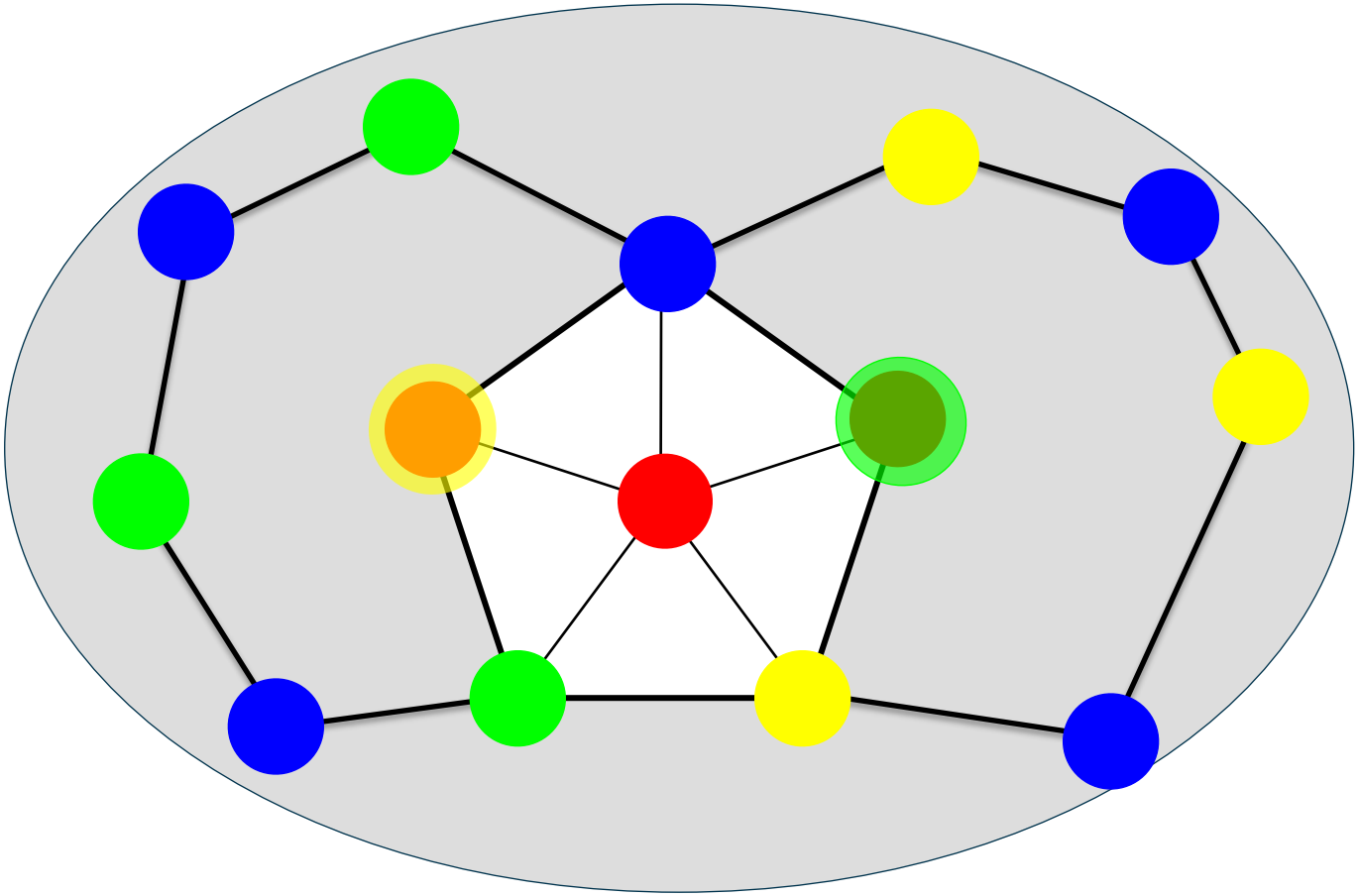
頂点数に関する数学的帰納法.

頂点数 ≦ 5　　⇒　　O.K.



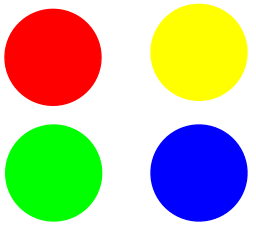
# ケンペさんの証明

頂点数≦４　⇒　OK
頂点数≧５　⇒　次数５以下の頂点が存在する



本当に，vの近傍に現れる色数を減らせた？

**演習問題１.**
ケンペの証明の誤りを指摘せよ.



黄色→青？

（黄，青）ケンペ鎖

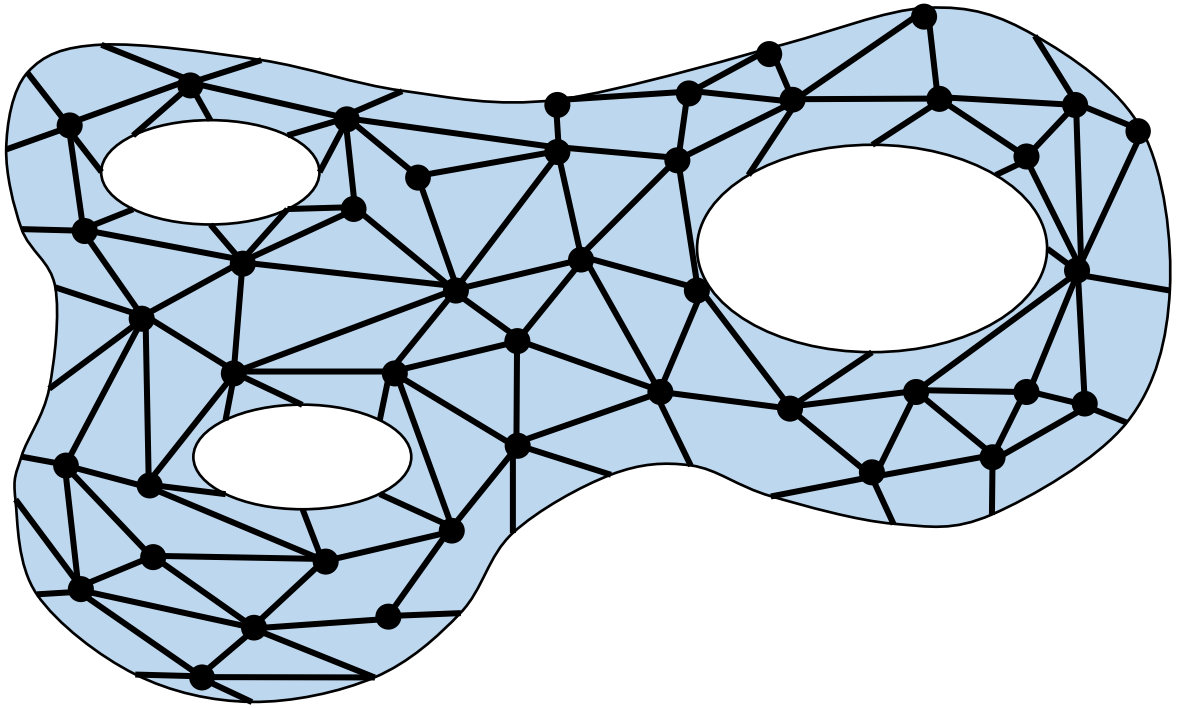
緑→青？

（緑，青）ケンペ鎖

（黄，青）ケンペ鎖より
赤→緑

（緑，青）ケンペ鎖より
赤→黄色

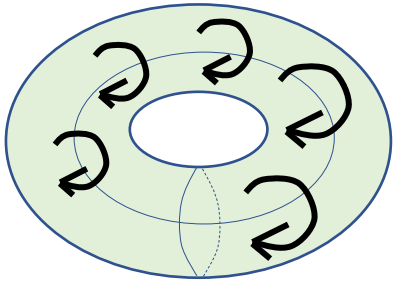
# 位相幾何学的グラフ理論



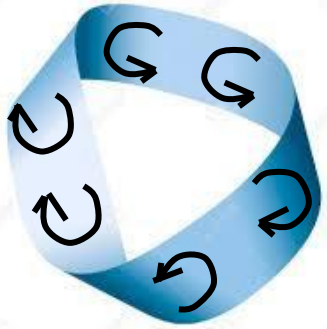
球面（平面）以外の**閉曲面**上のグラフを考えよう．

# 閉曲面 … 閉じた曲面

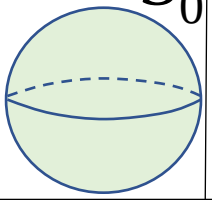
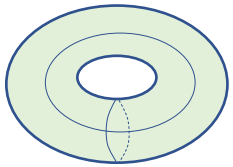
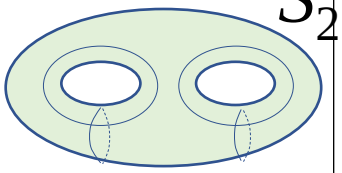
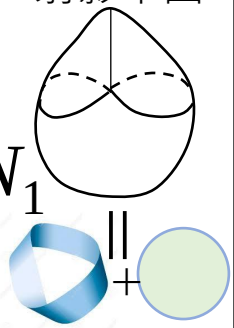
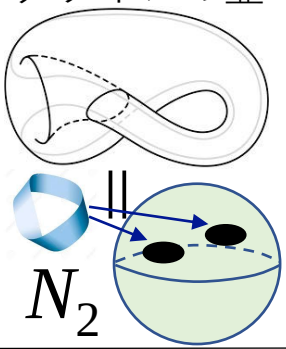
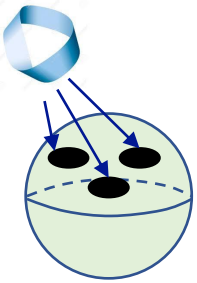
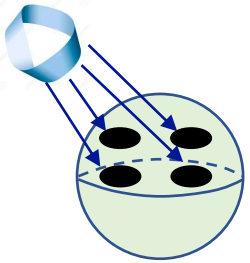
曲面：向き付け可能 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$
各点に一斉に同じ向きが与えられる

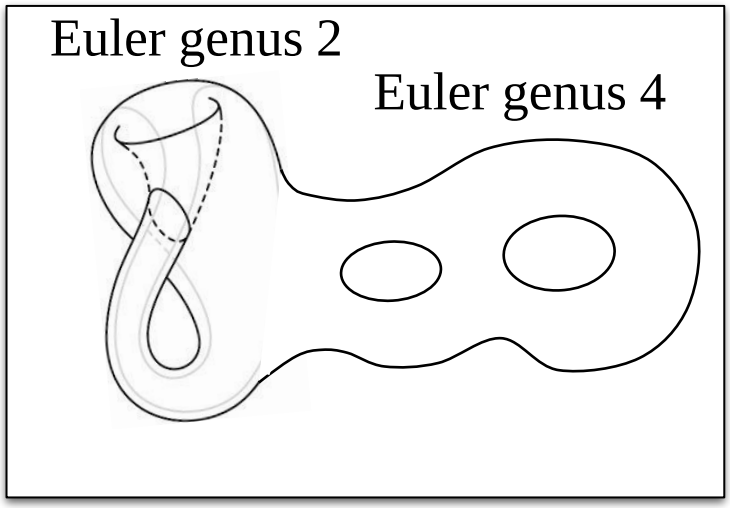


向き付け可能



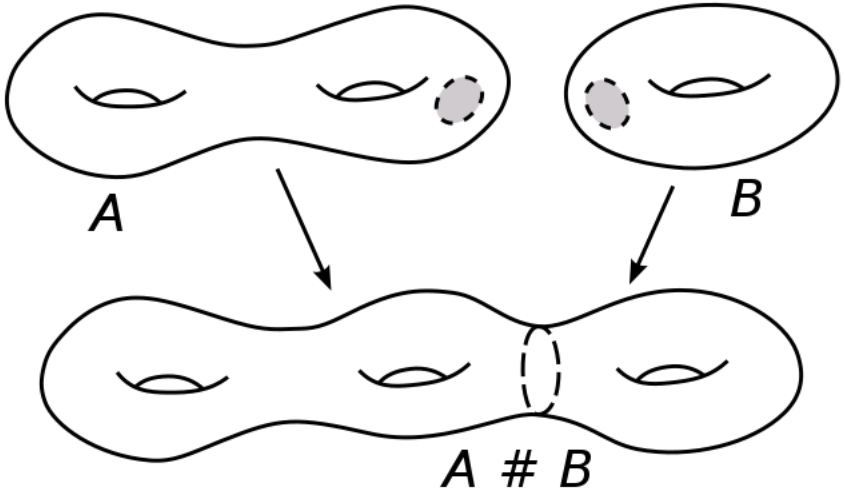
向き付け不可能

| オイラー標数 | 2 | 1 | 0 | -1 | -2 | $\varepsilon(S)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 向付可能 | 球面 $S_0$  | — | トーラス $S_1$  | — | ダブルトーラス $S_2$  | $S_g$ $\varepsilon(S)=2-2g$ |
| 向付不可能 | — | $N_1$ 射影平面  | クラインの壺  $N_2$ |  $N_3$ |  $N_4$ | $N_k$ $\varepsilon(S)=2-k$ |
| オイラー種数 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $eg(S)$ $=2-\varepsilon(S)$ |

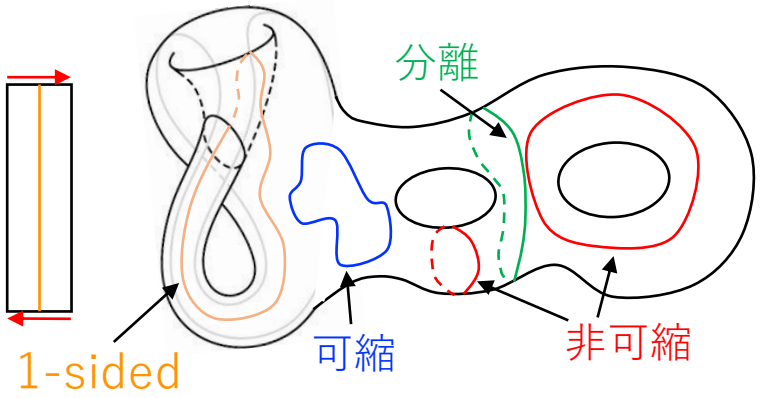



Euler genus 6 $\Rightarrow N_6$

曲面AとBの連結和




$eg(A\#B) = eg(A) + eg(B)$




$l$：可縮 ⇔ 連続的に 1 点につぶせる

$l$：分離 ⇔ $l$ が曲面を切断する

$l$：1-sided ⇔ $l$ の近傍がメビウスの帯

可縮→分離，1-sided→非分離

★ 球面上の任意の閉曲線は可縮である．

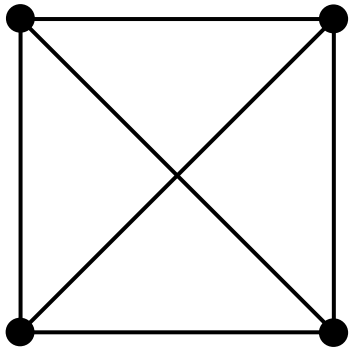
# 閉曲面上のグラフ

$G$ : グラフ，　$S$ : 曲面

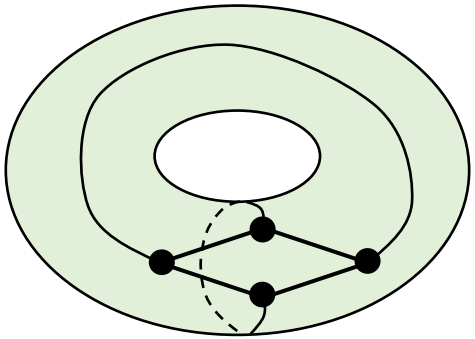
$G$ の $S$ への埋め込み (embedding) : 単射な連続写像 $f : G \to S$

$f$ が 2-胞体埋め込み（2-cell embedding）

$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$　$f(G)$の各面が$\{(x,y) : x^2+y^2<1\}$に位相同型.

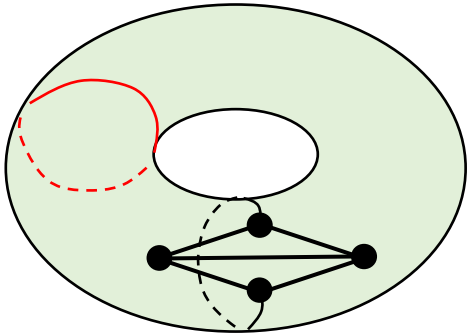


$K_4$



2-胞体埋め込み

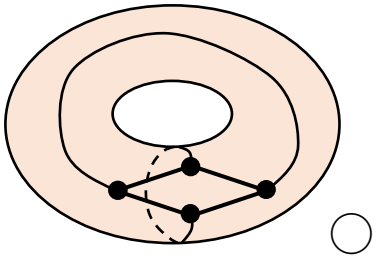
グラフと交わらない閉曲線は
面の中に取られる　→ 可縮



not 2-胞体埋め込み
⇔ヨグラフと交わらない
非可縮な閉曲線

単に，曲面 $S$ に埋め込まれたグラフを $G$ と表す.
だから，$G \subset S$ を定めると，$V(G), E(G), F(G)$が決まる.

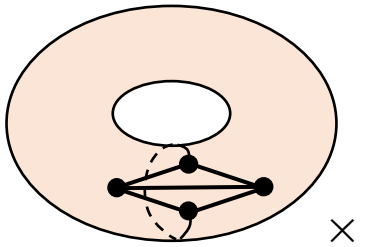
# 曲面上のグラフのオイラーの公式



**定理.** （**オイラー, 1758**）
$G \subset S$ : 2-胞体埋め込みされたグラフ
$V, E, F$ を $G$ の頂点数，辺数，面数とするとき，

$$V - E + F = \varepsilon(S)$$

オイラー標数

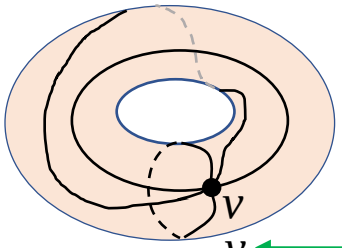


向き付け可能な曲面$S_g$について，　$\varepsilon(S_g) = 2 - 2g$

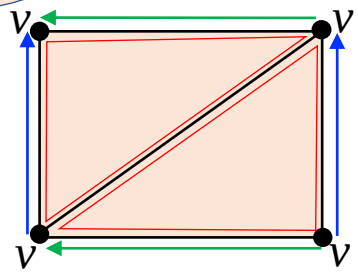
向き付け不可能な曲面$N_k$について，　$\varepsilon(N_k) = 2 - k$

平面グラフ $G$ について，　$G$ : 連結 ⇔ $G$: 2-胞体埋め込み

**命題.**
$G \subset S$: 各面が三角形以上　⇒　$E \leqq 3V - 3\,\varepsilon(S)$
（等号成立 ⇔ 各面が三角形）




$\varepsilon = 0$
$V = 1$
$E = 3$




$3F \leqq 2E$

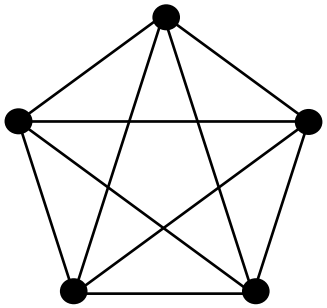
各面が三角形以上

$G$ : 単純グラフ ⇒ 各面は三角形以上

# 曲面上のグラフいろいろ

$G \subset S \Rightarrow E \leqq 3V - 3\,\varepsilon(S)$

$G$ : 平面的 $\Rightarrow$ $E \leqq 3V - 6$

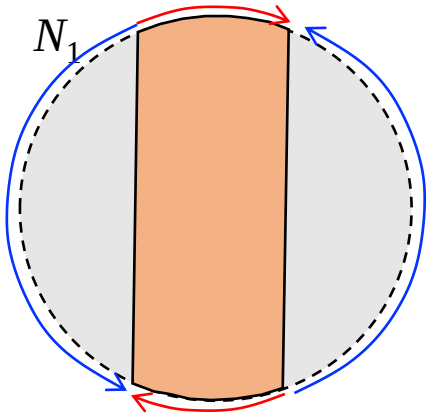


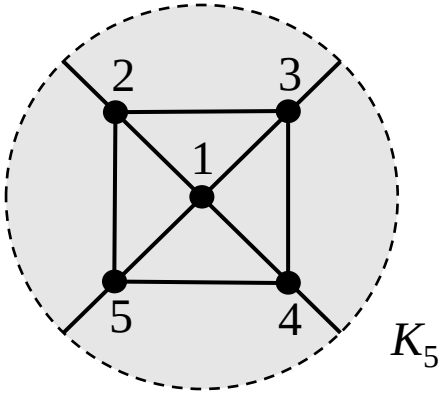
$K_5$

$V$=5, $E$=10

$K_5$ : 非平面的

$G$ : 射影平面的 $\Rightarrow$ $E \leqq 3V - 3$

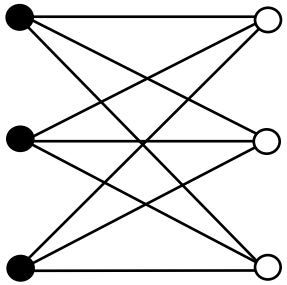



$K_5$

$2E \geqq 4F$

$G$ : 平面的 $\Rightarrow$ $E \leqq 2V - 4$ 三角形なし

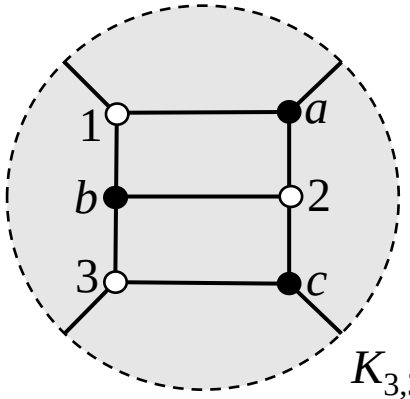


$K_{3,3}$

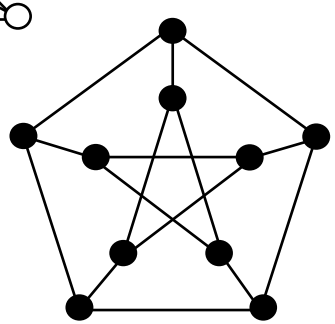
$V$=6, $E$=9

$K_{3,3}$ : 非平面的

$G$ : 射影平面的 $\Rightarrow$ $E \leqq 2V - 2$




$K_{3,3}$



ペテルセン
グラフ

**演習問題２.**
ペテルセングラフは平面的でないことを示せ.
また，射影平面に埋め込め.

# 曲面上のグラフの染色数

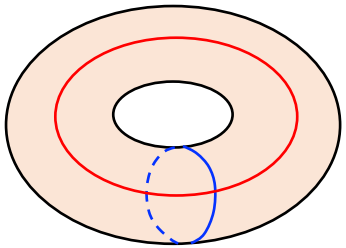
**定理.** （**Heawood, 1890**）
球面以外の任意の曲面 $S_\varepsilon$ に対して，$S_\varepsilon$上のグラフは

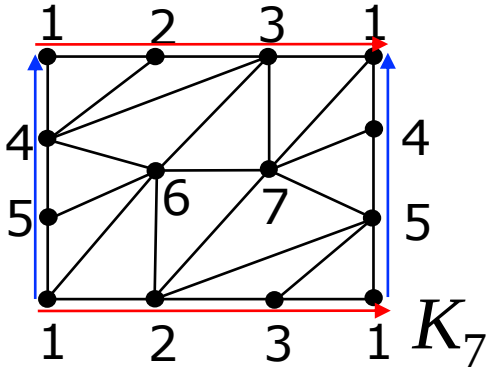
$$H(S_\varepsilon) = \frac{7+\sqrt{49-24\epsilon}}{2}$$

色で色分け可能である.

★ 曲面$S_\varepsilon$上について， $H(S_\varepsilon)$ を **Heawood 数**という.

例えば，トーラス$S_1$のオイラー数は0であるから，$H(S_1) = 7$であり，
トーラス上のグラフは7-彩色可能である.






この評価はクラインの壷以外の曲面で最良である.
（Ringel & Young, 1968）

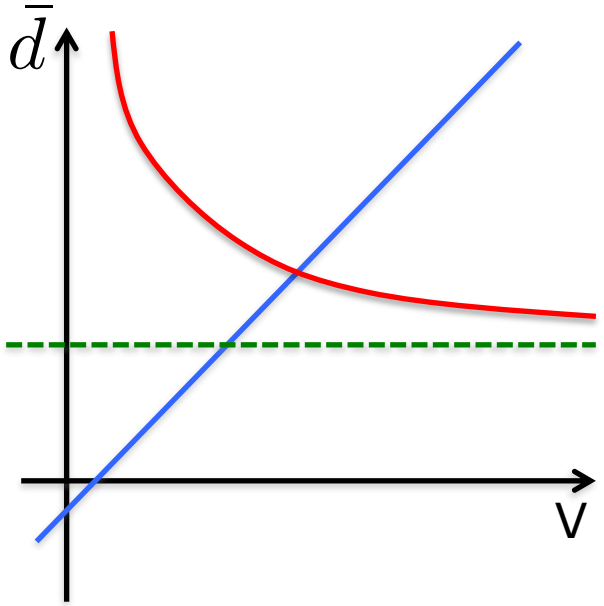
# 曲面上$S_\varepsilon$ ($\varepsilon < 0$)では

$E \leqq 3V - 3\,\varepsilon(S)$

$$\begin{cases} \bar{d} = \dfrac{2E}{V} \leq 6 - \dfrac{6\epsilon}{V} & \text{等号成立} \Leftrightarrow 2E=3F \\ \bar{d} = \dfrac{2E}{V} \leq V - 1 & \text{等号成立} \Leftrightarrow \text{完全グラフ} \end{cases}$$

グラフは単純だから

$$\begin{aligned} \bar{d} &= \frac{2E}{V} \leq \min\left\{6 - \frac{6\epsilon}{V}, V - 1\right\} \\ &\leq \frac{5 + \sqrt{49 - 24\epsilon}}{2} = H(S) - 1 \end{aligned}$$




ゆえに，$G \subset S$ は $H(S)$ 色で彩色できる．

**(Ringel&Young, 1977)**
曲面$S_\varepsilon$には，頂点数 $\dfrac{7 + \sqrt{49 - 24\epsilon}}{2}$ ($= H(S)$) の完全グラフが埋め込める．

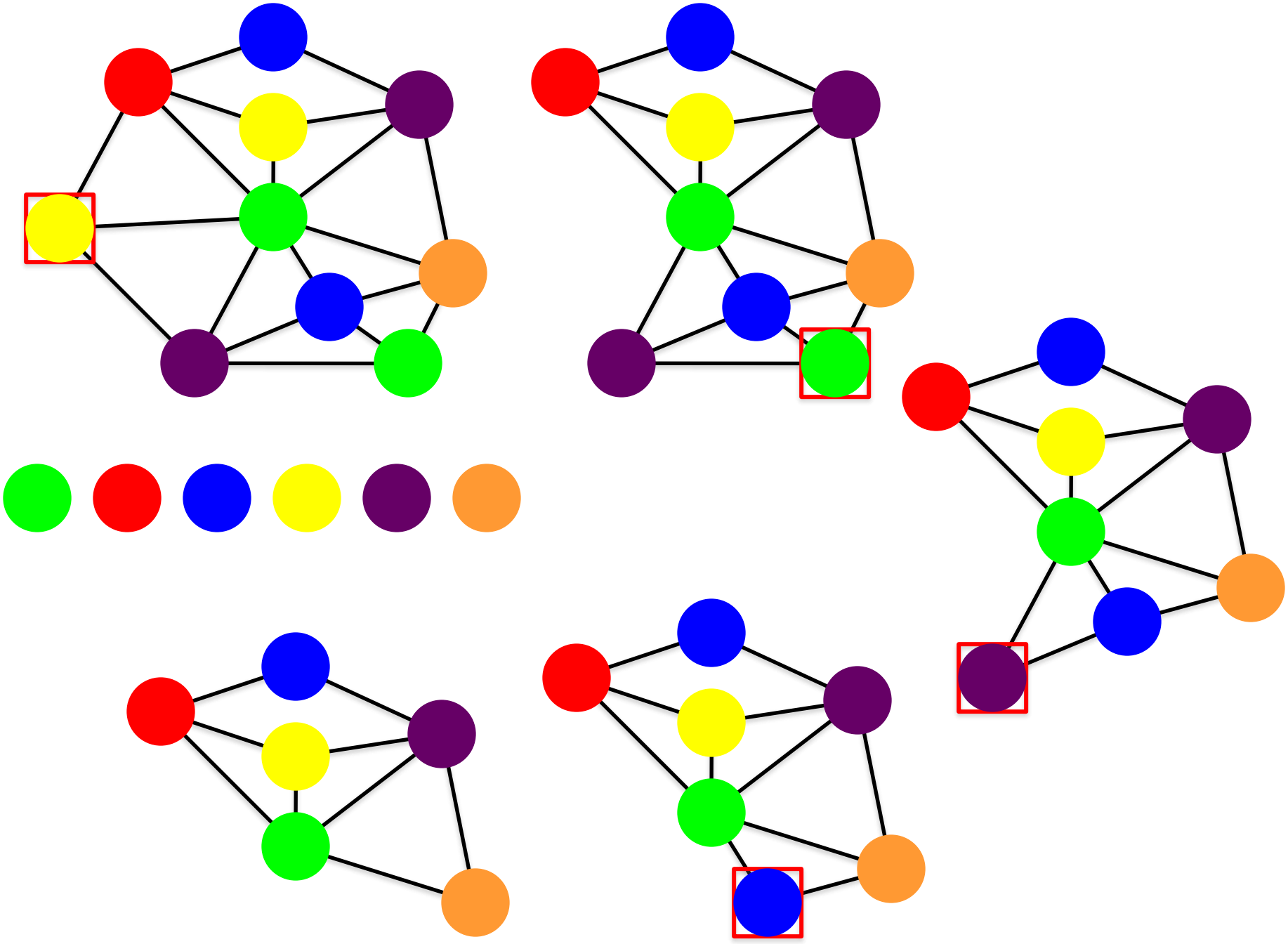
**定理.　（Heawood, 1890）**
球面以外の任意の曲面 $S_\varepsilon$ に対して，$S_\varepsilon$上のグラフは

$$H(S_\varepsilon) = \frac{7+\sqrt{49-24\epsilon}}{2}$$

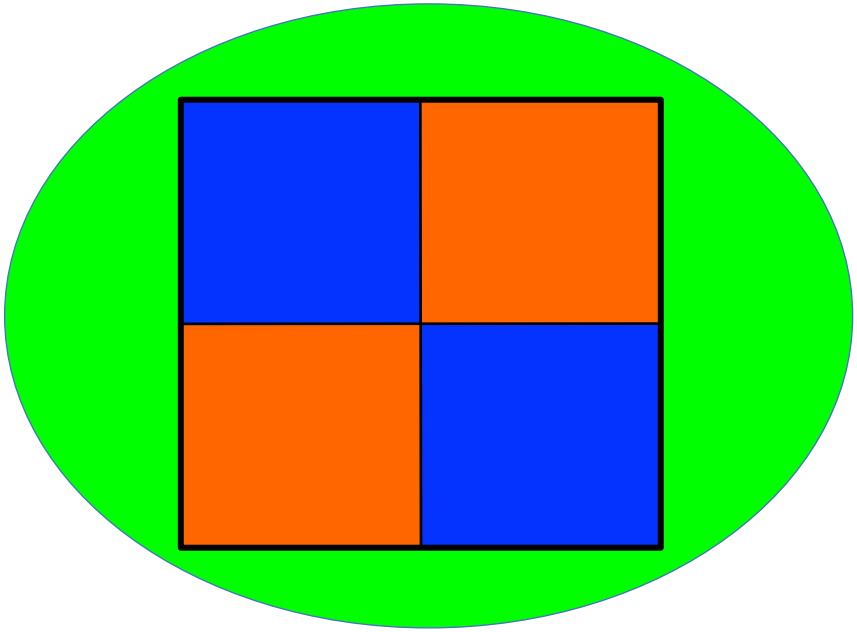
色で色分け可能である．（$S_\varepsilon \neq N_2$で最良．）

**演習問題３．**ヒーウッド数を与える公式に $\varepsilon$ =2を代入したら，四色定理になっている．これは何を求めたのだろうか．また，射影平面上のグラフの染色数の上界を求めよ．

★ なぜ，四色問題は難しいのに，トーラスの7色定理は簡単なのか．（*k*-degenerateグラフという概念を用いて説明せよ．）



# 序章：素朴な問題

**問題.**
**白地図を塗るのに何色あればよいか.**

隣接する2国は違う色で塗りたい.