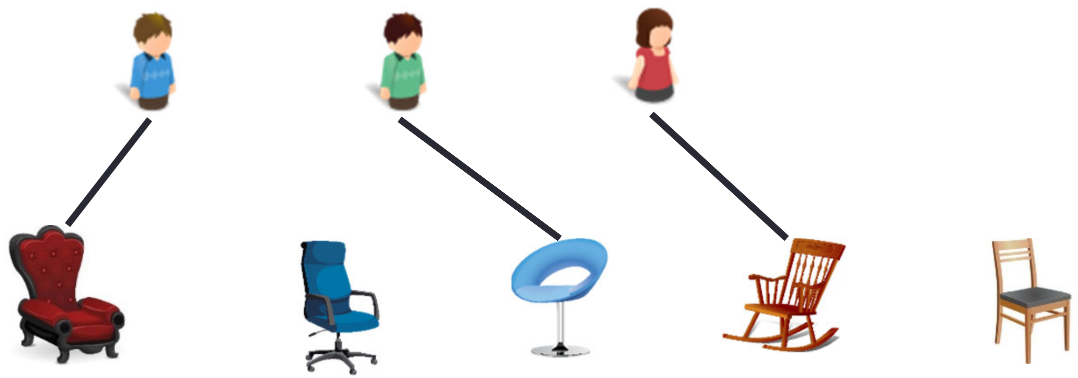
複数需要モデルとワルラス均衡

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

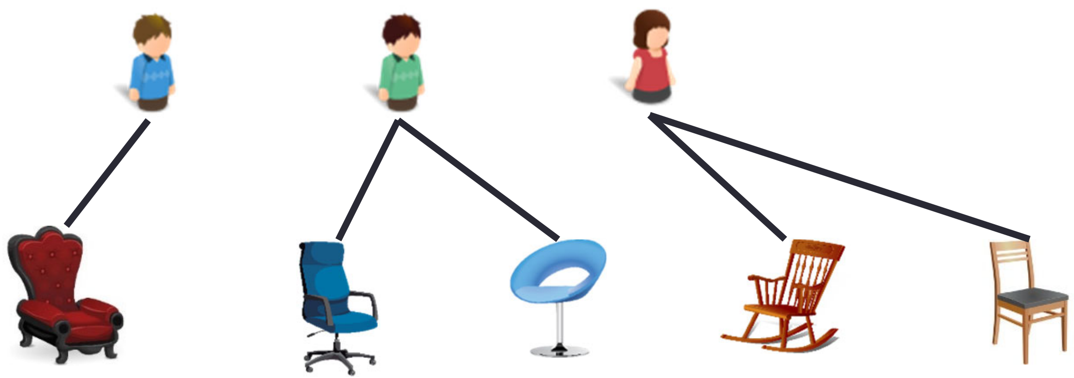
複数需要モデル

複数財を　同時に　オークション

単一需要モデル: 入札者は　高々1つの財　が欲しい



複数需要モデル: 入札者は複数の財を得ることが可能



具体例の一部:
- 周波数の割当
- 空港の離発着権
- トラック配送の請負

財集合の評価関数

単一需要モデル

- 入札者は各財を評価 → 財ごとに評価値 $v(i, j)$

複数需要モデル

入札者は財の集合を評価

→ 財の集合 X に対する評価値 $v_i(X)$

（評価関数, valuation function）

一般的な仮定

- 空集合の評価値 $v_i(\emptyset) = 0$
- v_i は単調非減少 : $X \subseteq Y$ ならば $v_i(X) \leq v_i(Y)$

さまざまな評価関数

- 一意専心（single-minded）:

特定の財集合 S とその価値 α を用いて， $v_i(X) = \begin{cases} \alpha & (X \supseteq S) \\ 0 & (その他) \end{cases}$

- 加法的（additive）: $v_i(X) = \sum_{j \in X} v(i,j)$
- 予算加法的（budget-additive）: $v_i(X) = \min\{B, \sum_{j \in X} v(i,j)\}$

- 対称（symmetric）: $v_i(X) = \varphi_i(|X|)$ （$\varphi_i: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ は単調非減少）

（φ_i が凹関数 ➔ 対称凹（symmetric concave）

- 単一需要（unit-demand）: $v_i(X) = \max_{j \in X} v(i,j)$ (ただし $v_i(\emptyset) = 0$)

単一需要モデルに対応

割当評価関数

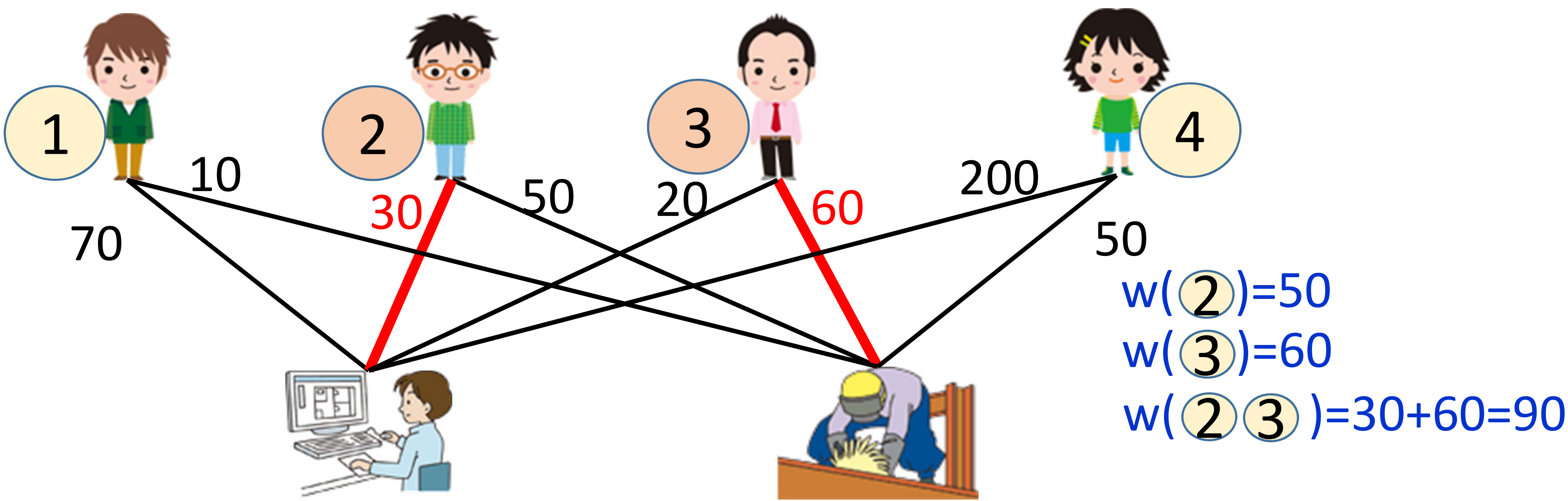
割当（assignment）評価関数：最大重みマッチングで評価値が定まる

イメージ：ある工場の人事担当が,

労働者（「財」）を雇って, いくつかの仕事に割り当てる

w_{jh} ＝労働者 j を仕事 h を処理して得る利益

$v_i(X)$ ＝労働者集合 X を仕事に最適に割り当てたときの利益



ワルラス均衡

財 $N = \{1,2,\ldots,n\}$ を入札者 $M = \{1,2,\ldots,m\}$ に配分

→ N の分割 $(X_0, X_1, \ldots, X_m)$

X_i: 入札者 i への割り当て $(i = 1,2,\ldots,n)$, X_0: 残った財集合

財の価格が p のとき，入札者は利得 $v_i(X) - p(X)$ を最大化したい

定義 : 需要集合 $D_i(p) = \arg\max_{X \subseteq N}\{v_i(X) - p(X)\}$

$p(Y) \equiv \sum_{j \in Y} p(j)$

定義 : 財の配分$(X_0, X_1, \ldots, X_m)$と価格ベクトルp^*の組はワルラス均衡

⇔ $X_i \in D_i(p^*)$ $(i = 1,2,\ldots,m)$, $p^*(j) = 0$ $(j \in X_0)$

均衡の基本的な性質

定義:財の配分$(X_0, X_1, \dots, X_m)$と価格ベクトルp^*の組は**ワルラス均衡**
$\Leftrightarrow$ $X_i \in D_i(p^*)\ \ (i = 1,2,\dots,m)$, $\quad p^*(j) = 0\ (j \in X_0)$

- $X_0 = \emptyset$ と仮定しても良い.
（$\because$ 価格0の財を誰かに割り当てても，利得は減らない）
- 均衡配分と均衡価格は独立
- 単一需要評価関数のとき，単一需要モデルの均衡に一致

評価値の総和最大化問題との関係

定理（単一需要モデル）
財の配分は
均衡配分 ←→ 重み v(i,j) に関する最大重みマッチング

定理（複数需要モデル）
均衡の存在の仮定の下で，財の配分 $(X_0, X_1, \ldots, X_m)$ は
均衡配分 ←→ 総評価値 $\sum_{i=1}^{m} v_i(X_i)$ を最大化

※ 複数需要モデルでは，均衡が存在するとは限らない

ワルラス均衡の例

財 $\{u, v, x, y, z\}$, $p = (60,60,60,60,60)$ のとき

- Aさん: u を含む財集合は100, それ以外は0
  ➔ $D_A(p) = \{\ \{u\}\ \}$
  (欲しい財以外は, 価格>0ならば選ばない)
- Bさん: 重み和(u:50, v:70, x:40, y:30, z:100)
  ➔ $D_B(p) = \{\ \{v, z\}\ \}$
  (評価値>価格なら選ぶ, 評価値<価格なら選ばない)
- Cさん:財の数依存(1つ:100, 2つ:180, 3つ:240, 4つ:280, 5つ:300)
  ➔ $D_C(p) = $ {財の数2または3}

∴ $X_A = \{u\}, X_B = \{v, z\}, X_C = \{x, y\}$ と p はワルラス均衡
(X_A, X_B, X_C) は評価値の総和を最大化

ワルラス均衡が存在しない例

均衡が存在すると仮定 → いずれの場合も矛盾

p(u)>0 かつ p(v)>0 のとき
u, v ともに売れ残り不可
A: たかだか1つの財が欲しい
B: ∅ または {u,v} が欲しい → 配分不可

p(u)=0 かつ p(v)>0 のとき
u のみ売れ残り可
A: {u} が欲しい
B: ∅ または {u,v} が欲しい → 配分不可

p(u)=0 かつ p(v)=0 のとき
A: 1つ以上の財が欲しい
B: {u,v} が欲しい → 配分不可

X	$v_A(X)$	$v_B(X)$
∅	0	0
u	1	0
v	1	0
u,v	1	1

総評価値を最大化する
配分は
(∅,{u,v},∅), ({u},{v},∅)
({v},{u},∅), (∅,∅,{u,v})
のいずれか
いずれも対応する
価格をもたない

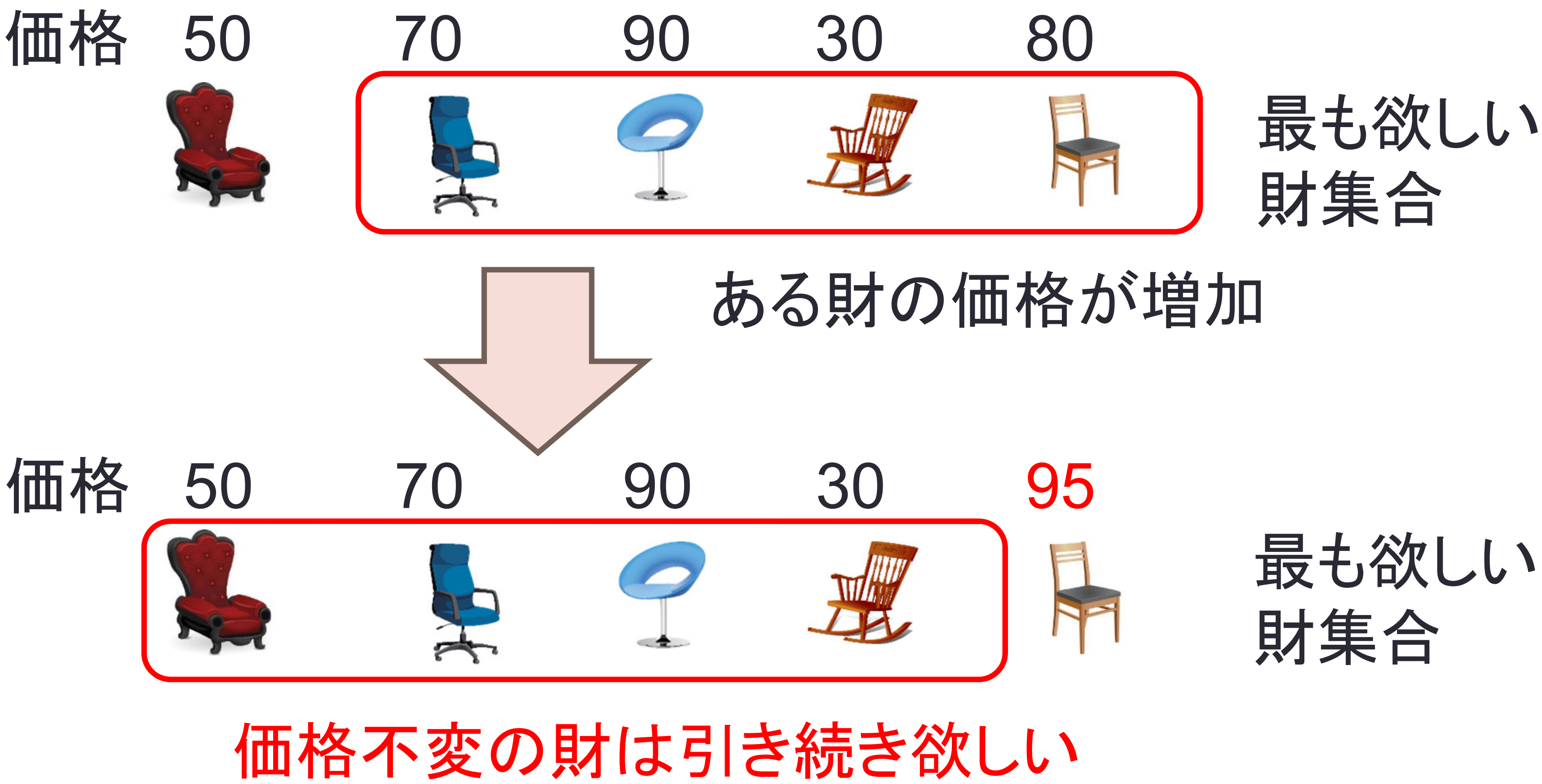
粗代替的評価関数

粗代替的評価関数の概要

- Kelso-Crawford (1982)が提案
- 単一需要モデルにおける均衡の存在性と
  アルゴリズムを拡張したい→粗代替的(gross-substitutes)
- 均衡存在のための十分条件
- 均衡存在のための「必要」条件
  評価関数の1つが非粗代替的，残りが単一需要でも
  均衡が存在しない

粗代替的評価関数のイメージ

粗代替評価関数≒ある財が値上がりしたら，他の財の欲しさが高まる



粗代替的評価関数

定義： 評価関数 $v_i: 2^N \to \mathbb{Z}_+$は 粗代替的(gross-substitutes)

[Kelso-Crawford(1982)]

⇔ $\forall p \in \mathbb{R}^n_+,\ q = p + \lambda e_j,$

$\forall X \in D_i(p),\ \exists Y \in D_i(q)$

s.t. $X \setminus \{j\} \subseteq Y$

$$D_i(p) = \arg\max_{X \subseteq N}\{v_i(X) - p(X)\}$$

以下の(より強く見える)条件と等価

$\forall p, q \in \mathbb{R}^n_+,\ p \le q,\ \forall X \in D_i(p),\ \exists Y \in D_i(q)$

s.t. $\{h \in X \mid q(h) = p(h)\} \subseteq Y$

- additive, unit-demand, symmetric & concave, assignment は粗代替的
- 粗代替的 ➔ 劣モジュラ $v_i(X) + v_i(Y) \ge v_i(X \cap Y) + v_i(X \cup Y)$

粗代替性と等価な性質

粗代替性は様々な性質と等価

- 単改良性 (single-improvement condition) [Gul-Stacchetti1999]
- 無補完性 (no-complementarities) [Gul-Stacchetti1999]
- M♮凹性 (M♮-concavity) [概念はMurota-Shioura1999. 証明はFujishige-Yang 2003]
- 強無補完性 (strong no-complementarities)
  [概念は Gul-Stacchetti1999, 証明は Murota 2018]

様々な等価な性質を知ることで

- 粗代替性の理解が深まる
- 粗代替性に関する様々な定理の証明が可能(容易)になる

単改良性

利得が最大でない➔財1個の削除，追加，または交換により
利得を増やすことが可能

定義： 単改良性(single improvement condition)

$\forall p \in \mathbb{R}^N,\ \forall X \notin D_i(p),\ \exists Y \subseteq N$:

$$|Y \setminus X| \leq 1, \qquad |X \setminus Y| \leq 1, \qquad v_i(Y) - p(Y) > v_i(X) - p(X)$$

X は全ての財集合の中で利得最大

⟷ X-u, X+v, X-u+v (u,v∈N) の中で利得最大

$$v_i(X) - v_i(X-u) \geq p(u), \quad v_i(X) - v_i(X+v) \geq -p(v),$$

$$v_i(X) - v_i(X-u+v) \geq p(u) - p(v)$$

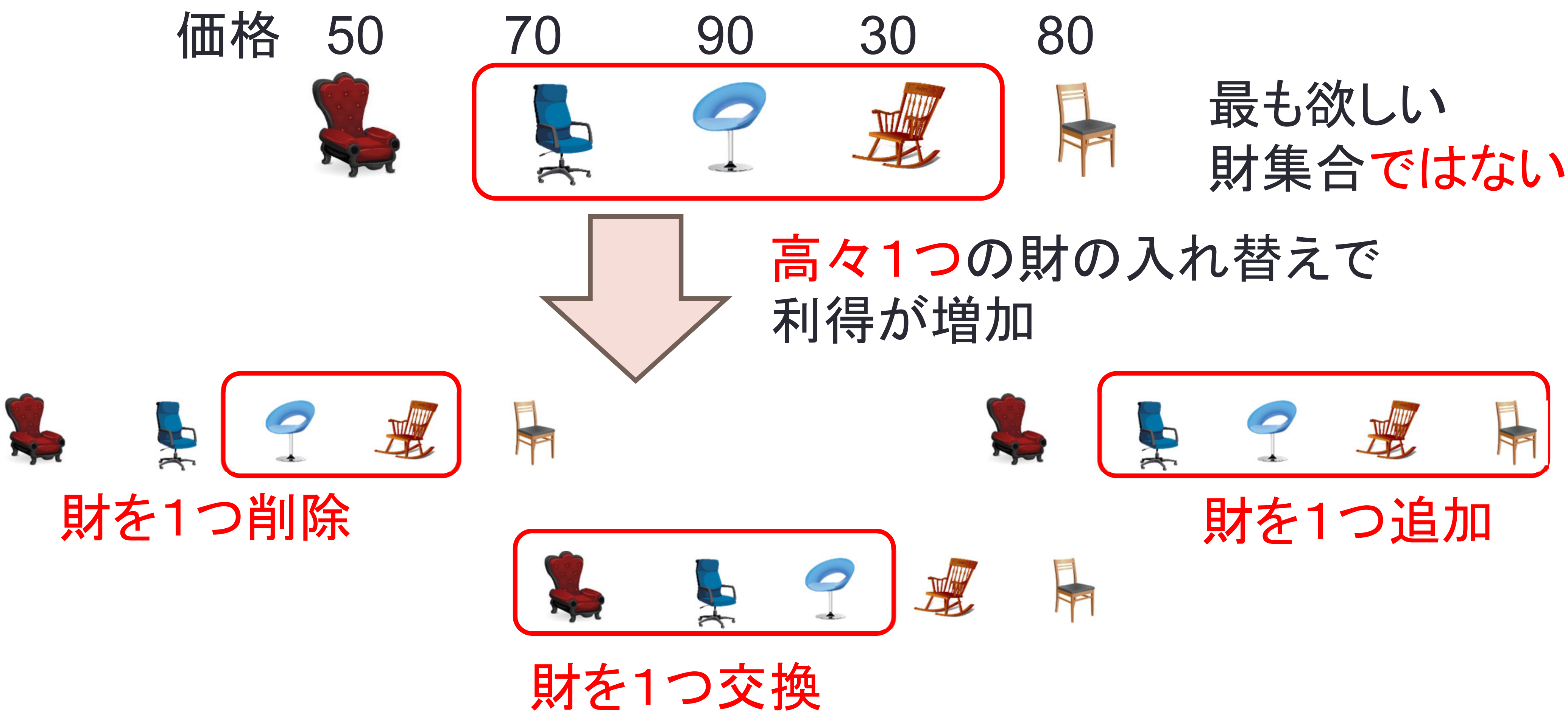
定理[Gul-Stacchetti(1999)]：

評価関数は粗代替的⟷単改良性

単改良性のイメージ

定義：　単改良性(single improvement condition)

利得が最大でない➔財1個の削除，追加，または交換により
利得を増やすことが可能

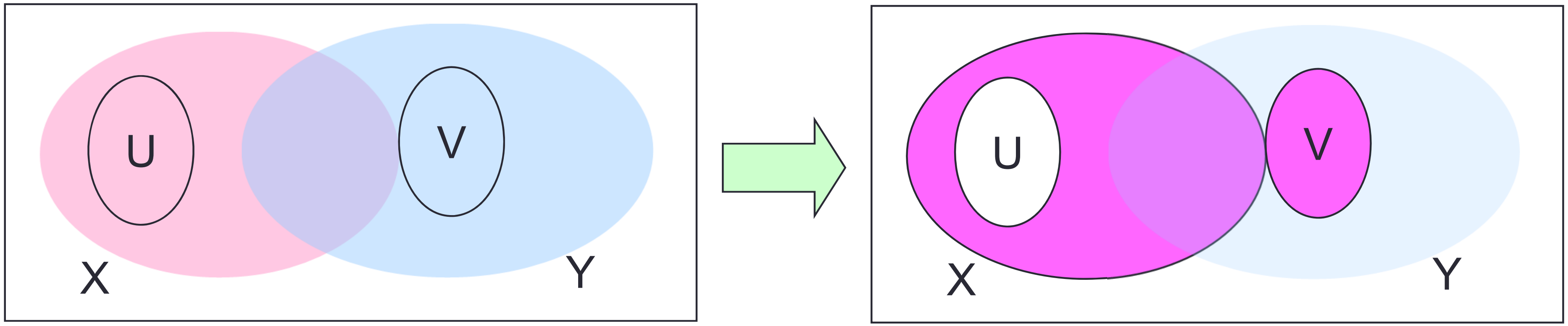


無補完性

財の交換により，利得最大の財集合から，
別の利得最大の財集合をつくることが可能

定義： 無補完性(no complementarities)

$$\forall p \in \mathbb{R}^N,\ \forall X, Y \in D_i(p),$$
$$\forall U \subseteq X \setminus Y,\ \exists V \subseteq Y \setminus X:\quad X \setminus U \cup V \in D_i(p)$$



定理[Gul-Stacchetti(1999)]：
評価関数は粗代替的 ←→ 無補完性

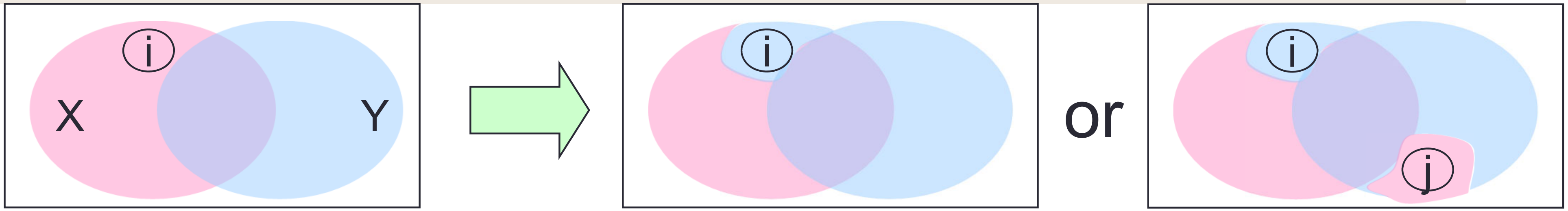
M♮凹性

定義：　M♮凹性(M♮-concavity)

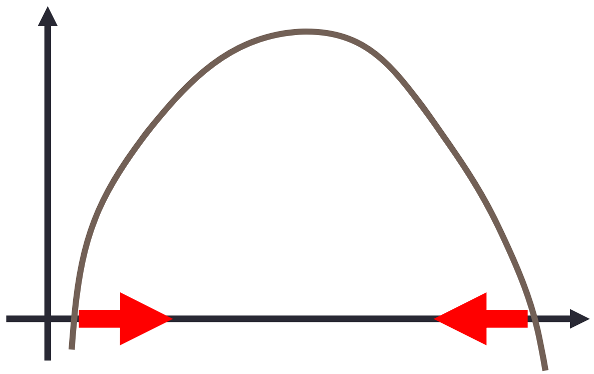
$\forall X, Y \subseteq N, \forall i \in X \setminus Y$, (i) or (ii) 成立:

(i) $v(X) + v(Y) \leq v(X - i) + v(Y + i)$

(ii) $\exists j \in Y \setminus X$: $v(X) + v(Y) \leq v(X - i + j) + v(Y + i - j)$



- 離散的な凹関数
- 価格ベクトルを使わない性質



定理[Fujishige-Yang (2003)]：

評価関数は**粗代替的** ←→ **M♮凹性**

強無補完性

定義：　強無補完性(strong no complementarities)

$\forall X, Y \subseteq N, \forall U \in X \setminus Y,$

$\exists V \in Y \setminus X$: $v(X) + v(Y) \leq v(X \setminus U \cup V) + v(Y \cup U \setminus V)$

定義：　M♮凹性(M♮-concavity)

$\forall X, Y \subseteq N, \forall i \in X \setminus Y,$ (i) or (ii) 成立:

(i) $v(X) + v(Y) \leq v(X - i) + v(Y + i)$

(ii) $\exists j \in Y \setminus X$: $v(X) + v(Y) \leq v(X - i + j) + v(Y + i - j)$

M♮凹性との関係：

強無補完性において U={i} とおく

V=∅ の場合が (i) に対応，|V|=1 の場合が(ii)に対応

定理[Murota (2018)]：

評価関数は粗代替的 ←→ 強無補完性

均衡配分と総評価値最大化問題

評価関数が粗代替的のとき，
ワルラス均衡 ＝ 評価値の総和最大化の主双対最適解

定理　評価関数が粗代替的のとき，
配分 $(X_0, X_1, \dots, X_m)$ は
均衡配分 ←→ 総評価値 $\sum_{i=1}^{m} v_i(X_i)$ を最大化

評価関数が粗代替的のとき，
総評価値 $\sum_{i=1}^{m} v_i(X_i)$ 最大化は多項式時間で解ける
[Murota 1996, Paes Leme-Wong 2020]
よって，入札者の評価関数がすべて既知（例：封印オークション）
→ 均衡配分の計算可能

均衡価格と総評価値最大化問題

定理　評価関数が**粗代替的**のとき，　財の価格 p(j) は
均衡価格 ←→ 総評価値最大化の双対問題の最適解（の一部）

最小化　$\sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$

条件　$q(i) + \sum_{j \in X} p(j) \geq v_i(X) \quad (\forall i, \forall X)$

$q(i) \geq 0 \quad (\forall i)$

$p(j) \geq 0 \quad (\forall j)$

⇨

最小化　$\sum_{i \in B} \max_X \{v_i(X) - p(X)\} + p(N)$

条件　$p(j) \geq 0 \quad (\forall j \in N)$

命題　評価関数が**粗代替的**のとき，
均衡価格は差制約系の解として表現可能（均衡配分を使用）

∵ 単改良性

よって，均衡配分が既知
➔ 最短路問題に帰着して（極小）解を計算可能

※極小均衡価格は唯一
単一需要モデルと異なり，**耐戦略性を導くとは限らない**

紹介するアルゴリズム

- 近似的に計算 [Kelso-Crawford 1982]
  - Bertsekas (1979), Crawford, Knoer (1981) の一般化
  - 単調に価格を増加，均衡配分（および均衡価格の近似値）を求める
  - 各反復で，入札者の利得最大の財集合ひとつの情報が必要
  - 価格増加のルールは簡単：　希望が重複→価格を増やす
- 厳密に計算 [Gul-Stacchetti 2000]
  - Demange, Gale, Sotomayor (1986)の一般化
  - 単調に価格を増加，均衡価格（および均衡配分）を求める
  - 各反復で，入札者の利得最大の財集合すべての情報が必要
  - 価格増加のルールは複雑：
    - 得た情報を使い，価格を増やす財をうまく選ぶ

文献情報

- P. Cramton, Y. Shoham, R. Steinberg: Combinatorial Auctions, MIT Press (2006)
- L. Blumrosen, N. Nisan: Combinatorial auctions. Ch. 11 of Algorithmic Game Theory (N. Nisan, T. Roughgardern, E. Tardos, V.V. Vazirani, eds.), Cambridge University Press (2007)
- K. Murota: Discrete Convex Analysis, SIAM (2003)
- K. Murota: Discrete convex analysis: A tool for economics and game theory, Journal of Mechanism and Institution Design 1 (2016) 151-273
- R. Paes Leme: Gross substitutability: An algorithmic survey. Games and Economic Behavior 106 (2017) 294-316

文献情報

- S. Fujishige, Z. Yang: A note on Kelso and Crawford’s gross substitutes condition, Mathematics of Operations Research 28 (2003) 463-469
- F. Gul, E. Stacchetti: Walrasian equilibrium with gross substitutes, J. Economic Theory 87 (1999) 95-124
- F. Gul, E. Stacchetti, The English auction with differentiated commodities, J. Economic Theory 92 (2000) 66-95
- R. Paes Leme, S. C.-w. Wong: Computing Walrasian equilibria: fast algorithms and structural properties, Mathematical Programming 179 (2020) 343-384
- A.S. Kelso, Jr., V.P. Crawford: Job matching, coalition formation and gross substitutes, Econometrica 50 (1982) 1483-1504
- K. Murota: Valuated matroid intersection, II: algorithms, SIAM Journal on Discrete Mathematics 9 (1996) 562-576
- K. Murota: Multiple exchange property for M♮-concave functions and valuated matroids, Mathematics of Operations Research 43 (2018) 781-788
- K. Murota, A. Shioura: M-convex function on generalized polymatroid, Mathematics of Operations Research 24 (1999) 95-105