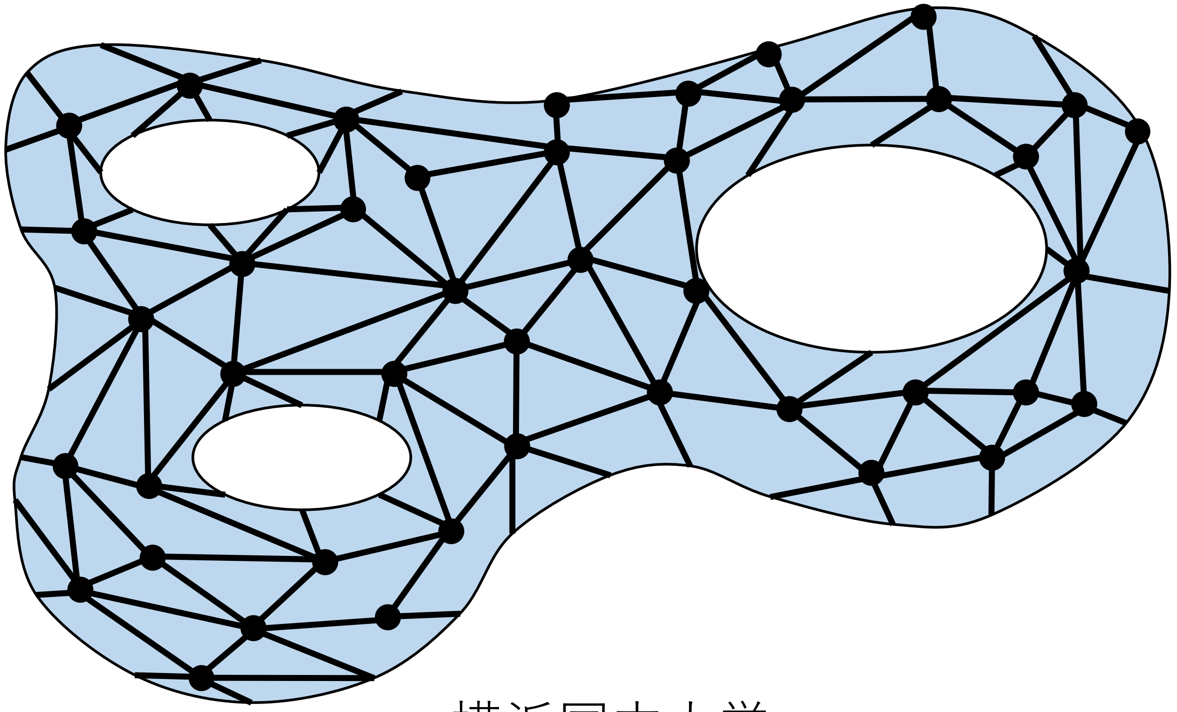
曲面上のグラフの彩色について
③



横浜国立大学
環境情報研究院
中本 敦浩

偶角形分割の次の研究対象は？

定理. (Thomassen, 1993)
任意の曲面$S \neq S_0$ の局所平面グラフは5-彩色可能である.

定理. (Hutchinson, 1995)
種数 g $\neq 0$ の向き付け可能曲面の局所平面偶角形分割は3-彩色可能.

定理. (Hutchinson, Richter, Seymour, 2002)
種数 g $\neq 0$ の向き付け可能曲面の局所平面**偶三角形分割**は4-彩色可能.

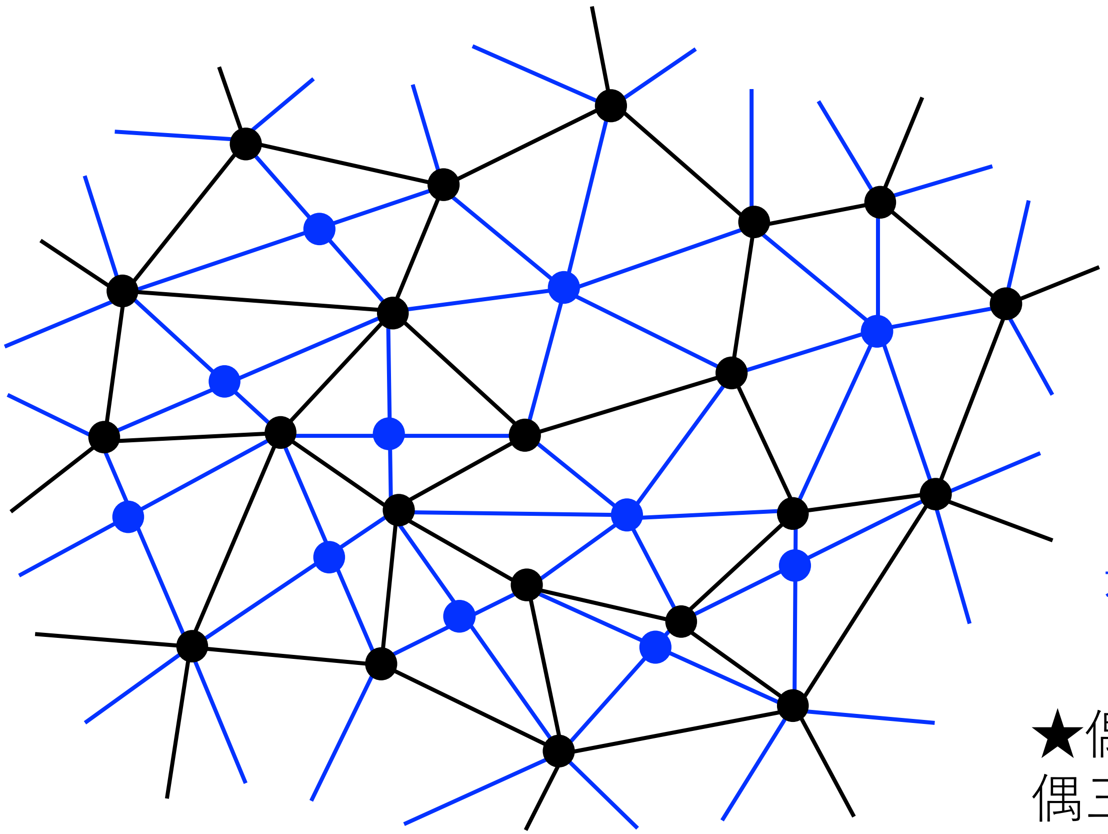
Joan Hutchinson

$G \subset S$: 偶三角形分割（even triangulation）
$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 各頂点の次数が偶数の三角形分割

命題.
球面の偶三角形分割は3-彩色可能.

定理. G: 3-彩色可能平面グラフ
$\Leftrightarrow$ Gは偶三角形分割の部分グラフ

偶三角形分割のある構成法



G : 偶角形分割

FS(G) : Gの**面細分**
⇔ Gの各面に頂点をおき，
境界上の頂点と結んで
得られる三角形分割

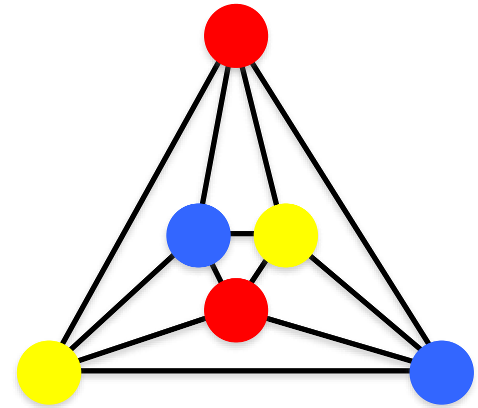
追加した頂点：**color factor**

★偶角形分割の面細分は，
偶三角形分割である．

問． 偶三角形分割 G は，いつでも偶角形分割 H の面細分か？

$$G = \mathrm{FS}(H) \rightarrow \chi(G) \leqq \chi(H) + 1$$

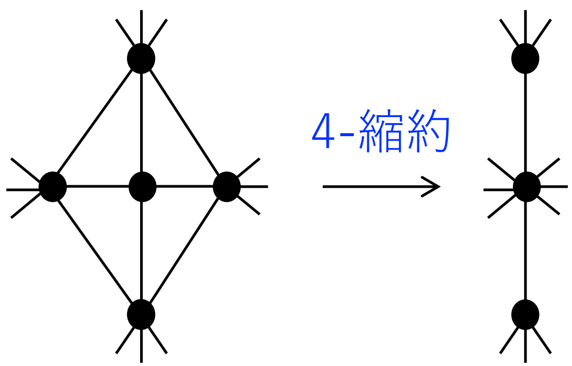
命題.（再掲）
球面の偶三角形分割は3-彩色可能.

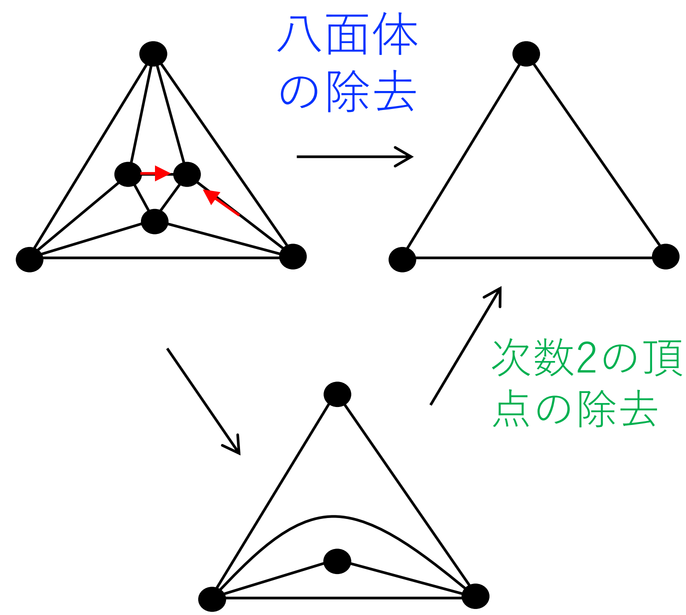


正八面体グラフ・・・最小の球面三角形分割

証明は，グラフの生成定理を使う.

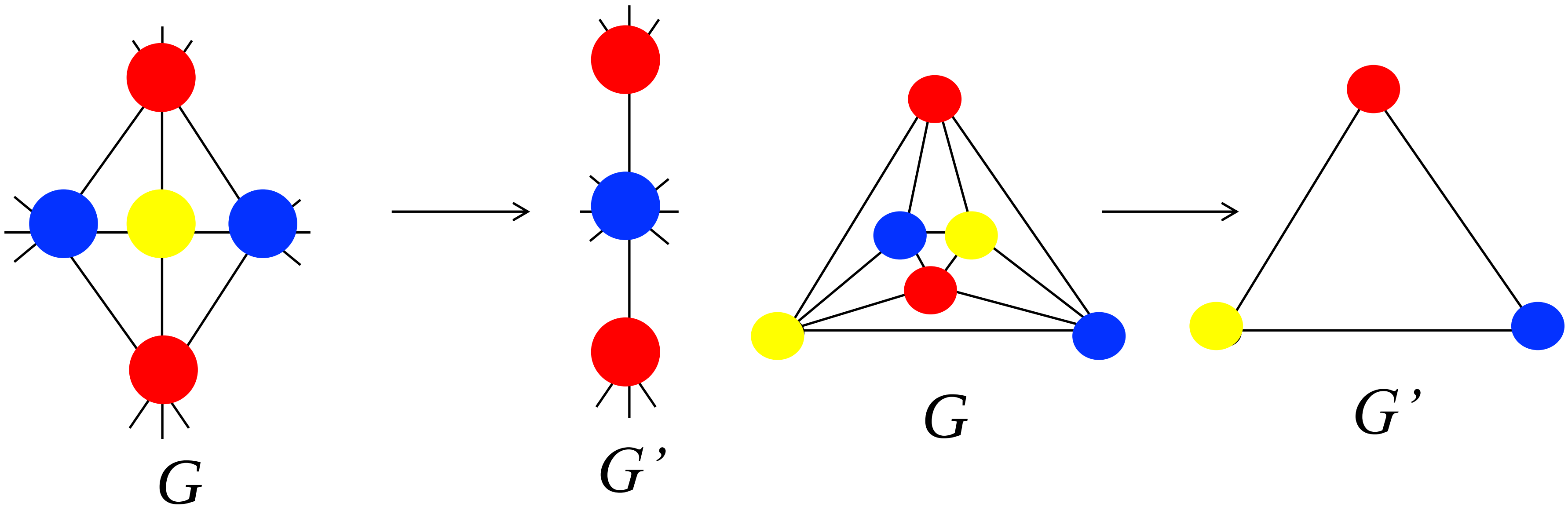
定理. (Batajelj, 1984)
任意の球面偶三角形分割は下の２つの変形を繰り返して，正八面体グラフに変形可能である.



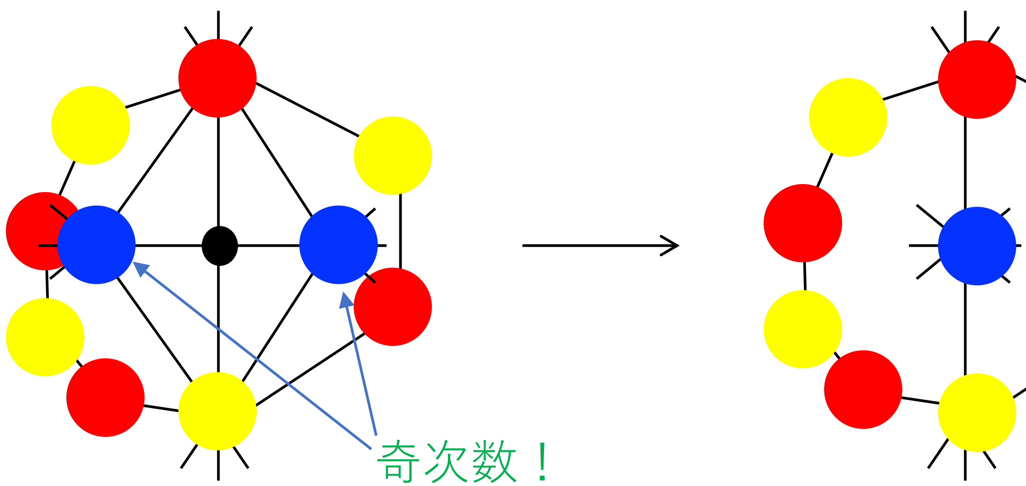


★これらの変形は，偶三角形分割を
偶三角形分割に変形する.

うまくいく場合



うまくいかない場合

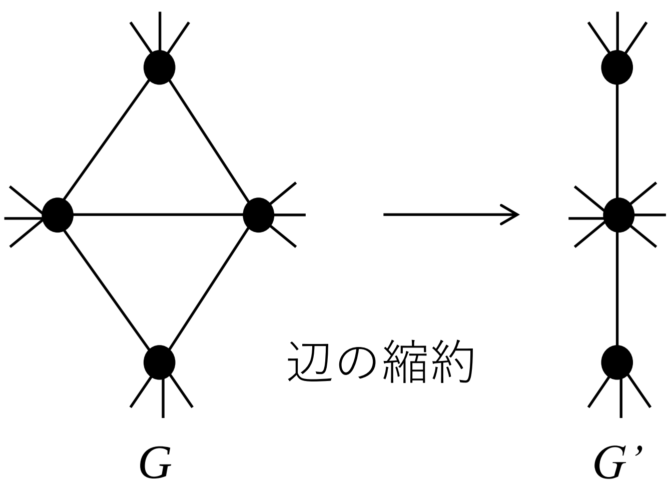


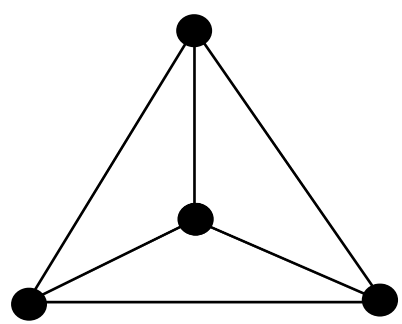
この場合，G が偶三角形分割であることに反する．

球面偶三角形分割の3-彩色性：
グラフの生成定理を用いて，あっさり証明できた.

四色定理（球面三角形分割の4-彩色性）：
1．頂点の除去では難しそう.
2．結局，平面グラフを三角形分割に限定して，不可避かつ可約な配置を決定した．そのリストは，その当時，2000個程度.

定理．(Steinitz, 1934)
任意の平面三角形分割は，辺の縮約を繰り返して，正四面体グラフに変形可能である.



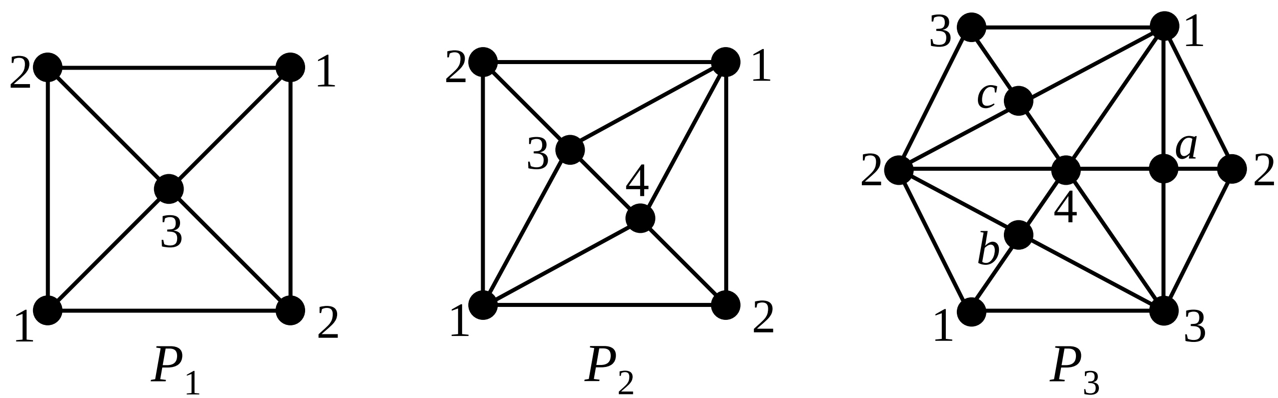

正四面体グラフ

「*G'*が4-彩色可能
⇒ *G*が4-彩色可能」
が成り立って欲しかった

それが成り立つには，
変形を2000個準備する
必要があった.

射影平面の多重偶三角形分割の染色数

定理．(Kobayashi, et al, 2013)
射影平面上の任意の多重偶三角形分割は，4-縮約と次数2の頂点の除去により，次の３つのうちのいずれかに変形される．



演習問題6.
射影平面上の多重偶三角形分割の生成定理を利用して，それらの染色数について議論せよ．

種数の低い曲面の偶三角形分割の染色数

1．球面の偶三角形分割は3-彩色可能

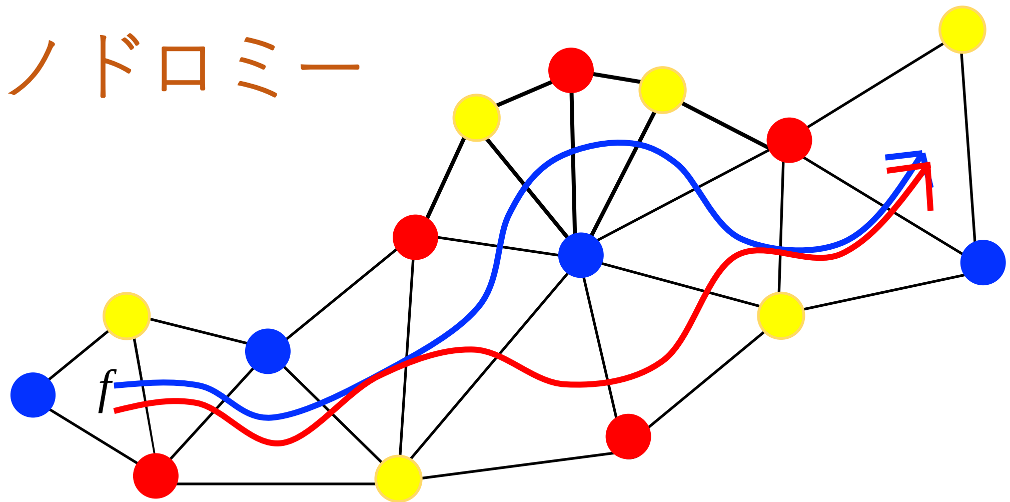
2．射影平面の偶三角形分割は ???-彩色可能

3．向き付け可能曲面の局所平面偶三角形分割は4-彩色可能
(Hutchinson, Richter, Seymour)

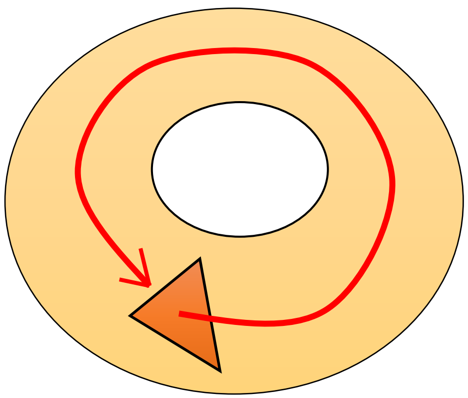
4．トーラスとクラインの壺の偶三角形分割についても，我々は極小元を決定している．（ただし，6-正則三角形分割は別途基本形があるので，対処可能．）→ 偶三角形分割の染色数の結果あり

★局所平面偶三角形分割の攻略手法がとても素晴らしい．
→曲面の偶三角形分割のモノドロミー

偶三角形分割のモノドロミー

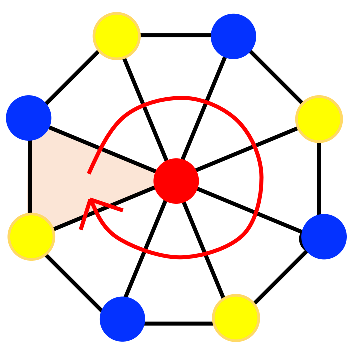


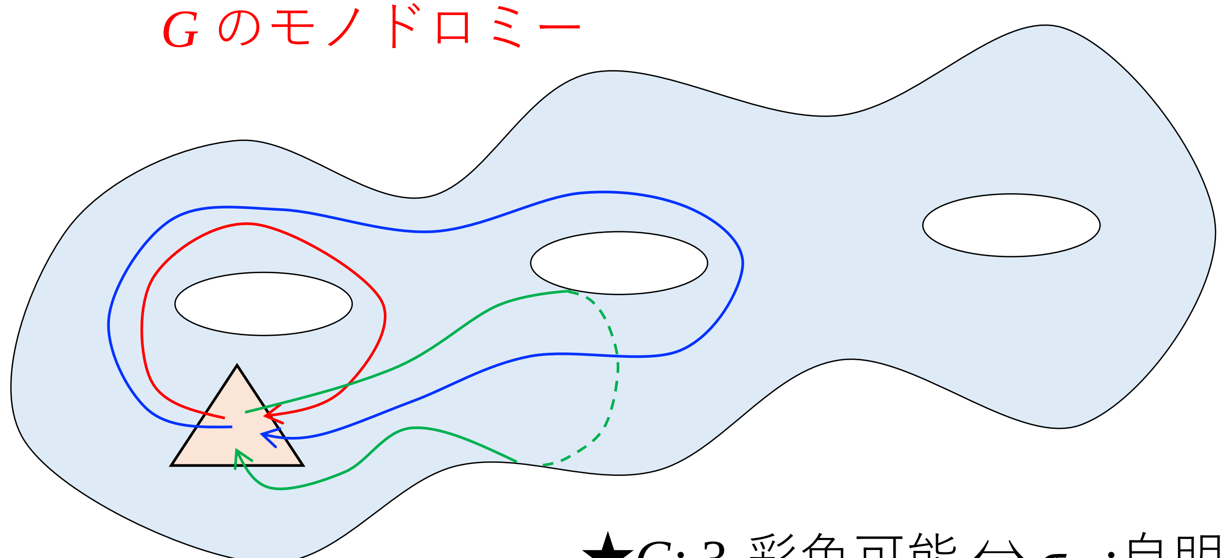
Sの偶三角形分割G



準同型写像　$\boldsymbol{\sigma_G : \pi_1(S) \to S_3}$　が定義できる．

G のモノドロミー

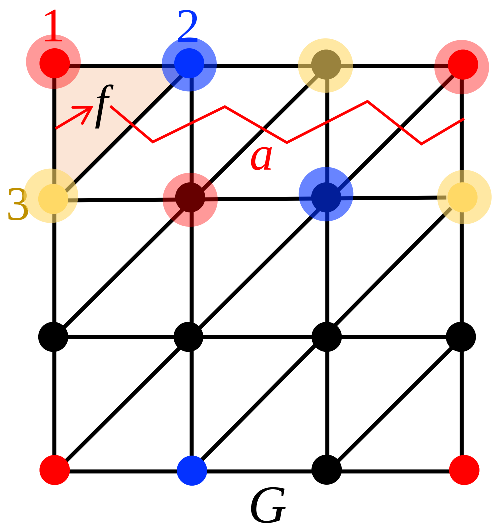


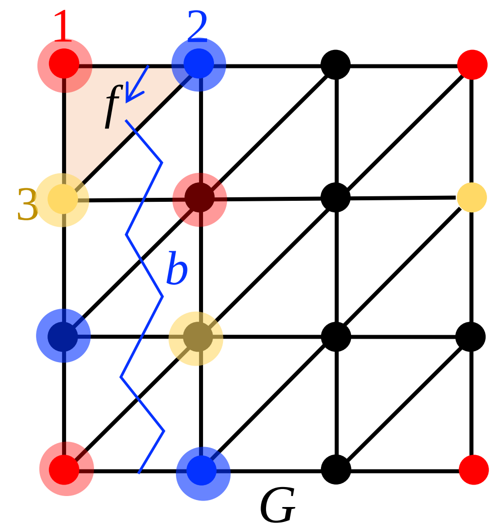


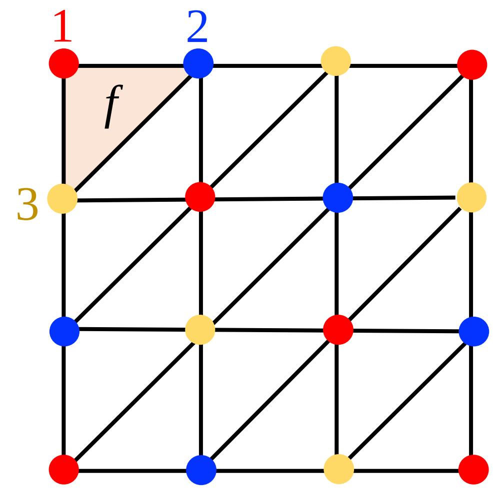
★G: 3-彩色可能 ⇔ σ_G :自明

球面の基本群は自明な群なので，任意の準同型写像は自明.
よって，球面の偶三角形分割は3-彩色可能.

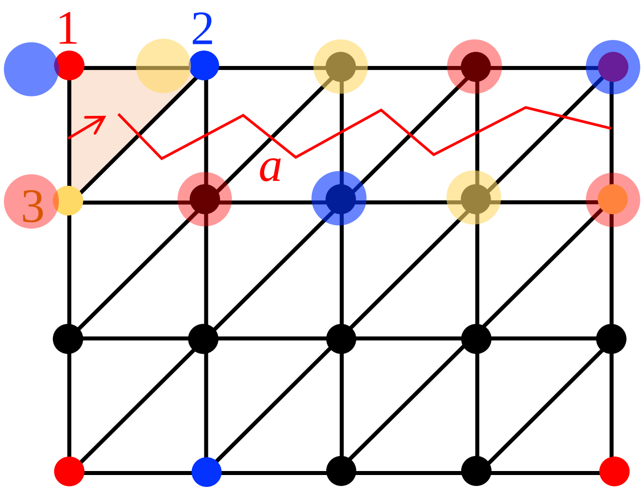
トーラスの偶三角形分割のモノドロミーの例





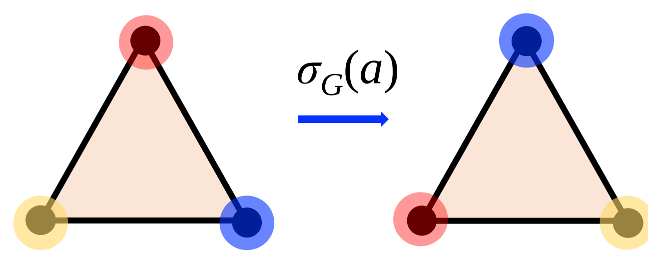


G： 3-彩色可能



$\sigma_G : \pi_1(T) \to S_3$において,

$\sigma_G(a) = \sigma_G(b) = \mathrm{id} \Leftrightarrow G$: 3-彩色可能

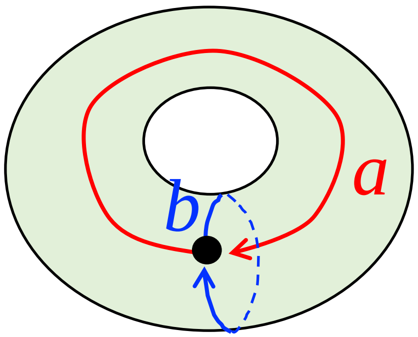


$\sigma_G(a) \neq \mathrm{id} \Leftrightarrow G$: not 3-彩色可能

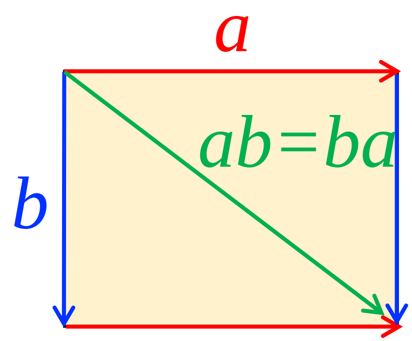
モノドロミーの制約

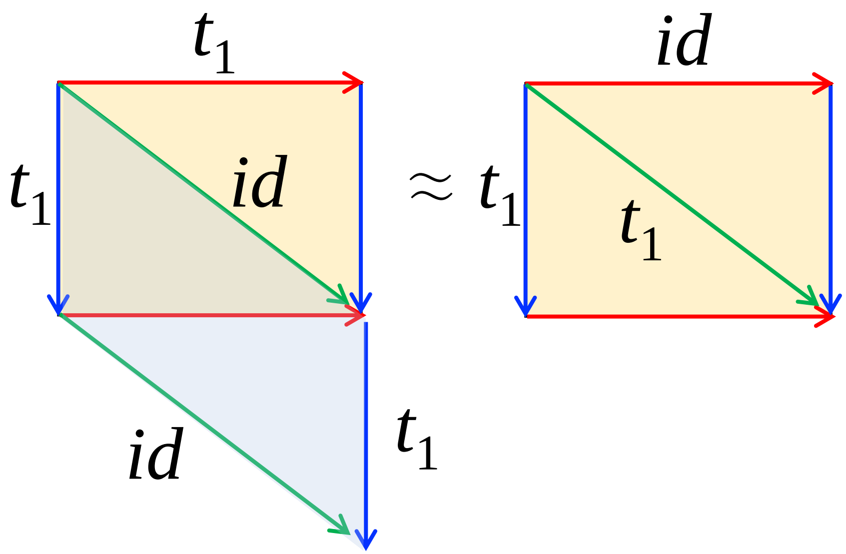
G のモノドロミー

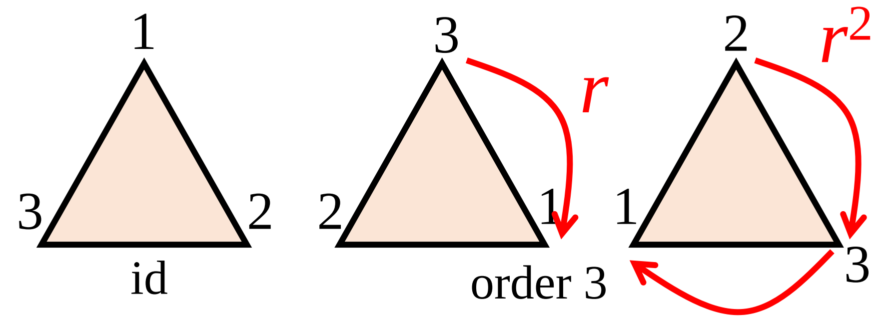
準同型写像　$\sigma_G : \pi_1(S) \to S_3$

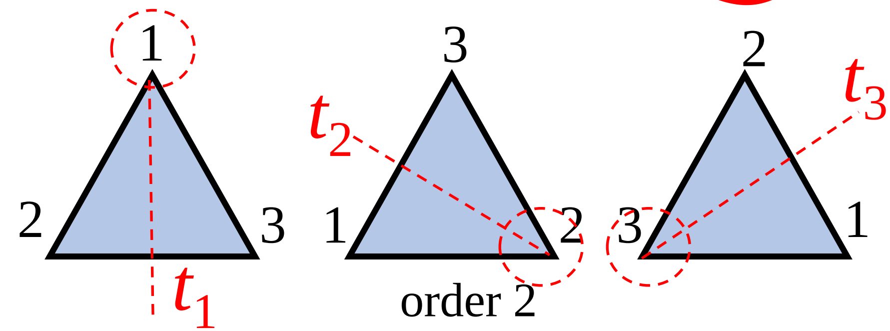


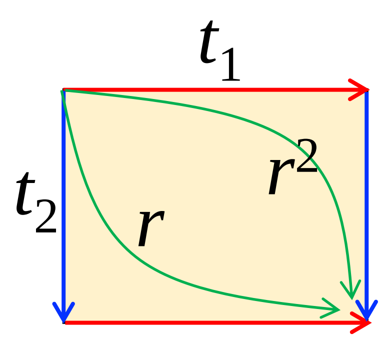
トーラス





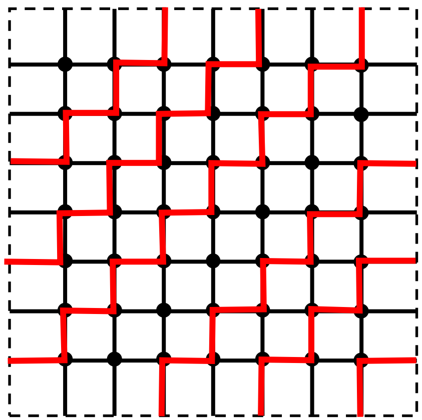






矛盾

演習問題7.
トーラスの偶三角形分割は，repがある程度大きければ，
4-彩色可能であることを示せ.

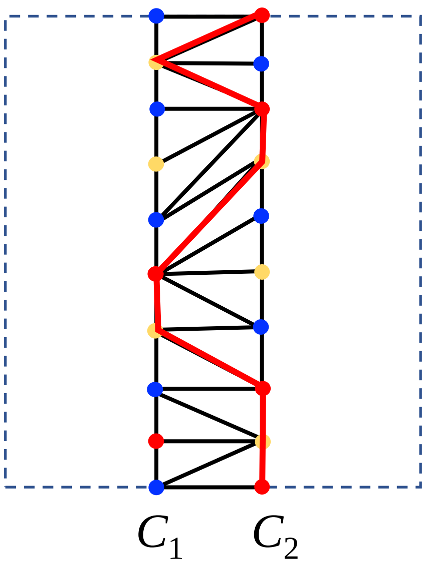


トーラス格子$C_7 \times C_7$

縦と横には7本，斜めには3本

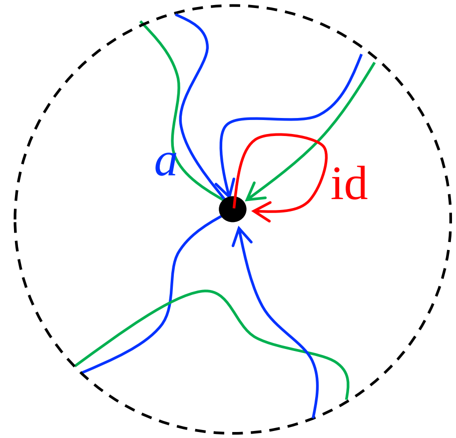
定理. **(de Graaf&Schrijver, 1994)**
$G \subset S_1$ が rep $\geqq k$
$\Rightarrow G$ は $C_m \times C_m$をマイナーとして持つ.
ただし，$m = [2k/3]$

補題.
C_1 とC_2 が3-彩色可能アニュラスを囲むとき，
C_1にホモトピックな(1,2)-閉路がとれる.



射影平面のモノドロミー

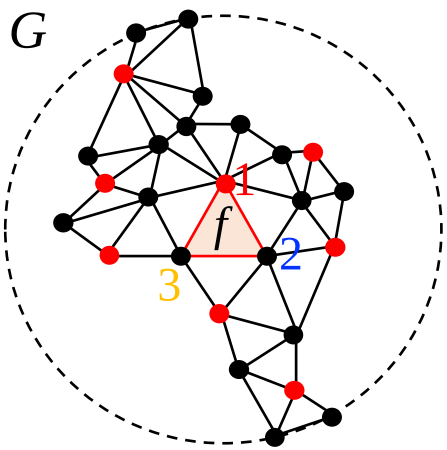
$\pi_1(P) = \{\mathrm{id}, a\}$, ただし， $a^2 = \mathrm{id}$



$\sigma_G : \pi_1(P) \to S_3$において,

$\sigma_G(a)^2 = \mathrm{id} \Leftrightarrow \boxed{\sigma_G(a) = \mathrm{id}}$ または $\sigma_G(a) = t_1$

3-彩色可能



$\sigma_G(a) = t_1$

色1,2,3の拡張を行ったとき，色1は常に固定

→ 色1の頂点はcolor factor

→ Gは偶角形分割の面細分

定理．(Mohar, 2013)
G : 射影平面上の偶三角形分割 ⇒ Gはある偶角形分割 H の面細分．
また，$\chi(G) \leqq 5$．H : odd四角形分割を含む ⇔ 等号成立

★ Hが二部グラフでない四角形分割
$\Rightarrow \forall c : V(H) \to \{1,2,\ldots\}, \exists f \in F(H)$ s.t. f の4頂点の色が異なる

局所平面グラフの染色数の上界

	球面	射影平面	トーラス	クラインの壺	局所平面的グラフ	
グラフ	**4**	6	7	6	**5** (Thomassen, 93)	
四角形分割	**2**	4	5	4	向付可能	**3** (Hutchinson, 95)
					向付不可能	4
偶三角形分割	**3**	5	7	6	向付可能	**4** (Hutchinson, Richter, Seymour, 2002)
					向付不可能	5

向き付け不可能曲面の局所平面的四角形分割 G が4-染色的
$\Leftrightarrow$ G はodd 四角形分割を含む

向き付け不可能曲面の局所平面的偶三角形分割 G が5-染色的
$\Leftrightarrow$ $G = \mathrm{FS}(H)$，ただし，Hはodd 四角形分割を含む偶角形分割

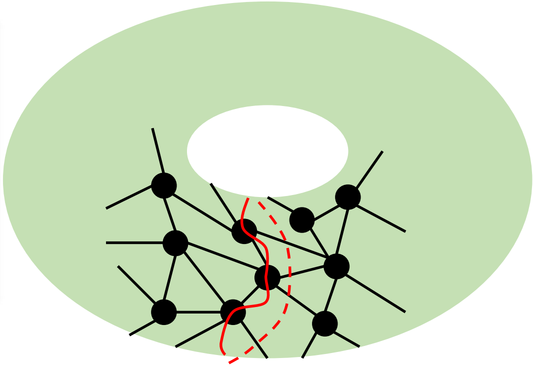
Albertson予想

予想．(Albertson Four Color Problem, 1981)
任意の閉曲面 S に対して，次の整数 $N(S)$ が存在する：$G \subset S$ から，高々$N(S)$個の頂点を取り除くと，4-彩色可能となる．

つまり，S 上のグラフの色分けには，本質的には，4-色あれば十分．

トーラスS_1に対して，$N(S_1) = 3$も予想されている．

予想．(Seymour, ???)
任意の閉曲面 S に対して，整数 $R(S)$と$N(S)$が存在：$G \subset S$ が $r(G) \geqq R$ ならば，高々 $N(S)$ 個の頂点を取り除くと，4-彩色可能．

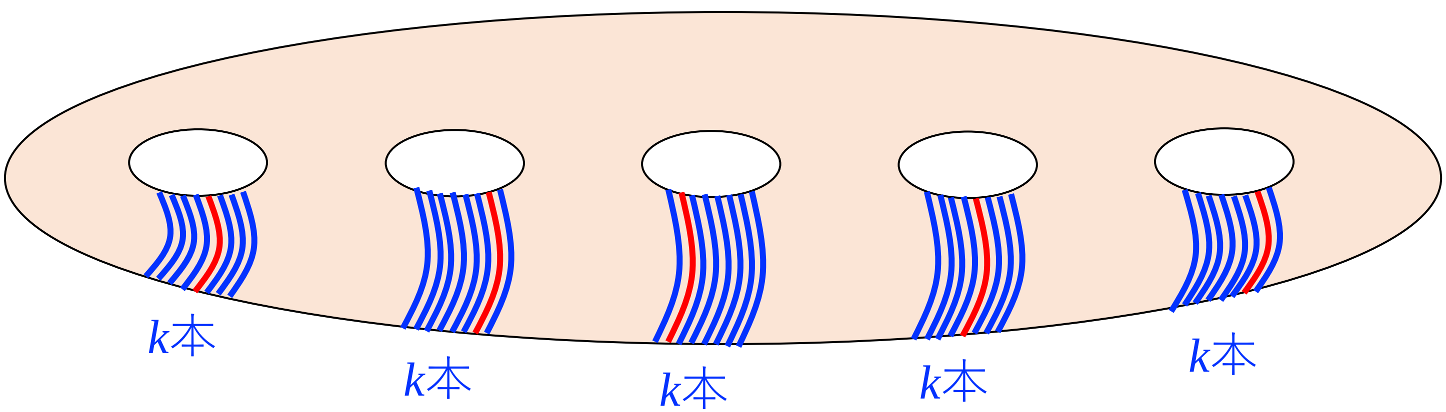


実は，repが十分に高い場合が本質的．
（repを与えている曲線と交わる頂点Sを取り除くと，種数が下がる．）

Albertson予想に対して

Theorem 5. (Albertson&Hutchinson 1978, Ozeki&Plummer 2013+)
任意の向き付け可能曲面 S_g と任意の数 $\varepsilon>0$ に対して，∃$N=N(S_g,\varepsilon)$:
$G \subset S_g$ が $r(G) \geqq N \Rightarrow \exists S \subset V(G)$ with $|S| \leqq \varepsilon|V(G)|$ s.t. $\chi(G-S) \leqq 4$.

Gに依存



Repが大きいと，Robertson&Seymourの結果から，上の構造が取れる．
k個の中から一番短いものを選び，そこで切断 → 平面グラフ

いくらでも大きく取れる

4-彩色可能

Albertson予想に対して

Theorem 5. (Albertson&Hutchinson 1978, Ozeki&Plummer 2013+)
任意の向き付け可能曲面 S_g と任意の数 $\varepsilon>0$ に対して， $\exists N=N(S_g,\varepsilon)$:
$G \subset S_g$ が $r(G) \geqq N \Rightarrow \exists S \subset V(G)$ with $|S| \leqq \varepsilon|V(G)|$ s.t. $\chi(G-S) \leqq 4$.

Gに依存

拡張

定理．(Nakamoto&Ozeki, 2017)
任意の向き付け可能曲面 S_g と任意の数$\varepsilon>0$に対して，$N(S_g,\varepsilon)$ が存在する．
$G \subset S_g$ がrep $\geqq N(S_g,\varepsilon)$を満たすとき，

5-彩色

1． G : グラフ $\Rightarrow \exists V(G) = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4 \cup V_5$ s.t. $|V_5| \leqq \varepsilon|V(G)|$

4-彩色

アナロジー

2． G : 偶三角形分割 $\Rightarrow \exists V(G) = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$ s.t. $|V_4| \leqq \varepsilon|V(G)|$

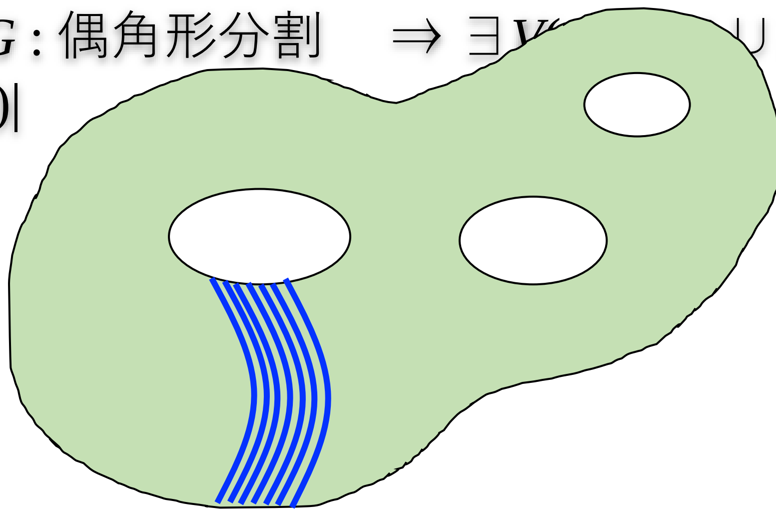
3-彩色

3． G : 偶角形分割 $\Rightarrow \exists V(G) = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ s.t. $|V_3| \leqq \varepsilon|V(G)|$

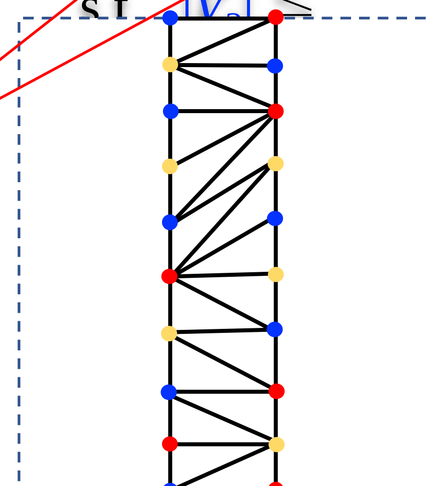
1． G : グラフ $\Rightarrow \exists V(G) = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4 \cup \boldsymbol{V_5}$ s.t. $|V_5| \leqq \varepsilon|V(G)|$

2． G : 偶三角形分割 $\Rightarrow \exists V(G) = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup \boldsymbol{V_4}$ s.t. $|V_4| \leqq \varepsilon|V(G)|$

3． G : 偶角形分割 $\Rightarrow \exists V$ … $\cup V_2 \cup \boldsymbol{V_3}$ s.t. $|V_3| \leqq \varepsilon|V(G)|$



constantにはならない！



3-彩色可能アニュラス

偶角形分割： m本の奇閉路 $\Rightarrow |V_3| \geqq m$

偶三角形分割： m本の3-彩色可能でないアニュラス

$\Rightarrow |V_4| \geqq m$

ところが，１においては，5色目が局所的に必要な構造が指摘できず，
5色目がたくさんあると言えない！　→ Albertson予想の難しさ！

予想．(Albertson Four Color Problem, 1981)
任意の閉曲面 S に対して，次の整数 $N(S)$ が存在する：$G \subset S$ から，高々$N(S)$個の頂点を取り除くと，4-彩色可能となる．
特に，トーラスS_1に対して，$N(S_1) = 3$.

現状では，手がかりがないように思える．

一方，昨年のSlovenian Conferenceで，Moharが「Albertson予想がだいたい解けた」と思うと言っていた．河原林くんが何か知っているかも．

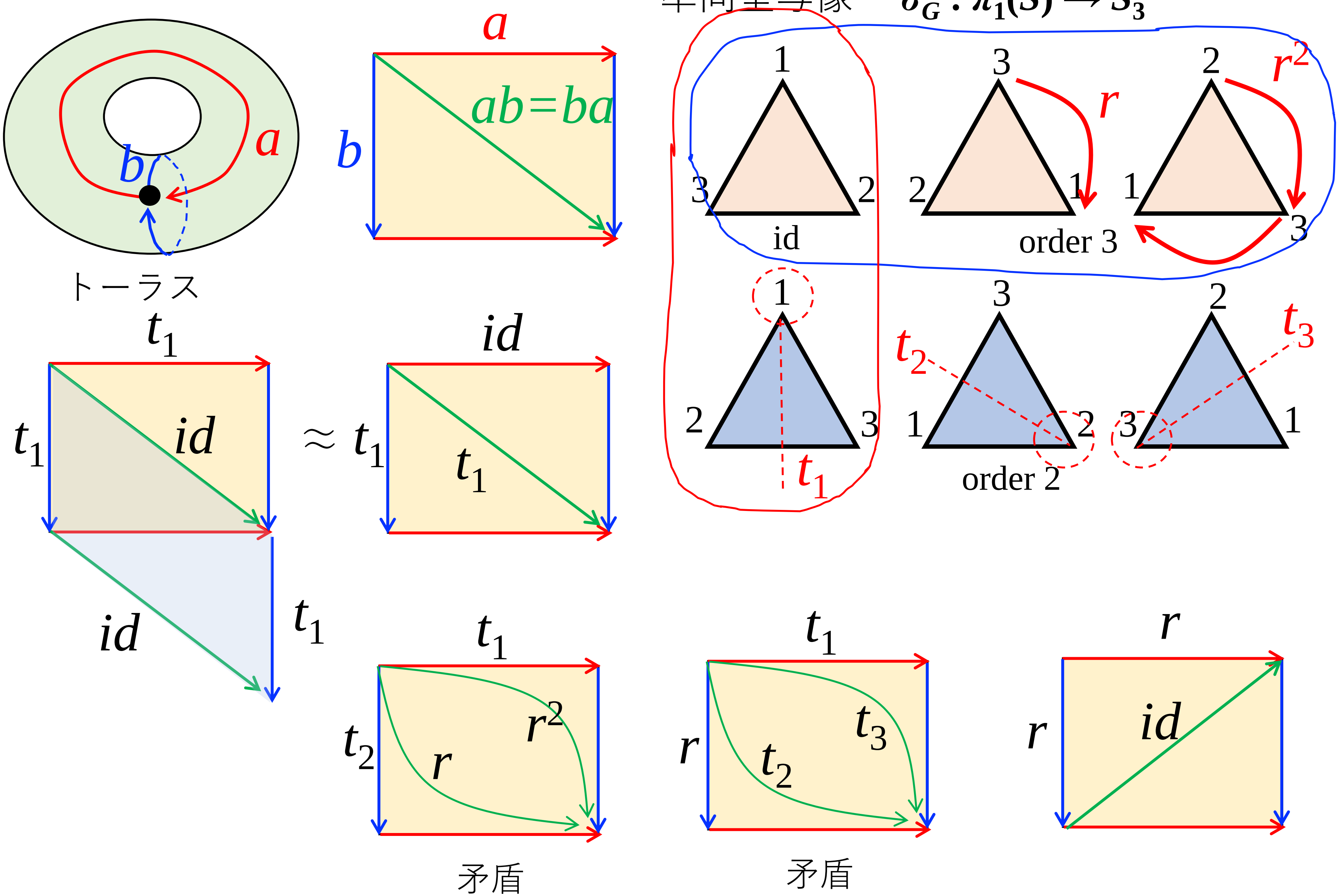
まとめ

- 四色定理は難しい（なぜ，トーラスの場合より難しい？）
- 偶角形分割の攻略には，代数的アプローチが効き，2-彩色できない構造が特定できる．また，向き付け不可能曲面では，odd四角形分割が不思議な現象を起こす．
- 偶三角形分割にも代数的アプローチが効果的であり，いろいろな性質を引き出すことができる．odd四角形分割の影響もある．
- Albertson予想では，5色目が必要な構造を特定しにくく，解決が難しそう．

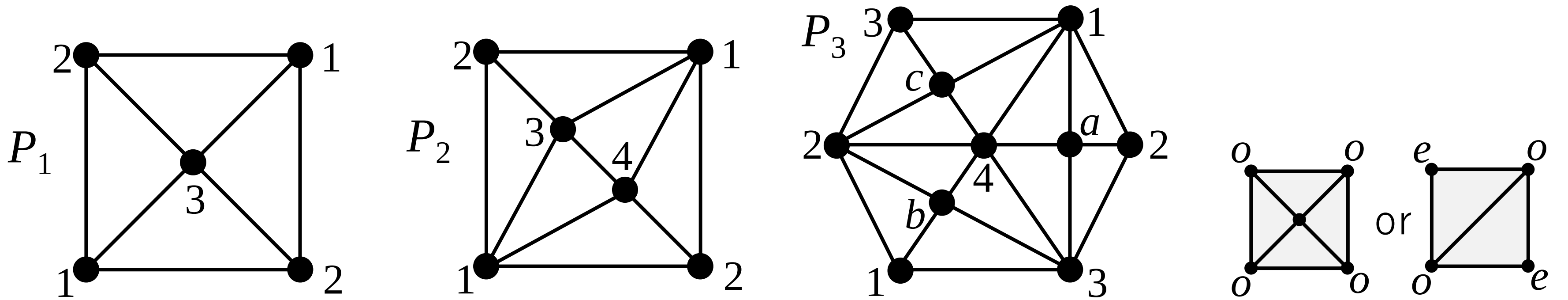
モノドロミーの制約

G のモノドロミー

準同型写像　$\sigma_G : \pi_1(S) \to S_3$

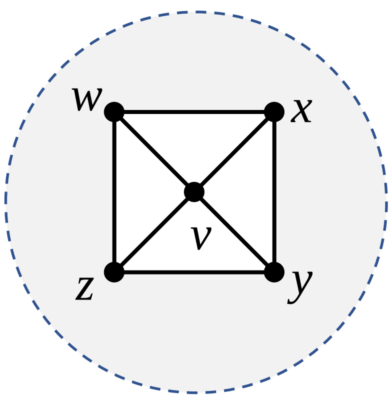


射影平面の多重偶三角形分割の染色数



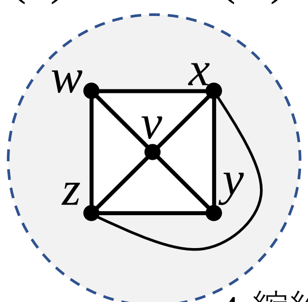
証明の概略.

オイラーの公式より,
$E = 3V\text{-}3$.
平均次数 < 6より,
∃次数4の頂点v

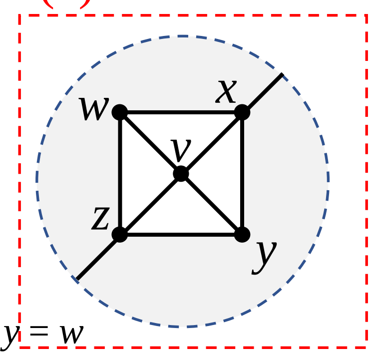


4-縮約$x = z$が不可能
$\Rightarrow xz \in E(G)$ or x=z

(1) $xz \in E(G)$

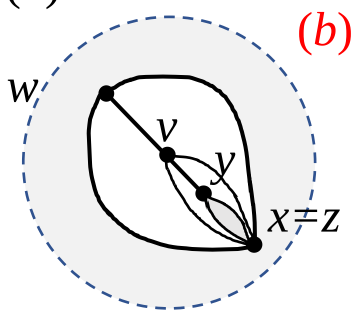


(a)

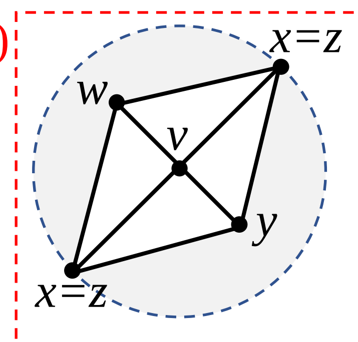


4-縮約$y = w$

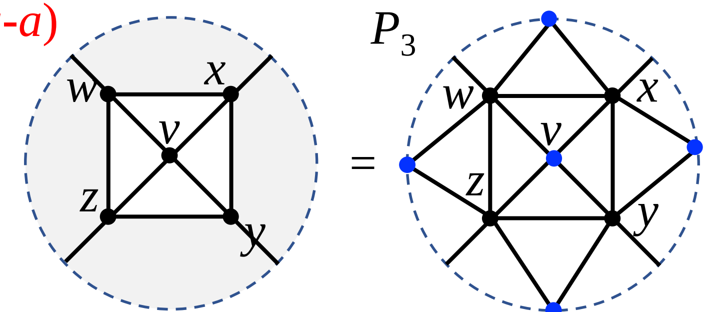
(2) $x = z$



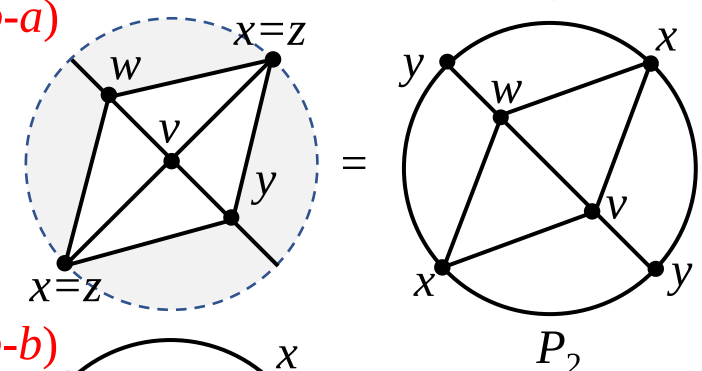
(b)



(a-a)



(b-a)



(b-b)