

# 組合せ最適化セミナー

## オンライン最適化の競合比解析

2021年8月4日  
河瀬康志

### 1 演習問題

**演習問題 1.** スキーレンタル問題（レンタル1万円，購入  $B$  万円， $B$  は正整数）において，ちょうど  $k$  回 ( $k = 1, 2, \dots$ ) 行く確率が  $\frac{1}{B} \cdot (1 - \frac{1}{B})^{k-1}$  であるような入力分布を考える．この入力に対し，最適コストの期待値と最適決定性オンラインアルゴリズムの期待コストを計算せよ．

**演習問題 2.** オンラインルーティング問題についてオンライン主双対法によりアルゴリズムの設計を行うことを考える．この問題では，最初に，連結な無向グラフ  $G = (V, E)$  と枝容量  $u: E \rightarrow \mathbb{Z}_{++}$  が与えられる．各ラウンド  $i$  では要求  $r_i = (s_i, t_i) \in V^2$  が与えられ，アルゴリズムは  $s_i - t_i$  パス（単純パス）を1つ選び流量1のフローを流すか，要求をリジェクトする．各枝  $e$  に流す流量の合計は（理想的には） $c(e)$  以下にしたい．この問題の線形緩和は以下のように記述できる．

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{r_i \in R} \sum_{P \in \mathcal{P}(r_i)} f_{i,P} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{P \in \mathcal{P}(r_i)} f_{i,P} \leq 1 \quad (\forall r_i \in R) \\ & \sum_{r_i \in R} \sum_{P \in \mathcal{P}(r_i): e \in P} f_{i,P} \leq u_e \quad (\forall e \in E) \\ & f_{i,P} \geq 0 \quad (\forall r_i \in R, P \in \mathcal{P}(r_i)). \end{aligned}$$

ここで， $R = \{r_1, \dots, r_n\}$  は要求列， $\mathcal{P}(r_i)$  は  $s_i - t_i$  パスの集合を表すものとする．パスの最長の長さを  $d$  とする時，競合比3で制約を高々  $O(\log d)$  倍しか破らないような主双対法に基づくアルゴリズムを設計する．

- (1) 双対問題を記述せよ．ただし，制約1行目の  $r_i$  に関する制約に対応する変数を  $z_i$ ，2行目の  $e$  に対応する変数を  $x_e$  とせよ．
- (2) *Algorithm 1* は双対問題について実行可能解を出力する．
- (3) *Algorithm 1* は主問題について制約を高々  $O(\log d)$  倍しか破らない．
- (4) *Algorithm 1* の各ラウンドにおいて，主問題の目的関数値の増加量は双対問題の目的関数値の増加量の  $1/3$  倍以上である．

---

**Algorithm 1:** オンラインルーティング問題に対する主双対法

---

$x(e) \leftarrow 0 \ (\forall e \in E);$

**foreach**  $r_i = (s_i, t_i)$  が要求される **do**

$f_{i,P} \leftarrow 0 \ (\forall P \in \mathcal{P}(r_i)), z_i \leftarrow 0;$

**if**  $\sum_{e \in P} x(e) < 1$  なるパス  $P \in \mathcal{P}(r_i)$  が存在 **then**

$f_{i,P} \leftarrow 1, z_i \leftarrow 1, x_e \leftarrow x_e \left(1 + \frac{1}{u_e}\right) + \frac{1}{d \cdot u_e} \ (\forall e \in P);$

---

**演習問題 3.**  $m$  台の機械  $S = \{s_1, \dots, s_m\}$  を用いて, 逐次的にやってくる仕事  $R = \{r_1, \dots, r_n\}$  をなるべく負荷が分散するように処理するためのアルゴリズムを構築する. 1つの仕事は1台の機械で処理することとし, 一度割り当ててしまったら後から変更することはできないとする. 各ラウンド  $i$  には仕事  $r_i$  が与えられ, 各機械  $s_j$  で処理する際の負荷  $p_{i,j} \in \mathbb{R}_+$  を知った上で, どの機械で処理するかを選択する. 目的は, 最大負荷 (makespan) を最小化することである.

- (1) まず, 最適値の上界  $\alpha$  が既知の場合について考える. 正規化した負荷を  $\tilde{p}_{i,j} = p_{i,j}/\alpha$ , 割当可能な機械を  $S(r_i) := \{s_j \in S \mid \tilde{p}_{i,j} \leq 1\}$  と記述する時, 最大負荷が  $\alpha$  以下という条件の下でなるべくたくさん仕事を割り当てる問題 (の緩和) は以下のような線形計画問題として記述できる.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{r_i \in R} \sum_{s_j \in S(r_i)} y_{i,j} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{s_j \in S(r_i)} y_{i,j} = 1 \quad (\forall r_i \in R) \\ & \sum_{r_i: s_j \in S(r_i)} \tilde{p}_{i,j} y_{i,j} \leq 1 \quad (\forall s_j \in S) \\ & y_{i,j} \geq 0 \quad (\forall r_i \in R, s_j \in S(r_i)). \end{aligned}$$

この時, 双対問題を記述せよ. ただし, 制約 1 行目の  $r_i$  に関する制約に対応する変数を  $z_i$ , 2 行目の  $s_j$  に対応する変数を  $x_j$  とせよ.

- (2) 続いて, *Algorithm 2* について解析する. アルゴリズムの実行中ある  $s_j$  について  $x_j > 1$  となり失敗となったならば, アルゴリズムは最終的に目的関数が  $n$  未満の双対実行可能解を出力することを示せ. すなわち, 実際の最適値は  $n$  なので, 「失敗」とならないことを示せ.
- (3) *Algorithm 2* の出力は  $\sum_{r_i \in R} \tilde{p}_{i,j} y_{i,j} = O(\log m)$  ( $\forall s_j \in S$ ) となることを示せ. (ヒント: 必要なら「 $\gamma \in [0, 1] \implies 1 + \gamma/2 \geq (3/2)^\gamma$ 」を用いよ.)
- (4)  $\alpha$  が未知の場合に対して, 競合比  $O(\log m)$  のアルゴリズムを設計せよ. (ヒント:  $\alpha = \min_{j=1}^m p_{1,j}$  を初期値としてダブリングする)
- (5) 任意の乱択オンラインアルゴリズムの競合比は  $\Omega(\log m)$  であることを示せ.

---

**Algorithm 2:** オンライン負荷分散問題に対する主双対法

---

$x_j \leftarrow 1/(2m)$  ( $\forall j$ ) と初期化;

**foreach** 仕事  $r_i$  が与えられる **do**

$S(r_i) = \emptyset$  または  $x_j > 1$  ( $\exists j$ ) であれば 「失敗」;

$s_\ell \in \arg \min_{s_j \in S(r_i)} \tilde{p}_{i,j} x_j$  に仕事  $r_i$  を割当;

$z_i \leftarrow 1 - \tilde{p}_{i,\ell} x_\ell$ ,  $y_{i,\ell} \leftarrow 1$ ,  $x_\ell \leftarrow x_\ell(1 + \tilde{p}_{i,\ell}/2)$ ;

---

**演習問題 4.** アドワーズ問題について, 任意の乱択アルゴリズムの競合比は  $e/(e-1)$  以上となることを示せ.

**演習問題 5.**  $b$  を正の整数とする. アドワーズ問題において, 予算を  $B_1 = \dots = B_n = b$ , 入札額を  $b_{ij} \in \{0, 1\}$  ( $\forall i, j$ ) に制限したような問題をオンライン  $b$ -マッチング問題と呼ぶ. オンライン  $b$ -マッチング問題に対し, 以下のアルゴリズム *Balance* を考える: 入札額 1 の中でもっとも予算の残っている人に割り当てる (ただし割当可能な人がいないなら割り当てない). この時, *Balance* の競合比は  $\frac{(1+1/b)^b}{(1+1/b)^b - 1}$  となることを示せ. また, 任意の決定性アルゴリズムの競合比は  $\frac{(1+1/b)^b}{(1+1/b)^b - 1}$  以上となることを示せ.

**演習問題 6.** (オプション)  $E = [n]$  をそれぞれレンタルか購入ができ逐次的に必要なとなるリソースの集合とする.  $f: 2^E \rightarrow \mathbb{R}_+$  を各リソースの部分集合を購入するために必要な費用とし,  $g_t: 2^E \rightarrow \mathbb{R}_+$  をラウンド  $t$  において各リソースの部分集合をレンタルするために必要な費用とする.  $f, g_t (\forall t)$  は正規化された単調劣モジュラ関数<sup>\*1</sup>とする. ラウンド  $\tau$  に購入したリソース集合を  $S_\tau$  とすると, ラウンド  $t$  までに発生する費用は  $f(\bigcup_{\tau=1}^t S_\tau) + \sum_{\tau=1}^t g_\tau(S_\tau)$  であるとする. この時, 総費用をなるべく小さくするようなオンラインアルゴリズムを設計したい.

- (1) 競合比 2 の決定性アルゴリズムを設計せよ.
- (2) 競合比  $e/(e-1)$  の乱択アルゴリズムを設計せよ.

## 2 参考資料

1986 年の Sleator と Tarjan による [16] は理論計算機科学の分野でのオンライン最適化の始まりの 1 つとされており, 競合比解析の概念を導入している. 競合 (competitive) という用語は Karlin ら [12] による. オンライン最適化がまとまった本としては [4, 13, 20] がある. Yao の原理を初めて乱択アルゴリズムに適用した論文は [18] である. 講義の内容は主にオンライン主双対法のサーベイ論文である [7] を参考にした. スキーレンタル問題に対するオンライン主双対法は [5, 19] による結果である. オンライン (集合) 被覆問題に対する結果は [1, 6], オンライン広告割当問題についての結果は [5, 10, 11, 15, 17] を参考にした. 目的関数が凸関数である場合に対する主双対法は [2], オンライン半正定値計画問題に対する主双対法は [8, 9] による結果である. 入力予想付きの性能指標に関しては, [3, 14] を参考にした.

## 参考文献

- [1] Noga Alon, Baruch Awerbuch, Yossi Azar, Niv Buchbinder, and Joseph (Seffi) Naor. The Online Set Cover Problem. *SIAM Journal on Computing*, 39(2):361–370, 2009.
- [2] Yossi Azar, Niv Buchbinder, T-H. Hubert Chan, Shahar Chen, Ilan Reuven Cohen, Anupam Gupta, Zhiyi Huang, Ning Kang, Viswanath Nagarajan, Joseph Naor, and Debmalya Panigrahi. Online Algorithms for Covering and Packing Problems with Convex Objectives. In *Proceedings of the Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 148–157, 2016.
- [3] Etienne Bamas, Andreas Maggiori, and Ola Svensson. The primal-dual method for learning augmented algorithms. In *Proceedings of the Advances in Neural Information Processing Systems*, volume 33, pages 20083–20094, 2020.
- [4] Allan Borodin and Ran El-Yaniv. *Online Computation and Competitive Analysis*. Cambridge, 1998.
- [5] Niv Buchbinder, Kamal Jain, and Joseph (Seffi) Naor. Online Primal-Dual Algorithms for Maximizing Ad-Auctions Revenue. In *Proceedings of the European Symposium on Algorithms*, pages 253–264, 2007.
- [6] Niv Buchbinder and Joseph Naor. Online Primal-Dual Algorithms for Covering and Packing Problems. In *Proceedings of the Annual European Symposium on Algorithms*, volume 34, pages 689–701,

---

<sup>\*1</sup>  $f: 2^E \rightarrow \mathbb{R}_+$  が正規化された単調劣モジュラ関数であるとは, 次の 3 条件を満たすことをいう: (i)  $f(\emptyset) = 0$ , (ii)  $X \subseteq Y \subseteq E \Rightarrow f(X) \leq f(Y)$ , (iii)  $f(X) + f(Y) \geq f(X \cup Y) + f(X \cap Y) (\forall X, Y \subseteq E)$ .

- 2005.
- [7] Niv Buchbinder and Joseph (Seffi) Naor. The Design of Competitive Online Algorithms via a Primal–Dual Approach. *Foundations and Trends® in Theoretical Computer Science*, 3(2–3):93–263, 2009.
  - [8] Reza Eghbali, James Saunderson, and Maryam Fazel. Competitive online algorithms for resource allocation over the positive semidefinite cone. *Mathematical Programming*, 170(1):267–292, 2018.
  - [9] Noa Elad, Satyen Kale, and Joseph (Seffi) Naor. Online Semidefinite Programming. In *Proceedings of the 43rd International Colloquium on Automata, Languages, and Programming*, volume 55, pages 40:1–40:13, 2016.
  - [10] Ashish Goel, Mohammad Mahdian, Hamid Nazerzadeh, and Amin Saberi. Advertisement allocation for generalized second-pricing schemes. *Operations Research Letters*, 38(6):571–576, 2010.
  - [11] Bala Kalyanasundaram and Kirk R. Pruhs. An optimal deterministic algorithm for online b-matching. *Theoretical Computer Science*, 233(1):319–325, 2000.
  - [12] Anna R. Karlin, Mark S. Manasse, Larry Rudolph, and Daniel D. Sleator. Competitive snoopy caching. *Algorithmica*, 3(1–4):79–119, 1988.
  - [13] Dennis Komm. *An Introduction to Online Computation*. Springer International Publishing, 2016.
  - [14] Thodoris Lykouris and Sergei Vassilvtiskii. Competitive caching with machine learned advice. In *Proceedings of the International Conference on Machine Learning*, volume 80 of *Proceedings of Machine Learning Research*, pages 3296–3305, 2018.
  - [15] Aranyak Mehta, Amin Saberi, Umesh Vazirani, and Vijay Vazirani. AdWords and generalized online matching. *Journal of the ACM*, 54(5):22, 2007.
  - [16] Daniel D. Sleator and Robert E. Tarjan. Amortized efficiency of list update and paging rules. *Communications of the ACM*, 28(2):202–208, 1985.
  - [17] Hanna Sumita, Yasushi Kawase, Sumio Fujita, and Takuro Fukunaga. Online optimization of video-ad allocation. In *Proceedings of the International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pages 423–429, 2017.
  - [18] Andrew Chi-Chin Yao. Probabilistic computations: Toward a unified measure of complexity. In *Proceedings of the 18th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 222–227, 1977.
  - [19] Hanrui Zhang and Vincent Conitzer. Combinatorial ski rental and online bipartite matching. In *Proceedings of the 21st ACM Conference on Economics and Computation*, pages 879–910, 2020.
  - [20] 徳山 豪. オンラインアルゴリズムとストリームアルゴリズム. 共立出版, 2007.