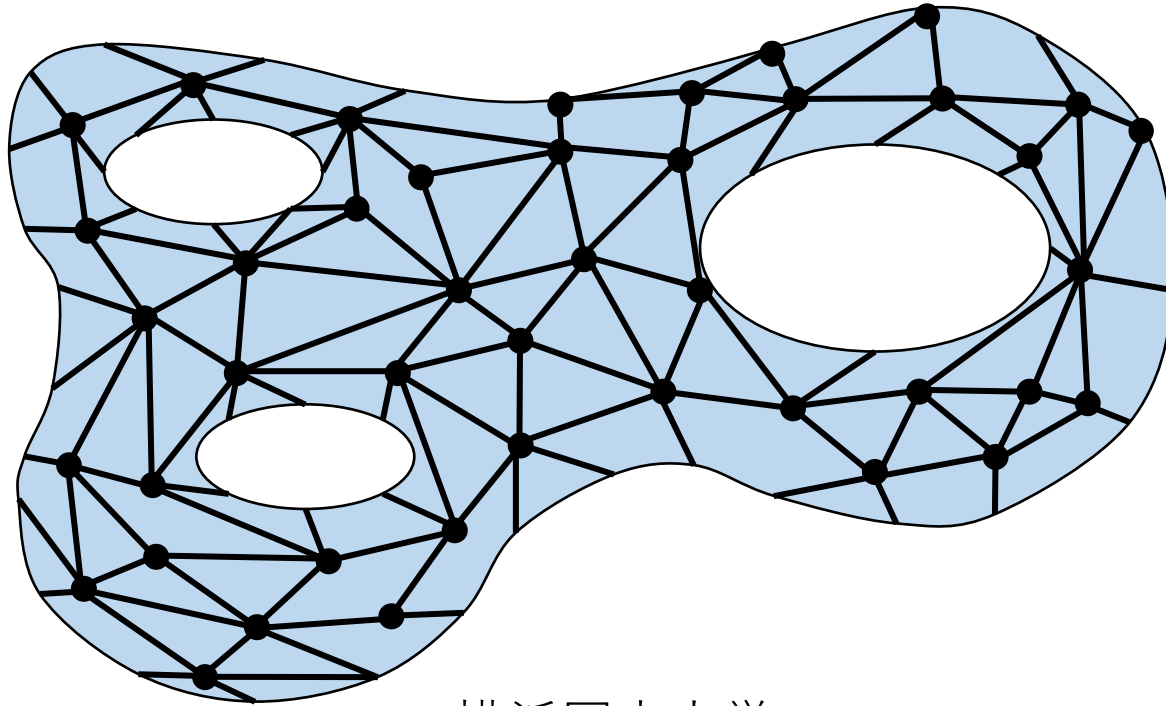


曲面上のグラフの彩色について

②



横浜国立大学
環境情報研究院
中本 敦浩

曲面上のグラフの染色数（古典的結果）

四色定理. (Appel&Haken, 1977)

どんな平面グラフも4-彩色可能である.

定理. (Heawood, 1890)

球面以外の任意の曲面 S_g に対して, S_g 上のグラフは

$$H(S_g) = \frac{7 + \sqrt{49 - 24g}}{2}$$

色で色分け可能である.² これは N_2 以外で最良である.

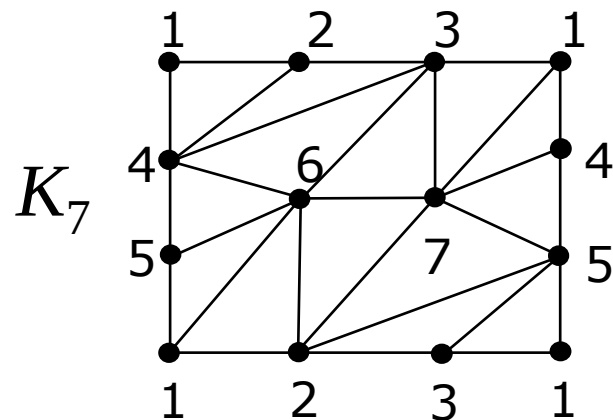
Franklin (1934) :

$G \subset N_2$ について, $\chi(G) \leq H(N_2) - 1 = 6$

Dirac (1956), Albertson-Hutchinson (1979) :

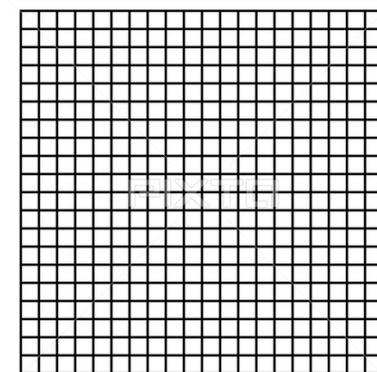
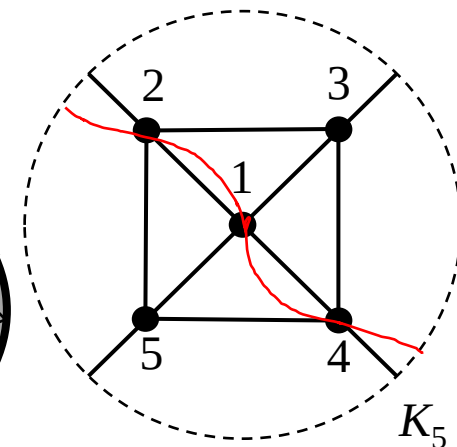
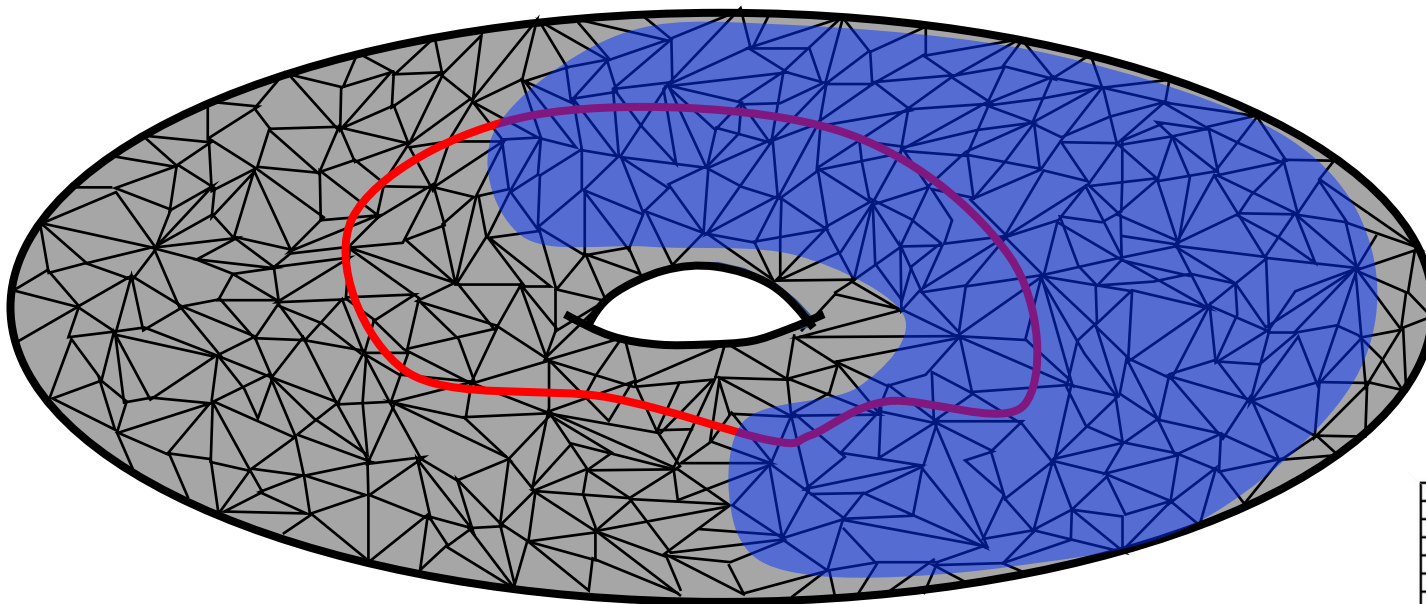
$G \subset S$ について, $\chi(G) = H(S) \Rightarrow$

G は 完全グラフ $K_{H(S)}$ を部分グラフに含む



局所平面グラフ

完全グラフ K_m ($m \geq 5$) は非平面的であり,
 $S \neq S_0$ に埋め込むと, $\text{rep} \leq 3$ になる.



$G \subset S \neq S_0$.

G の **representativity** (or face width) は次で定義される:

$r(G) = \min \{ |G \cap \gamma| : \gamma \text{ は } S \text{ 上の非可縮閉曲線} \}$

γ は頂点のみを通るとしてよい

局所平面グラフ : rep. の大きなグラフ

大きな平面格子を
マイナーとして含む

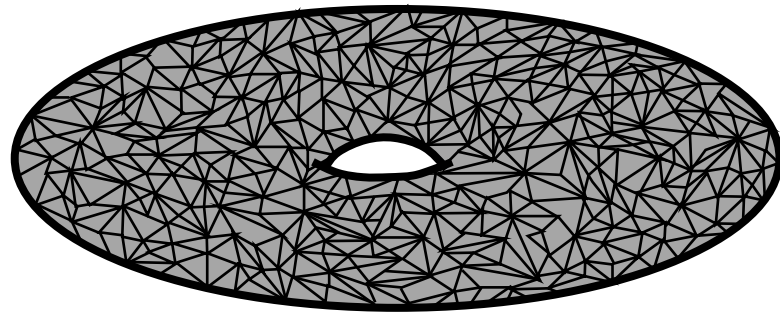
S 上の局所平面グラフが性質 $\mathcal{P}$ を満たす

$\Leftrightarrow \exists R(S)$ s.t. $\forall G \subset S$ について, $r(G) \geq R(S) \rightarrow G$ が $\mathcal{P}$ を満たす

なぜ、局所平面グラフが重要?

★ 多くのグラフの組合せ的問題は、
グラフのtree-widthが抑えられていれば、効率的に解ける。

★ G のTree widthが大きい
⇒ G は大きな平面格子を
マイナーに含む



局所平面グラフは大きな
平面格子を含む

一方、

局所平面グラフは、局所的には平面的だから、
球面以外の曲面 S の局所平面グラフは、 S の種数とは独立に、
平面グラフのような性質が成り立つのではないか。

さらに、

局所平面グラフは、切り開いたら、平面グラフ。

局所平面グラフの彩色

定理. (Thomassen, 1993)

任意の曲面 $S \neq S_0$ の局所平面グラフは5-彩色可能である.

すなわち, $\exists R(S)$ s.t. $\forall G \subset S$ について, $r(G) \cong R(S) \rightarrow G$: 5-彩色可能

注意. 1. $R(S_g) \leq 2^{14g+6}$ が **まじめに** 証明されていた

2. repが任意に大きいグラフ $G \subset S$ で, 5-染色的なものが存在.
(**Fisk三角形分割**: 奇点がちょうど2個で隣接してる三角形分割)

3. Thomassen (1997), 「任意の $S \neq S_0$ について, S に埋め込み可能な **6-critical graphs** の個数は有限個」を証明した. **これは上の定理を含んでいる.**

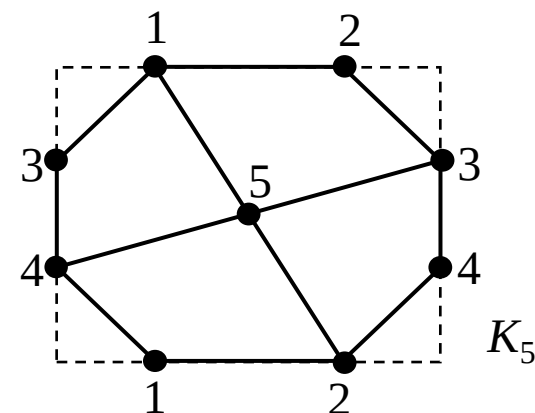
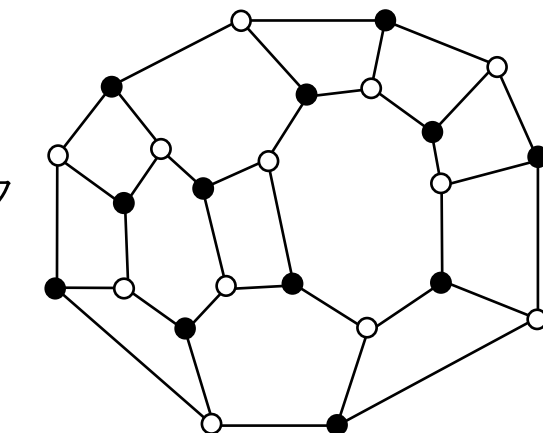
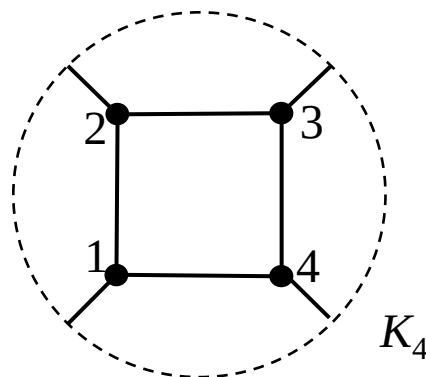
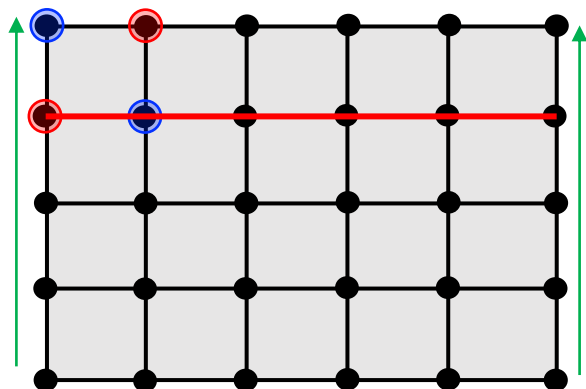
任意の部分グラフは5-彩色可能

曲面の偶角形分割の彩色

$G \subset S$: 偶角形分割^{def.} $\Leftrightarrow$ 各面が偶角形であるグラフ

命題.

球面の任意の偶角形分割は二部グラフである.



定理. (Hutchinson, 1995)

種数 $g \neq 0$ の向き付け可能曲面の局所平面偶角形分割は3-彩色可能.

★ 「3」 は最良である.

★ $R(S) \leq 2^{3g+5}$ がまじめに証明されていた



Joan Hutchinson

次の定理が知られている：

定理. (Hutchinson 1975, Liu et al. 2019)

G を曲面 $S \neq S_0$ の偶角形分割とすると、次が成立.

$$\chi(G) \leq \frac{5 + \sqrt{25 - 16\epsilon(S)}}{2}$$

ただし、この評価は N_2 と S_2 以外で最良である.



Joan Hutchinson

演習問題 4. 上の定理を証明してみよう.

	球面	射影平面	トーラス	クラインの壺	一般の曲面	局所平面的	
グラフ	4	6	7	6	$\frac{7 + \sqrt{49 - 24\epsilon}}{2}$	5	
偶角形分割	2	4	5	4	$\frac{5 + \sqrt{25 - 16\epsilon(S)}}{2}$	3	
						4	?

向付可能

向付不可能

↑
射影平面の場合

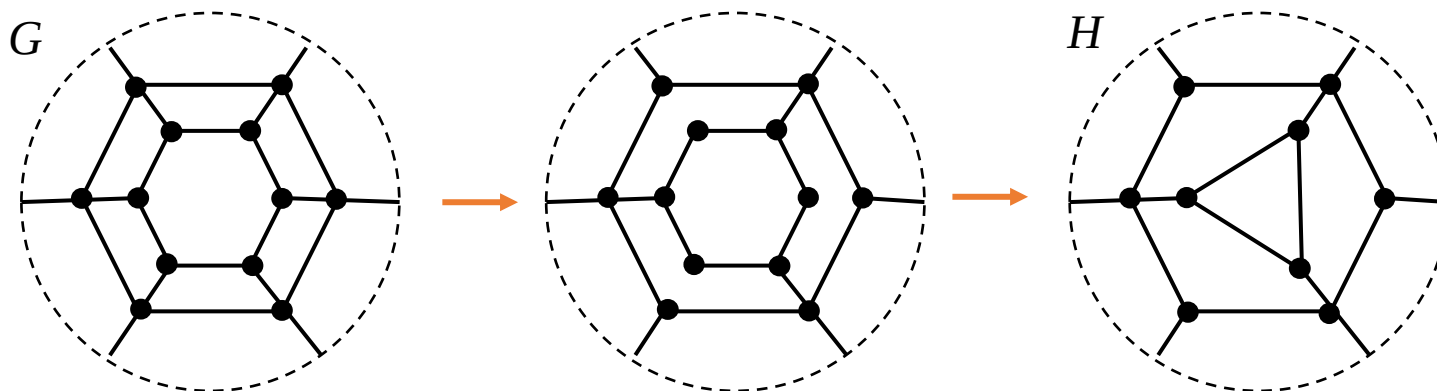
Cycle parity という代数的な量を導入して、Hutchinsonの定理を証明する

Robertson-Seymourのグラフマイナー

$G, H \subset S$: グラフ

H が G のマイナー (曲面マイナー) $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$

H は G から、辺の除去と縮約を繰り返して得られる

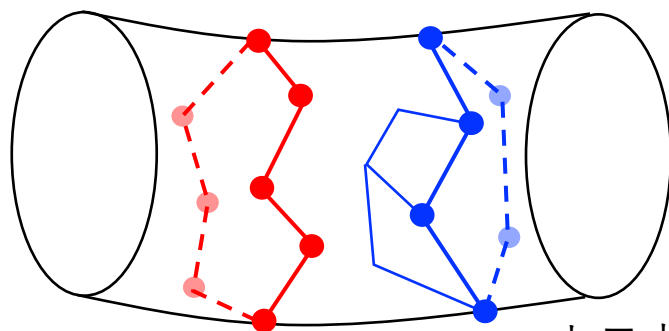


定理. (Robertson&Seymour, 1988)

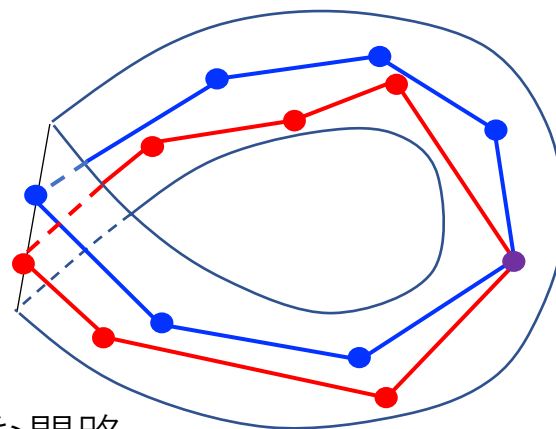
$H \subset S \neq S_0$ を固定すると、次を満たす整数 $N_S(H)$ が存在する：
 $G \subset S$ について、 $r(G) \geq N_S(H) \Rightarrow G$ は H をマイナーとして含む

この定理が使えることがわかると、局所平面グラフのrepの大きさを真面目に評価しなくなった。

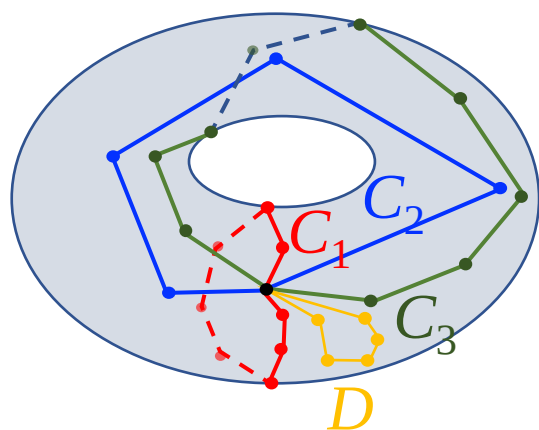
偶奇性の議論



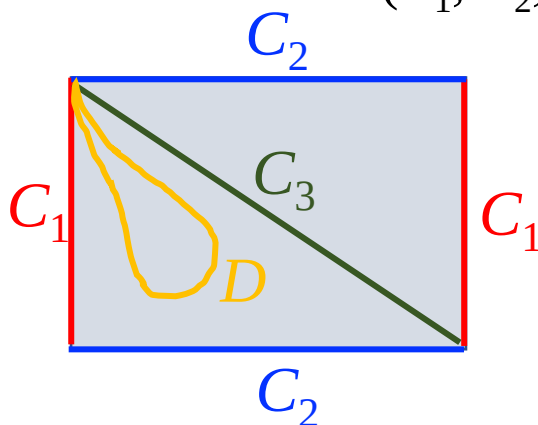
ホモトピックな閉路



★ 偶角形分割では，2つのホモトピックな閉路の長さの偶奇性は等しい．

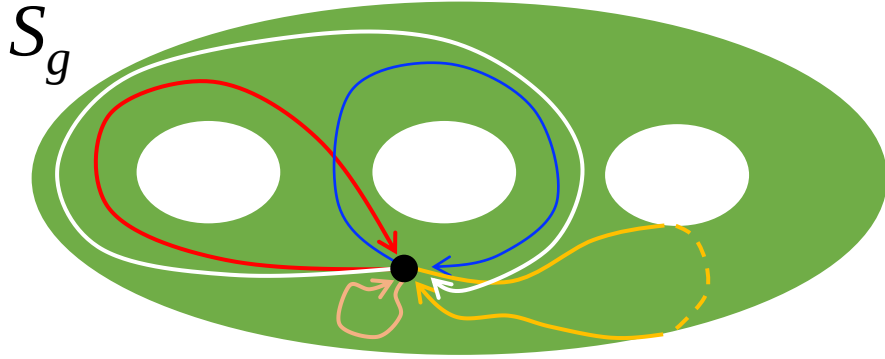


★ C_3 の偶奇は C_1 と C_2 の偶奇の和．
(C_1, C_2, C_3 のどれかは偶数)



★ 可縮な閉路は偶閉路．

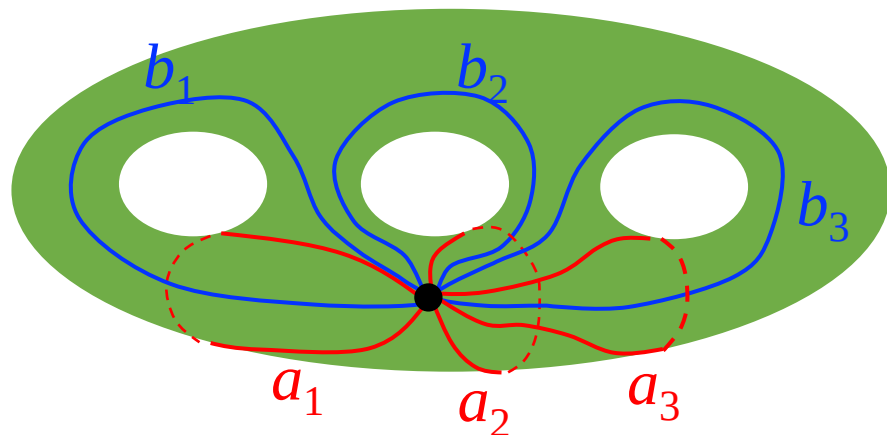
偶角形分割のcycle parity



基本群 $\pi_1(S)$ ：

基点を始点・終点とする S 上の
曲線をホモトピーで割った群

偶角形分割のcycle parity

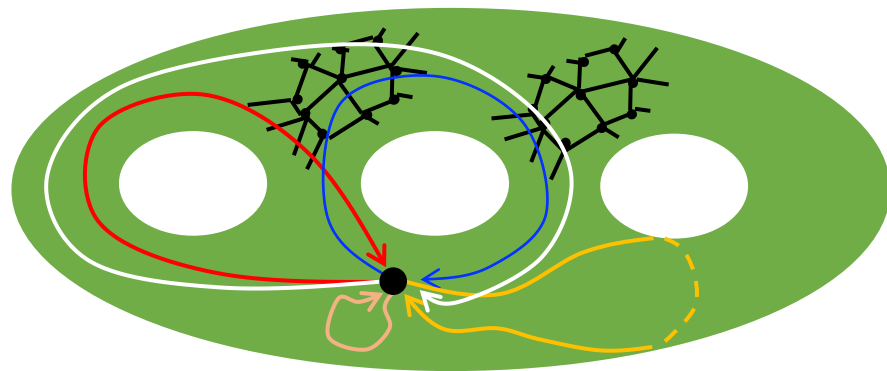


基本群 $\pi_1(S)$:

基点を始点・終点とする S 上の
曲線をホモトピーで割った群

基底 : $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$

$G \subset S$



偶角形分割 $G \subset S$ を固定.

準同型写像 $\rho_G : \pi_1(S) \rightarrow \mathbf{Z}_2$ が定まる

$$\rho_G(a \cdot b) \equiv \rho_G(a) + \rho_G(b)$$

$$\rho_G(\text{id}) \equiv 0$$

ρ_G を G の **Cycle parity** という

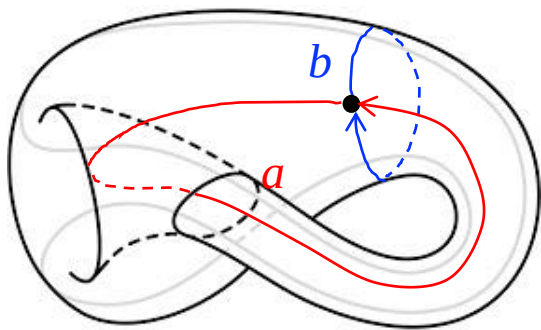
$$\rho_G : \pi_1(S) \rightarrow \{0\} \Leftrightarrow G \subset S : \text{二部グラフ}$$

Cycle parityの練習

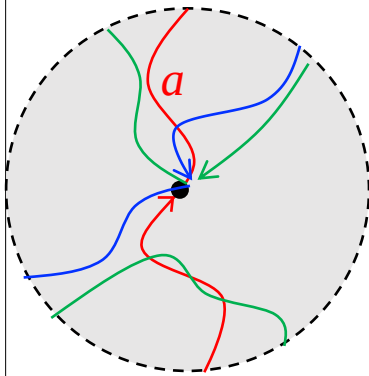
球面 S_0

$$\pi_1(S_0) = \{\text{id}\}$$

⇒球面の偶角形分割は
すべて二部グラフ



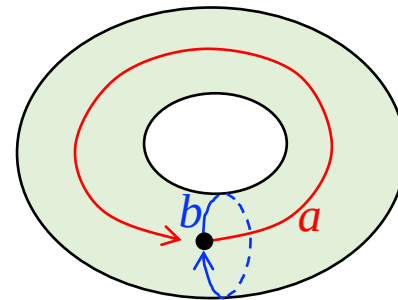
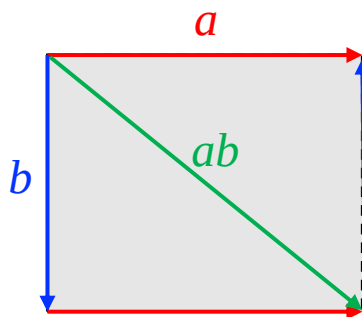
クラインの壺 N_2



射影平面 N_1

$$\pi_1(S_0) = \{\text{id}, a\}, \text{ただし, } a^2 = \text{id}$$

⇒非可縮閉路の偶奇で,
二部グラフ性が決まる



トーラス S_1

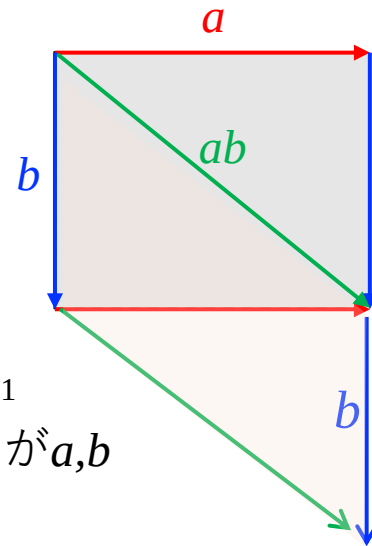
$\pi_1(S_1)$ の基底が a, b

⇒ Cycle parityは

$(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)$

2部グラフ

同じ



$\pi_1(N_2)$ の基底が a, b

⇒ Cycle parityは

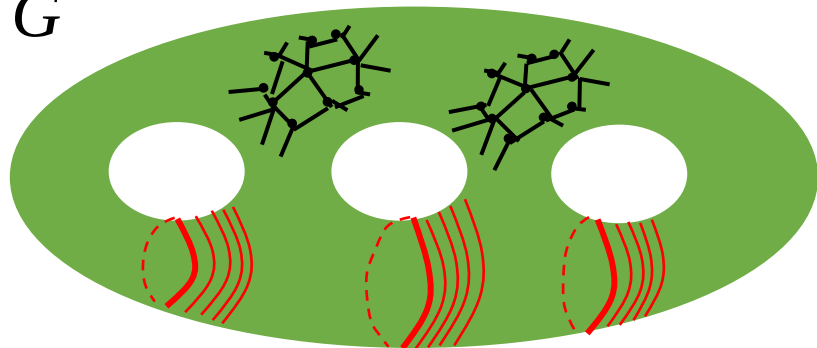
$(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)$

2部グラフ 異なる

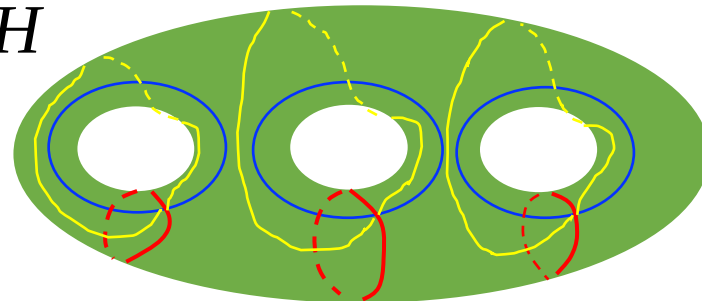
Hutchinsonの定理の証明.

1. Robertson-Seymourの結果により, 左図のように disjoint 偶閉路が取れる

G

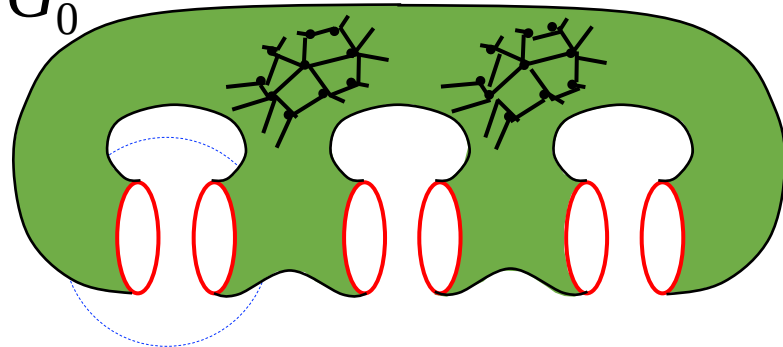


H



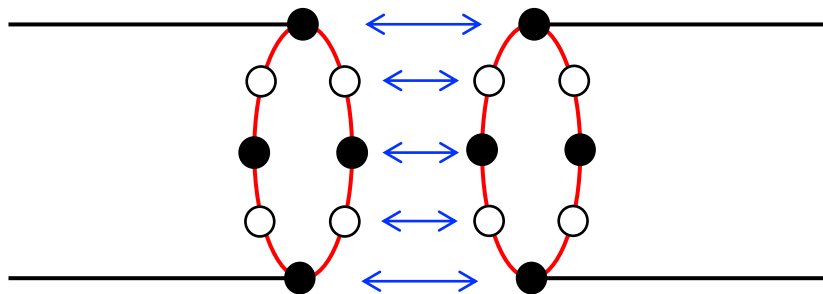
H : 各閉曲線にhomotopicな
4本のdisjoint cyclesを持つ

G_0

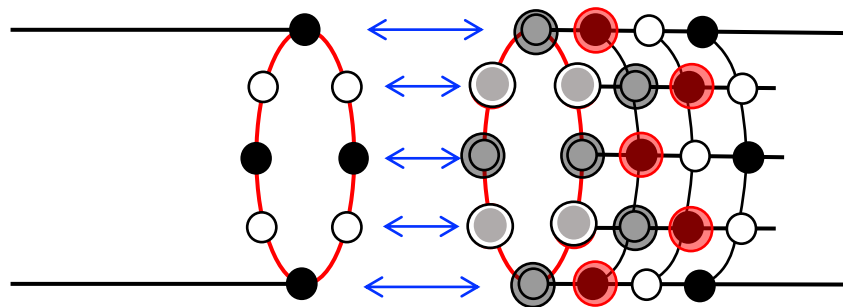


2. 切断したグラフ G_0 は二部グラフ

3. 境界に3色目を導入し, 境界を同一視せよ.



黒 黒 白 白
白 赤 赤 黒

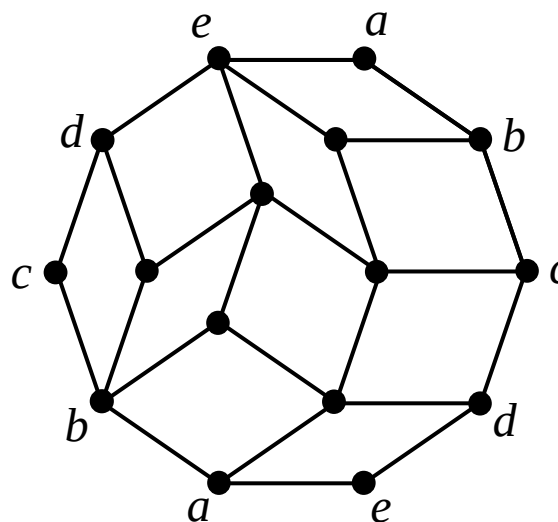
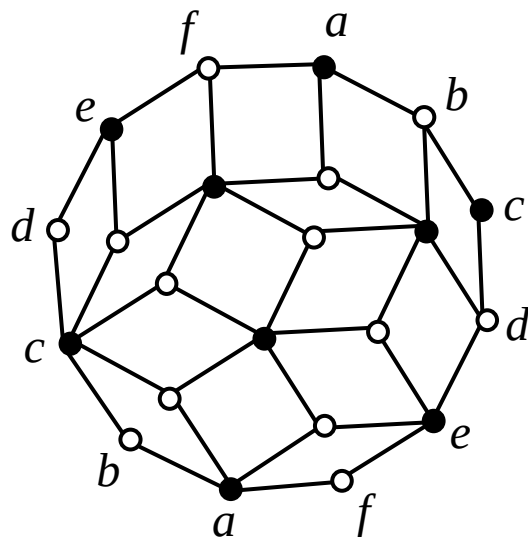


4. G の3-彩色を得る.

射影平面の四角形分割の染色数

定理. (Youngs, 1996)

G を射影平面の四角形分割とすると, $\chi(G) \in \{2, 4\}$



★ $G \subset N_1$: 偶角形分割 $\Rightarrow \chi(G) \leq 4$ (Hutchinsonの結果)
 $\chi(G) = 4 \Leftrightarrow G$ はodd 四角形分割を含む

★ (Gimbel&Thomassen, 1997)

$G \subset N_1$: 三角形なし, 3-彩色不可能 $\Leftrightarrow G$ はodd 四角形分割を含む

Quadrangulations on the projective plane

補題. $G \subset N_1$: 二部グラフでない四角形分割

任意の彩色 $c: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots\}$ について, 4頂点の色がすべて異なる面 f (polychromatic face) が存在する.

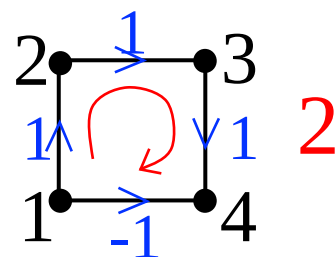
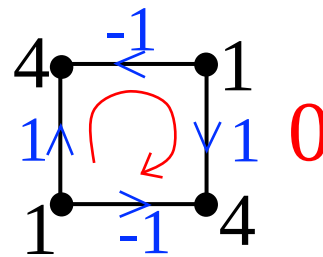
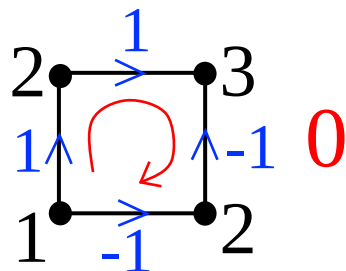
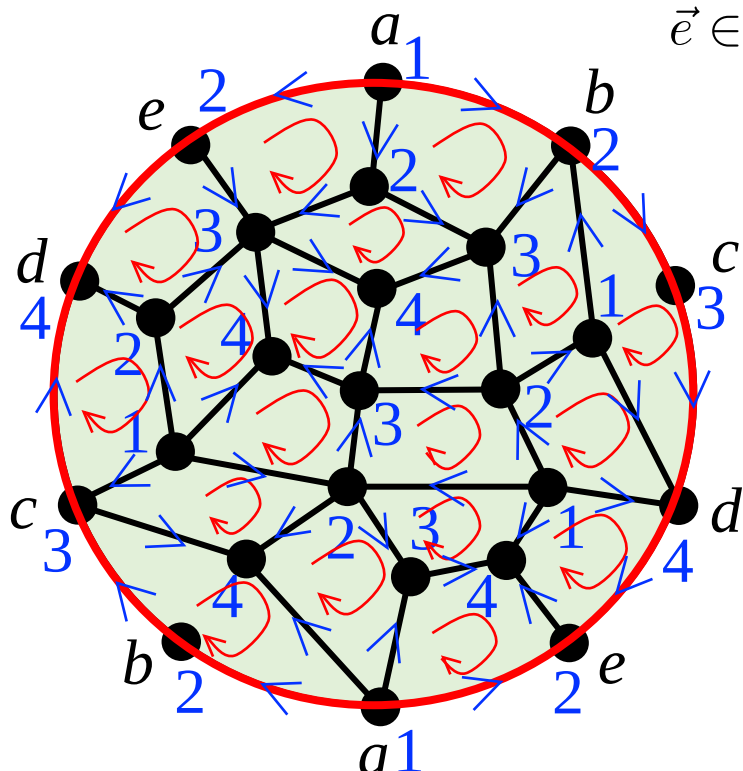
1. G を奇閉路 C で切り開く.

2. $\forall$ 辺 xy について, $c(x) < c(y)$ のとき, 向き $x \rightarrow y$ を与える

3. 任意の面 f について, 時計回り O を与え,

$\vec{e} \in E(\partial f)$

$$\psi_f(\vec{e}) = \begin{cases} 1 & (\vec{e} \text{ is along } f_O) \\ -1 & (\text{Otherwise}) \end{cases}$$



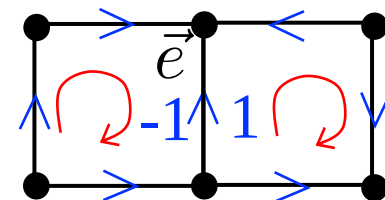
$$\text{Let } \psi(f) = \sum_{\vec{e} \in E(\partial f)} \psi_f(\vec{e})$$

補題. $G \subset N_1$: 四角形分割

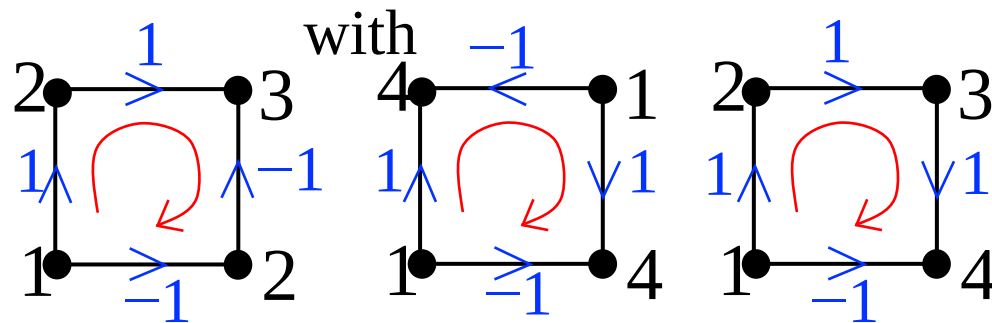
任意の彩色 $c: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots\}$, について, 4頂点の色がすべて異なる面 f (polychromatic face) が存在する.

$$\text{Let } \psi(G) = \sum_{f \in F(G)} \psi(f) = \sum_{\vec{e}} \{ \psi_f(\vec{e}) + \psi_{f'}(\vec{e}) \} \quad \text{since } \psi(f) = \sum_{\vec{e} \in E(\partial f)} \psi_f(\vec{e})$$

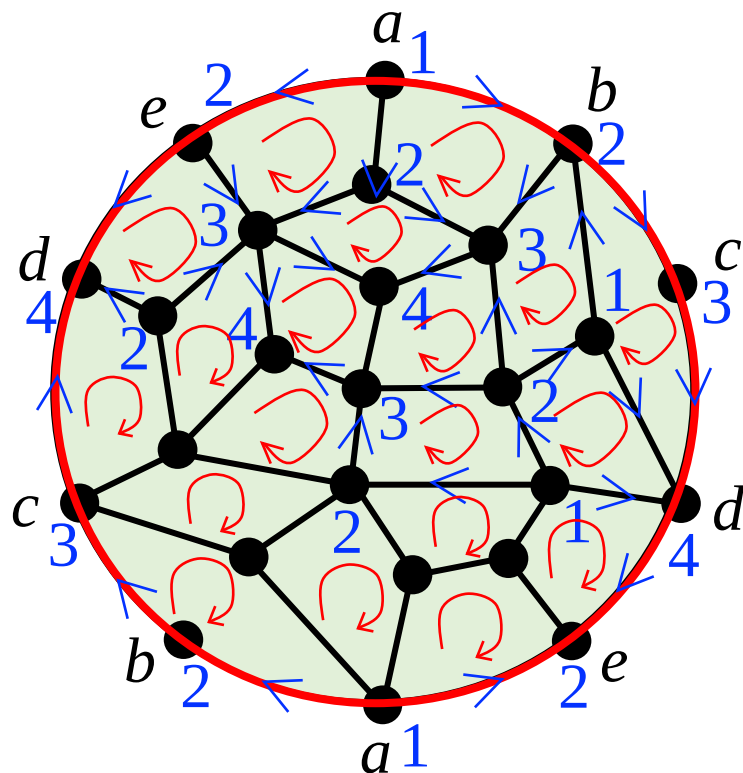
$$\begin{array}{cc} 1 & -1 & \vec{e} \notin E(C) \\ \hline 1 & 1 & \vec{e} \in E(C) \\ -1 & -1 & \end{array}$$



$$= 2t \neq 0 \Rightarrow \exists f \in F(G) \quad \psi(f) \neq 0$$



$\Rightarrow f$ は polychromatic.

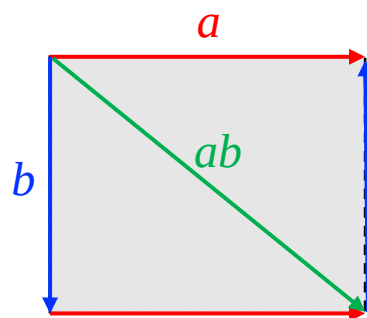
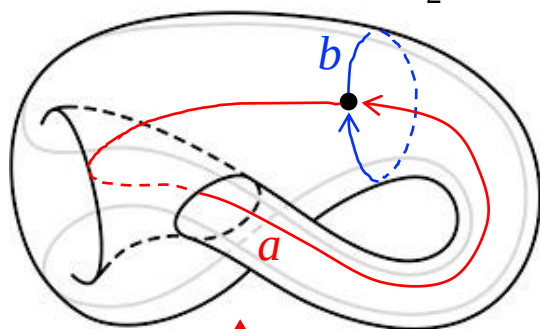


	球面	射影平面	トーラス	クラインの壺	一般の曲面	局所平面的
グラフ	4	6	7	6	$\frac{7 + \sqrt{49 - 24\epsilon}}{2}$	5
偶角形分割	2	4	5	4	$\frac{5 + \sqrt{25 - 16\epsilon(S)}}{2}$	3
						4 ?

向付可能

向付不可能

クラインの壺 N_2



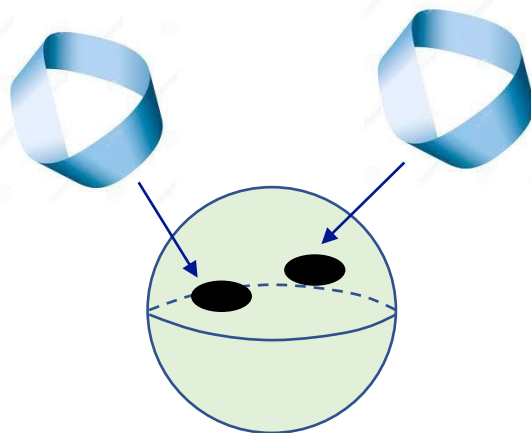
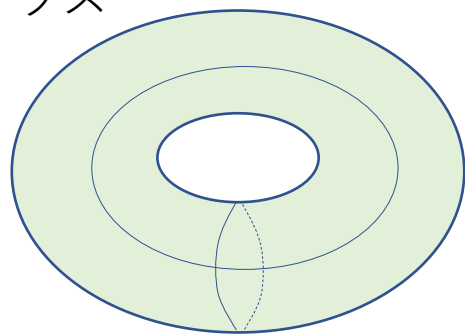
$\pi_1(N_2)$ の基底が a, b

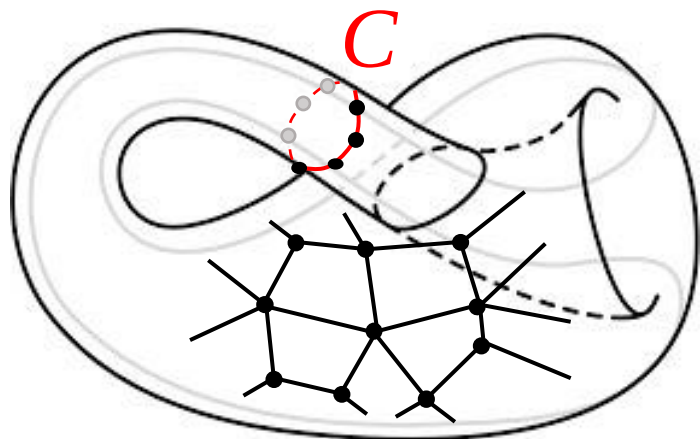
$\Rightarrow$ Cycle parity は

$(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)$

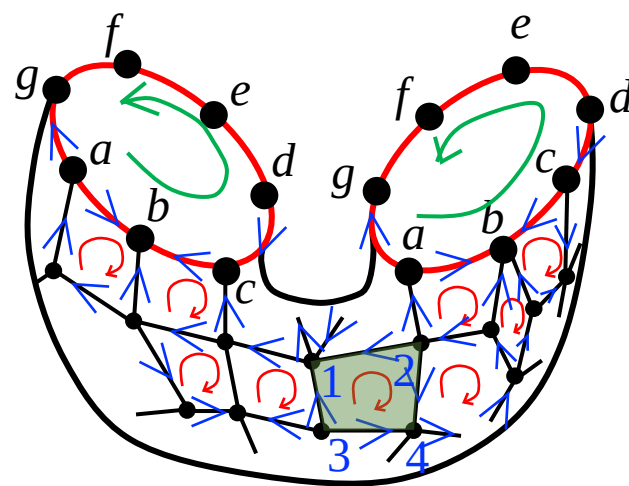
2部グラフ 異なる

トーラス

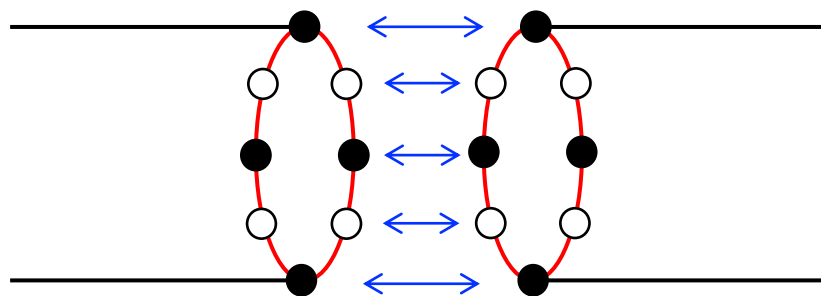




場合 1.
 $|C|$ が奇数



場合 2.
 $|C|$ が偶数



演習問題5. クラインの壺 N_2 の四角形分割 G について, N_2 をアニュラスに切り開く閉路 C の長さが奇数のとき (場合 1) と偶数のとき (場合 2) に, 染色数がどうなるか議論せよ. (必要であれば, C とホモトピックに数本のサイクルが取れることを仮定してよい.)

定理. (Youngs, 1996) 再掲

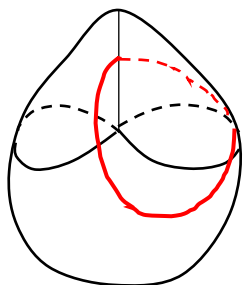
G を射影平面の四角形分割とすると, $\chi(G) \in \{2, 4\}$

定理. (Archdeacon, Hutchinson, Nakamoto, Negami, Ota, 2001)

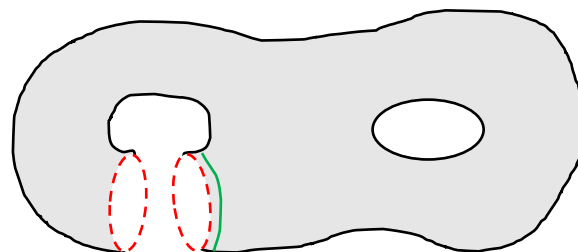
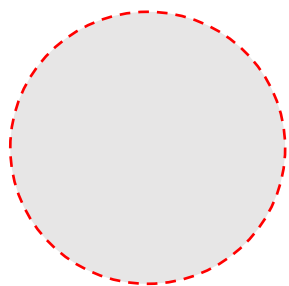
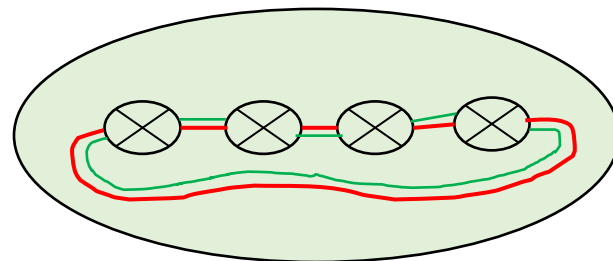
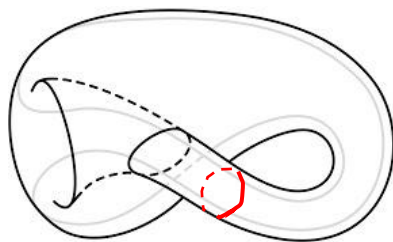
$G \subset N_k$: 四角形分割

G が向き付け可能に切り開く奇閉路を持つ $\Rightarrow \chi(G) \geq 4$

射影平面



クラインの壺



	球面	射影平面	トーラス	クライン の壺	一般の曲面	局所平面的
グラフ	4	6	7	6	$\frac{7 + \sqrt{49 - 24\epsilon}}{2}$	5
偶角形 分割	2	4	5	4	$\frac{5 + \sqrt{25 - 16\epsilon(S)}}{2}$	3
						4 ?

向付可能

向付不可能

	球面	射影平面	トーラス	クライン の壺	一般の曲面	局所平面的
グラフ	4	6	7	6	$\frac{7 + \sqrt{49 - 24\epsilon}}{2}$	5
偶角形 分割	2	4	5	4	$\frac{5 + \sqrt{25 - 16\epsilon(S)}}{2}$	3
						4

向付可能

向付不可能

Representativity と似た概念

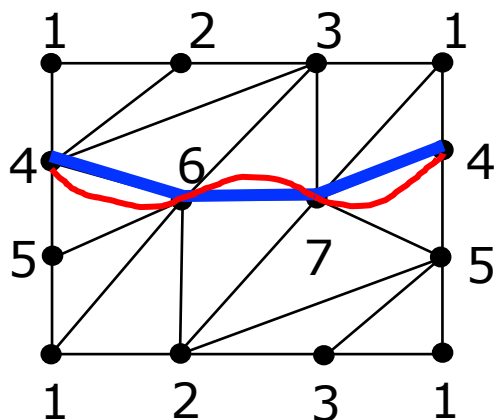
$$G \subset S \neq S_0.$$

G の **representativity** (or face width) は次で定義される:

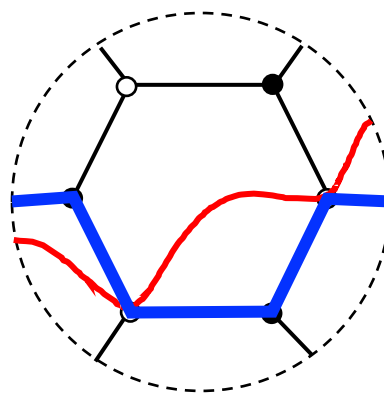
$$r(G) = \min \{ |G \cap \gamma| : \gamma \text{ は } S \text{ 上の非可縮閉曲線} \}$$

G の **edge-width** は次で定義される:

$$ew(G) = \min \{ |C| : C \text{ は } G \text{ の非可縮閉路} \}$$



G : 三角形分割
 $\Rightarrow r(G) = ew(G)$



一般に $\text{face size} \leq k$ なら
 $\Rightarrow r(G) \leq ew(G) \leq \frac{k}{2} r(G)$

局所平面グラフの彩色

定理. (Thomassen, 1993)

任意の曲面 $S \neq S_0$ の局所平面グラフは5-彩色可能である.

すなわち, $\exists R(S)$ s.t. $\forall G \subset S$ について, $r(G) \leq R(S) \rightarrow G$: 5-彩色可能

注意. 1. $R(S_g) \leq 2^{14g+6}$ が **まじめに** 証明されていた

2. repが任意に大きいグラフ $G \subset S$ で, 5-染色的なものが存在.
(**Fisk三角形分割**: 奇点がちょうど2個で隣接してる三角形分割)

3. Thomassen (1997), 「任意の $S \neq S_0$ について, S に埋め込み可能な **6-critical graphs** の個数は有限個」を証明した. **これは上の定理を含んでいる.**

任意の部分グラフは5-彩色可能

S の 6-critical graphs $G_1, G_2, \dots, G_m \longrightarrow k = \max\{ew(f(H)) : H = G_i, f: H \rightarrow S\}$

$G: r(G) > k$, 染色数 6 以上

$G' \subset G$: 6-critical graph

$\rightarrow ew(G') \leq k$

$\rightarrow r(G) \leq ew(G) \leq ew(G') \leq k$

矛盾

