第18回組合せ最適化セミナー
「複数財オークションと
組合せ最適化と離散凸解析」

単一需要モデルとワルラス均衡

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

講義の概要

- オークション
  - 財を売りたい競売人と, 財を買いたい入札者の間の手続き
  - どの入札者に, 何円で売るか, を決定する
- 複数の不可分財に対するオークション
  - 不可分財 --- 分割できない「もの」(家, 自動車, 権利, など)
- 財の配分・価格を求める計算問題としての視点
  - ある種の離散最適化問題とその双対に一致
  - 財の問題の解法 ＝ 離散最適化問題の主双対アルゴリズム
- 離散凸解析との繋がり
  - 問題とアルゴリズムへの理解の深化

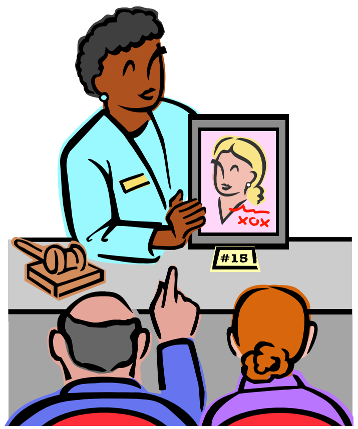
講義の流れ

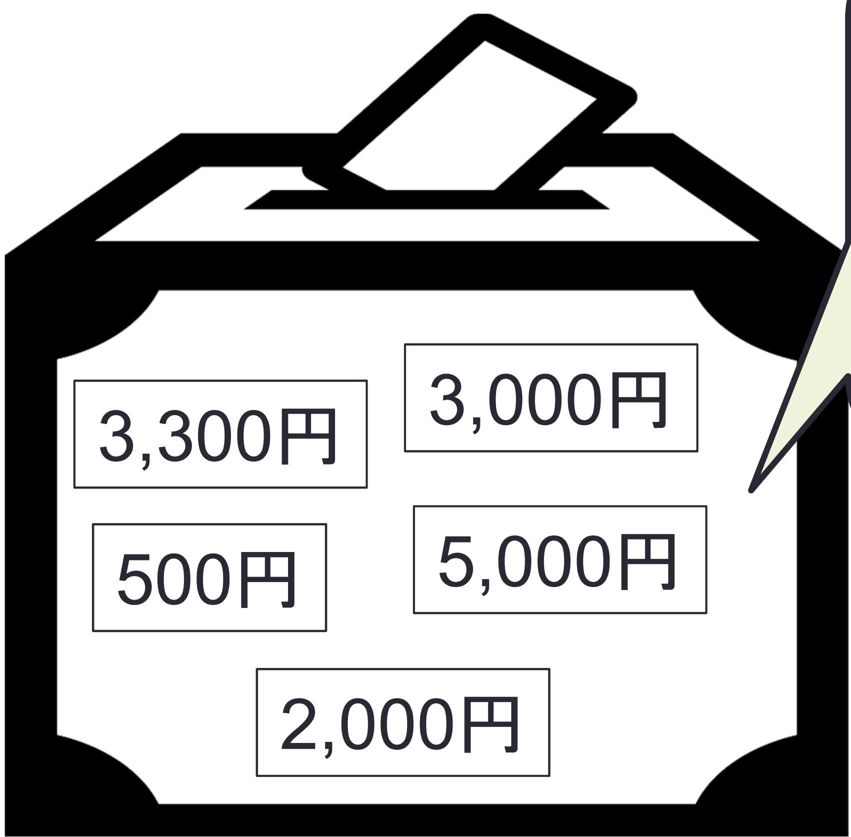
- モデルとワルラス均衡
  - 単一需要モデル
  - 複数需要モデル
- 均衡を近似的に求めるアルゴリズム
  - 単一需要モデル
  - 複数需要モデル
- 均衡を厳密に求めるアルゴリズム
  - 単一需要モデル
  - 複数需要モデル

単一不可分財のオークション

単一財オークション：封印型

オークションの流れ
1．入札者： 品物（財）の価値を評価し，競売人に伝える
2．競売人： 勝者 および 価格（支払額） を決定
3．勝者： 財をもらい，支払いする

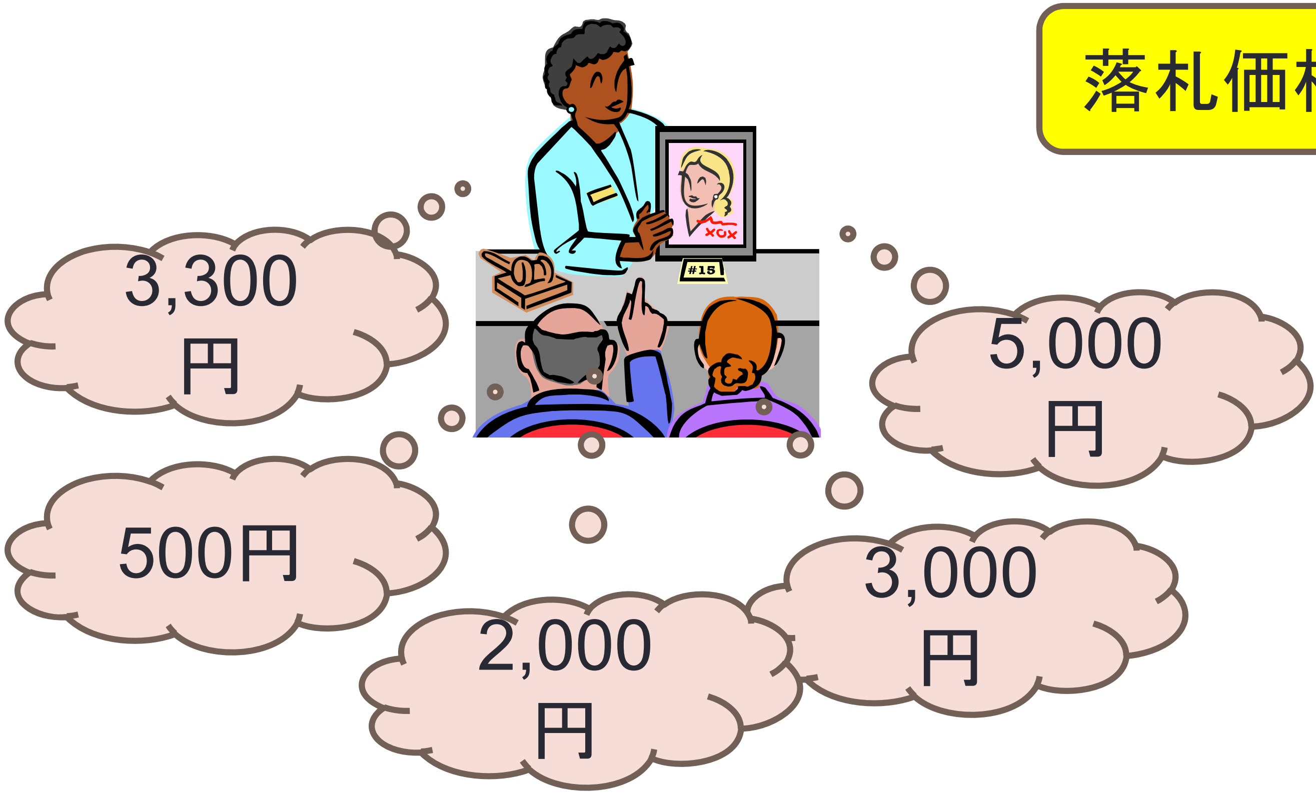


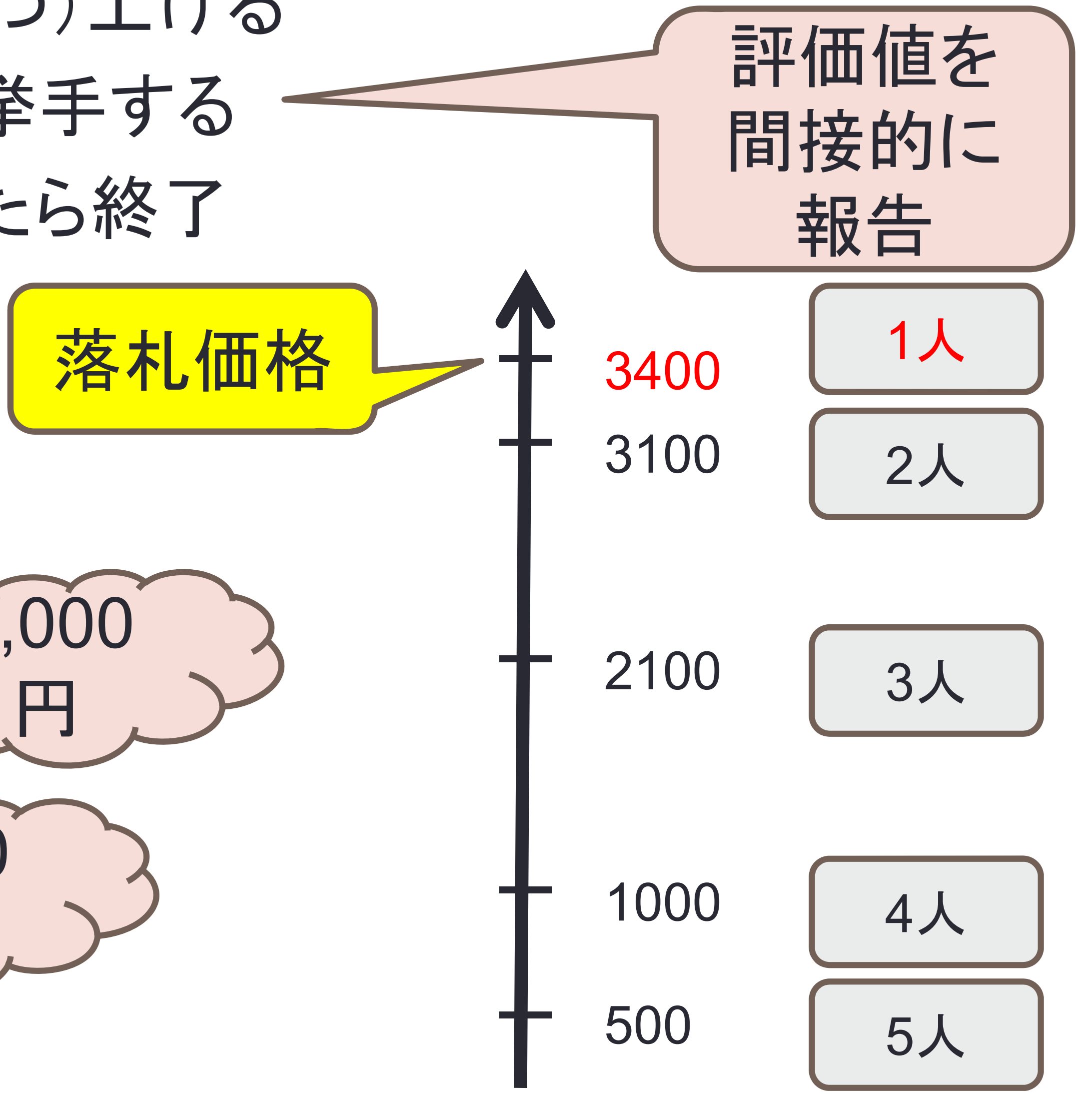


勝者
支払額：
第1価格オークション
は5,000円
第2価格オークション
は3,300円

単一財オークション：反復型

オークションの流れ（イングリッシュ・オークション）
- 競売人：価格を徐々に（1単位ずつ）上げる
- 入札者：購入可能な価格ならば挙手する
- 購入可能な入札者が1人になったら終了





複数不可分財のオークション

複数財オークション

複数財を　同時に　オークション

- 各入札者は高々１つの財が欲しい → 単一需要モデル
- 　　　　　複数個の財も欲しい　→ 複数需要モデル

複数財オークションにおける検討事項
- 各々の財の勝者(配分方法): どの財を　誰に？
- 各々の財の価格:　　各勝者の支払額は？

ワルラス均衡
入札者全員にとって望ましい配分＆価格
---入札者は 満足度 最大の財をもらえる
(厳密な定義は後で)

- ワルラス均衡を　どうやって計算する？

単一需要モデルと
ワルラス均衡の定義

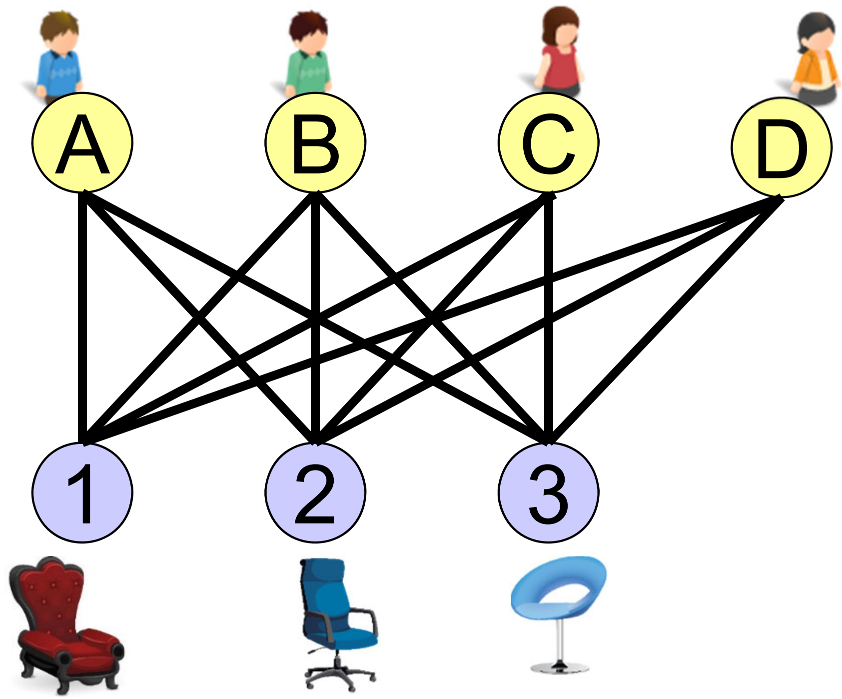
単一需要モデル

入札者は　高々１つの財　が欲しい（割当モデル）

オークションの流れ　（封印入札の場合）

1. 入札者：各々の財の価値を評価し，競売人に伝える
2. 競売人：各々の財の　勝者　および　価格（支払額）　を決定
3. 各々の財の勝者：　財をもらい，支払いする

評価値	A	B	C	D
①	3	1	0	5
②	7	6	7	4
③	1	7	8	4



ワルラス均衡とは？

入札者への財の配分 & 財の価格　の組

条件: 各入札者の利得 = 評価値ー価格 を最大に

例: 入札者A, B,　財①, ②　評価値(単位:万円)

価格		A	B
		A	B
1万円	①	4	3
3万円	②	6	4

利得	A	B
①	3	2
②	3	1

Bに
利得の少ない財が
割り当て　→ 不満

価格と配分を変更

価格		A	B
1万円	①	4	3
2万円	②	6	4

利得	A	B
①	3	2
②	4	2

A, Bともに
利得の多い財が
割り当て　→ 満足

ワルラス均衡の定義

$N=\{1,2,\dots,n\}$ 財の集合　　$B=\{1,2,\dots,m\}$ 入札者の集合

$v(i,j)\in\mathbb{Z}_+$ 入札者 i の 財 j に対する評価値

定義: 財の配分および財の価格 $p(j)\in\mathbb{Z}_+$

は ワルラス均衡（競争均衡）

⇕

- 入札者 i に財 j を割り当て

  ➔ $v(i,j)-p(j)\geq\max\left[0,\max_{1\leq h\leq n}\{v(i,h)-p(h)\}\right]$

- 入札者 i に財の割り当てなし

  ➔ $\max_{1\leq h\leq n}\{v(i,h)-p(h)\}\leq 0$

- 財 j の割り当てなし ➔ $p(j)=0$

利得最大の財が割り当て

利得≦0の財は欲しくない

演習問題

下記のように評価値が与えられたときのワルラス均衡を求めよ.
ただし, A,B,Cは入札者, ①, ②, ③は財を表す.

問1

v(i,j)	A	B	C
①	2	3	6
②	6	7	7

問2

v(i,j)	A	B
①	3	1
②	7	6
③	1	4

問3

v(i,j)	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8

演習問題

下記のように評価値が与えられたときのワルラス均衡を求めよ.
ただし, A,B,C,...は入札者, ①, ②, ③, . . . は財を表す.

問1

v(i,j)	A	B	C
①	2	3	6
②	6	7	7

利得	A	B	C
2	0	1	4
6	0	1	1

問2

v(i,j)	A	B
①	3	1
②	7	6
③	1	4

利得	A	B
0	3	1
2	5	4
0	1	4

問3

v(i,j)	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8

利得	A	B	C
0	3	1	0
4	3	2	3
5	-4	2	3

均衡の基本的な性質

- 定義: 均衡配分 ＝ 均衡に現れる配分
  均衡価格 ＝ 均衡に現れる価格

均衡配分と均衡価格は互いに独立

定理 M, M': 配分, p, p': 価格
$(M, p), (M', p')$: ワルラス均衡 ➔ $(M, p'), (M', p)$: ワルラス均衡

$\because$ 定義より. ■

均衡配分と最大重みマッチング

ワルラス均衡 ＝ 最大重みマッチングの主双対最適解の対

定理　財の配分は
均衡配分 ←→ 重み $v(i,j)$ に関する最大重みマッチング

∵ 最大重みマッチングの最適性条件
（線形計画緩和の相補性条件）より.
均衡の存在を仮定すると, 証明は容易.　■

系　均衡は常に存在

よって, 入札者の評価値がすべて既知（例：封印オークション）
➔ 最大重みマッチングの解法を使って均衡配分を計算可

均衡価格と最大重みマッチング

定理 財の価格 p(j) は
均衡価格 ←→ 最大重みマッチングの双対の最適解(の一部)

最小化 $\sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$
条件 $q(i) + p(j) \geq v(i,j)$ $(\forall i, \forall j)$
$q(i) \geq 0$ $(\forall i)$
$p(j) \geq 0$ $(\forall j)$

⇨

最小化 $\sum_{i \in B} \max\left[0, \max_j \{v(i,j) - p(j)\}\right] + \sum_{j \in N} p(j)$
条件 $p(j) \geq 0$ $(\forall j \in N)$

命題 均衡価格は差制約系の解として表現可能(均衡配分を使用)

差制約系(system of difference constraints):
p(j)－p(i) ≦ α, p(j)≦ β, －p(i) ≦ γ の形の不等式系

よって, 均衡配分が既知
➔ 最短路問題に帰着して(極小)解を計算可能

極小な均衡価格

- 定義： 均衡価格 ＝ 均衡に現れる価格

定理
均衡価格が存在するとき， 極小な均衡価格は唯一

極小均衡価格の良い性質
- 入札者にとって最も安い
- 耐戦略性を導く
  - 単一需要モデルにおいて，
    極小均衡価格の下では，
    各入札者は真の評価値を申告することが最良の戦略

(Leonard1983)

極小均衡価格の耐戦略性

極小均衡価格の下では,
各入札者は，評価値を偽っても，利得を改善することは不可能

（証明の概略）極小均衡価格を定める不等式系に注目.
財 jの価格は

$$-p(j_1) \le \alpha_{01}, p(j_1) - p(j_2) \le \alpha_{12}, \dots, p(j_{k-1}) - p(j_k) \le \alpha_{k-1,k}$$

という不等式系(ただし $j = j_k$)により定まる.
入札者 a の評価値が現れる不等式は下記の形のみ:
$v(a, j^*) - p(j^*) \ge v(a, h) - p(h)$ （j*: a に割り当てられた財）
←→ $p(j^*) - p(h) \le v(a, j^*) - v(a, h)$
∴入札者 a の受け取る財j*の価格には，a の評価値は無関係■

評価値の扱いについて

入札者の評価値は個人情報　→ 競売人に 直接 知らせたくない

代案： 評価値の情報を 間接的に 伝える

1. 競売人：各財の暫定価格を決定

2. 各入札者： 暫定価格の下で利得最大の財を報告

3. 競売人：入札者全員に（重複無く）利得最大の財を
　　配分可能　➔ 終了. 現在の価格は均衡価格
　　配分不可能 ➔ 暫定価格を適切に変更

反復オークション と呼ばれる

単一財の場合 → イングリッシュ・オークション など

紹介するアルゴリズム

以下の2つを紹介

- 近似的に計算(Bertsekas (1979), Crawford, Knoer (1981))
  - 単調に価格を増加，均衡配分(および極小均衡価格の近似値)を求める
  - 各反復で，入札者の利得最大の財ひとつの情報が必要
  - 価格増加のルールは簡単：　希望が重複→価格を増やす
- 厳密に計算(Demange, Gale, Sotomayor (1984))
  - 単調に価格を増加，極小均衡価格(および均衡配分)を求める
  - 各反復で，入札者の利得最大の財すべての情報が必要
  - 価格増加のルールは複雑：　価格を増やす財をうまく選ぶ
  - (primal-dual) Hungarian method (Kuhn (1955))の変種
- どちらも「利得最大の財」オラクルを用いたアルゴリズム
  - 評価値を陽に使わない

文献情報

D.P. Bertsekas: A distributed algorithm for the assignment problem, Working Paper (1979), MIT, Cambridge, MA.

D.P. Bertsekas: A new algorithm for the assignment problem, Mathematical Programming 21 (1981) 152-171

V. Crawford, E.M. Knoer: Job matching with heterogeneous firms and workers, Econometrica 49 (1981) 437-50

G. Demange, D. Gale, M. Sotomayor, Multi-item auctions, Journal of Political Economy 94 (1986) 863-872

H.W. Kuhn: The Hungarian method for the assignment problem, Naval Research Logistics Quarterly 2 (1955) 83-97

H.B. Leonard: Elicitation of honest preferences for the assignment of individuals to positions, Journal of Political Economy 91 (1983) 461-479