2021 年度 組合せ最適化セミナー

複数財オークションと組合せ最適化と離散凸解析

演習問題

問１：

（１）単一需要モデルにおいてワルラス均衡が存在する場合，財の配分が均衡配分であることと，その配分が重み $v(i,j)$ に関する最大重みマッチングであることが，必要十分である．このことを，均衡の定義に基づいて証明せよ．

（ヒント：まずは，入札者全員に財の割当がある場合を考えると分かりやすい）

（２）複数需要モデルにおいてワルラス均衡が存在する場合，財の配分が均衡配分であることと，その評価値の総和を最大化する配分であることが，必要十分である．このことを，均衡の定義に基づいて証明せよ．

問２：有向グラフ$G=(V,E)$ の各枝 (i,j) に実数値の枝長 ℓ_{ij} が与えられているとする．グラフの頂点 $s\in V$ に対し，s から任意の頂点への有向路が存在すると仮定する．このとき，以下の条件(i), (ii), (iii)について，(i)➔(ii)➔(iii)➔(i) が成り立つことを証明せよ．

(i) 頂点 s から任意の頂点への最短有向路が存在する．

(ii)変数 $p=(p_i \mid i\in V)$ に関する不等式系 $p_j-p_i\le \ell_{ij}$ $((i,j)\in E)$ は解をもつ．

(iii) 有向グラフG に長さが負の有向閉路が存在しない．

（コメント：(ii)に出てくる不等式系は差制約系（system of difference constraints）とよばれる）

問３：$\{0,1,2,\dots,n\}$ の要素の順序対の集合 E に対し，下記の差制約系を考える．

$$p_j-p_i\le \ell_{ij}\ \big((i,j)\in E, i\ne 0, j\ne 0\big),\ \ p_j\le \ell_{ij}\ \big((i,0)\in E\big),\ \ -p_i\le \ell_{ij}\ ((0,j)\in E)$$

（１）上記の差制約系における求解は，すべての不等式の変数が 2 つの差制約系における求解に帰着可能である．その方法について説明せよ．

（２）上記の差制約系の異なる解 p, p' に対し，$q_i=\min\{p_i,p_i'\}$ $(i\in V)$ もまた解になることを示せ．

（３）上記の差制約系が極大解をもつとき，唯一に定まる．このような解は最短路問題を用いて計算することが可能である．どのようなグラフを使えばよいか，説明せよ．

（４）上記の差制約系が極小解をもつとき，唯一に定まる．（３）の結果をふまえ，極小解の計算方法を述べよ．

（コメント：離散凸解析における $\mathrm{L}^\natural$凸集合は，差制約系を満たす整数ベクトル集合に一致する）

問４：

（１）単一需要評価関数が粗代替的であることを証明せよ．

（２）すべての入札者の評価関数が単一需要関数のときのワルラス均衡と，対応する単一需要モデルでのワルラス均衡が，本質的に同じであることを説明せよ．とくに，均衡価格の集合が一致することを証明せよ．

問５：

（１）M♮凹性を満たす評価関数 $v: 2^N \to \mathbb{R}$ と $X^* \subseteq N$ に対し，X^* が評価値 v を最大化するための必要十分条件は， $v(X^*) \geq v(Y)\ (\forall Y \subseteq N,\ |Y \setminus X^*| \leq 1,\ |X^* \setminus Y| \leq 1)$ を満たすことである．これを示せ.

（２）評価関数がM♮凹性を満たすとき，単改良性を満たすことを証明せよ.

問６：評価関数がM♮凹性を満たすとき，粗代替的であることを証明せよ.

問７：複数需要モデルにおいて，各入札者の評価関数が単改良性を満たすとき，均衡価格の集合は差制約系の解集合として表現できることを示せ.「任意の均衡価格と均衡配分の対は均衡になる」という事実を使ってよい.

問８：二部グラフ $G = (U, V; E)$ に対し，以下の(i)，(ii)が等価であることを示せ.

(i) 任意の $S \subseteq U$ に対し， S に隣接する V の頂点の数 ≧ $|S|$

(ii) 任意の $T \subseteq V$ に対し， 隣接する頂点が T に含まれる U の頂点の数 ≦ $|T|$

問９:二部グラフ $G = (U, V; E)$, および $U' \subseteq U, V' \subseteq V$ に対し, U' をカバーするマッチングおよび V' をカバーするマッチングが存在するならば，U' と V' の両方をカバーするマッチングが存在することを示せ.

問１０：並進劣モジュラ性から離散中点凸性が導かれることを証明せよ.

問１１:関数 $g: \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ はL♮凸性を満たすとする．$p^* \in \mathrm{dom}\, g$ を関数 g の任意の最小解とし，$p \in \mathrm{dom}\, g$ は $p \leq p^*$ を満たす任意のベクトルとする．集合 $X \subseteq N \equiv \{1,2,\ldots,n\}$ は

$$g(p + \chi_X) \leq g(p + \chi_Y)\ \ (\forall Y \subseteq N)$$

を満たすとき，関数 g の最小解 q^* で $q^* \geq p + \chi_X$ を満たすものが存在する．これを証明せよ.

問１２：関数 $f: 2^N \to \mathbb{R}$ に対する以下の貪欲アルゴリズムを考える.

ステップ０：$S_0 \coloneqq \emptyset, k \coloneqq 0$ とおく.

ステップ１：$f(S_k \cup \{u\})$ を最大にする $u \in N \setminus S_k$ をu_{k+1} とおく.

ステップ２：$S_{k+1} \coloneqq S_k \cup \{u_{k+1}\}$ とおく.

ステップ３：$k + 1 = n$ ならば終了.

$k + 1 < n$ ならば， $k \coloneqq k + 1$ とおいてステップ１に戻る.

関数 f がM♮凹関数のとき，各$k = 0,1,\ldots,n$ に対し，$f(S_k) = \max\{f(S) \mid |S| = k\}$ が成り立つことを証明せよ.