単一需要モデル:
均衡を近似的に求めるアルゴリズム

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

アルゴリズムの概要

- δ均衡を求める（δ>0, アルゴリズムのパラメータ）

（条件1）入札者 i に財 j が割り当てられる

$$\Rightarrow v(i,j) - p(j) \geq \max\left[0, \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i,h) - p(h)\}\right] - \delta$$

（条件2）入札者 i に財の割り当てなし

$$\Rightarrow \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i,h) - p(h)\} \leq 0$$

（条件3）財 j が誰にも割当られない $\Rightarrow p(j) = 0$

- 普通の均衡の条件と異なるのは条件1のみ
- 0均衡 = 普通の均衡

手順

- 各入札者は，現在の価格の下で利得最大の財を一つ選ぶ
- 同じ財を複数の入札者が選ぶ

→ ひとりを選んで割り当て．　その財の価格を上昇させる．

アルゴリズムの概要

異なる分野で独立に提案される

- Bertsekas (1979) --- 数理計画，オペレーションズ・リサーチ
  - 最大重みマッチング問題に対して提案
  - この分野では「オークションアルゴリズム」とよばれる

- Crawford, Knoer (1981) --- 数理経済，オークション理論
  - 割当ゲームのコア（≒単一需要モデルの均衡）
    の近似解を求めるアルゴリズムとして提案
  - Demange, Gale, Sotomayor (1986) に詳しい記述，解析あり

アルゴリズムの詳細

ステップ0: $p(j) := 0 \ (j \in N)$, 各入札者の財の割当なし.

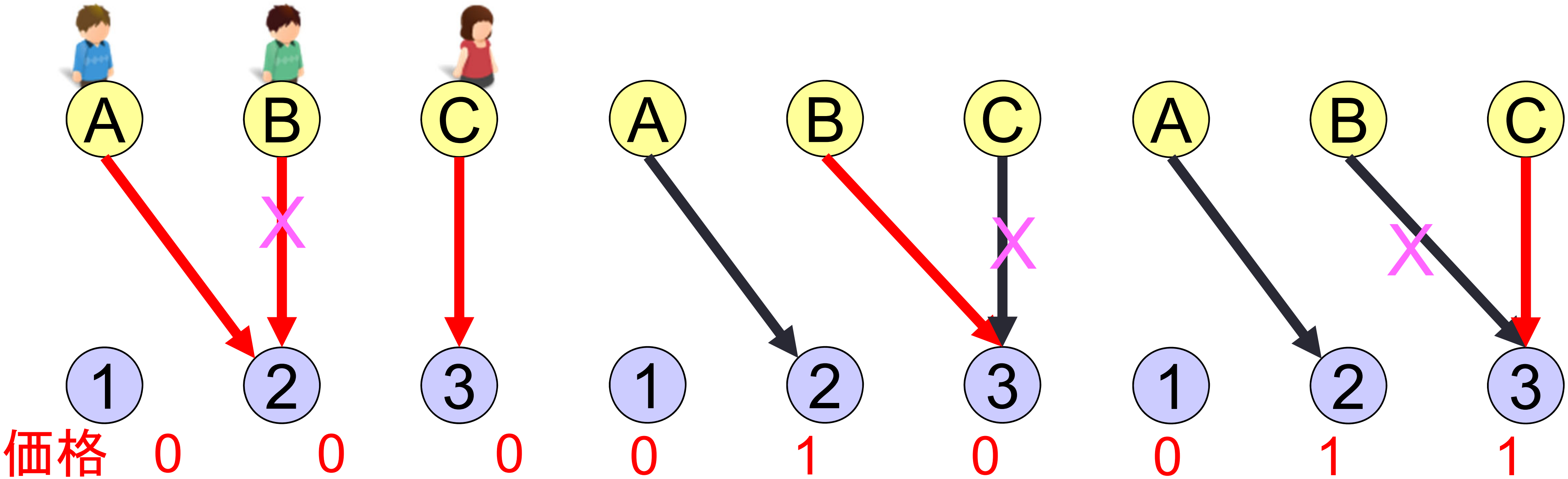
ステップ1: 各入札者 i に対し, 財の割当あり
or 最大利得 $\max_j \{v(i,j) - p(j)\} \leq 0$ ➔ 終了

ステップ2: 財の割当なし, かつ 最大利得 > 0 の入札者 i を選ぶ.

ステップ3: $v(i,j) - p(j)$ 最大の j を入札者 i に割り当て.
財 j が入札者 k に割り当てられていた
→ k への j の割当を取消. $p(j) := p(j) + \delta$
ステップ1へ.

アルゴリズムの実行例

δ=1のとき



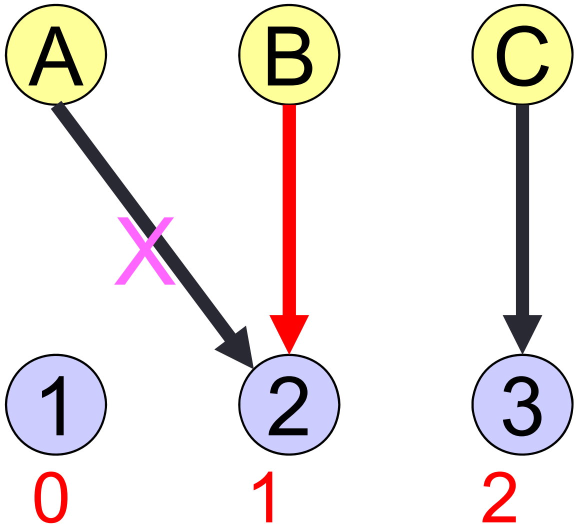
v(i,j)	A	B	C
①	3	1	1
②	6	5	3
③	2	4	4

利得	A	B	C
①	3	1	1
②	5	4	2
③	2	4	4

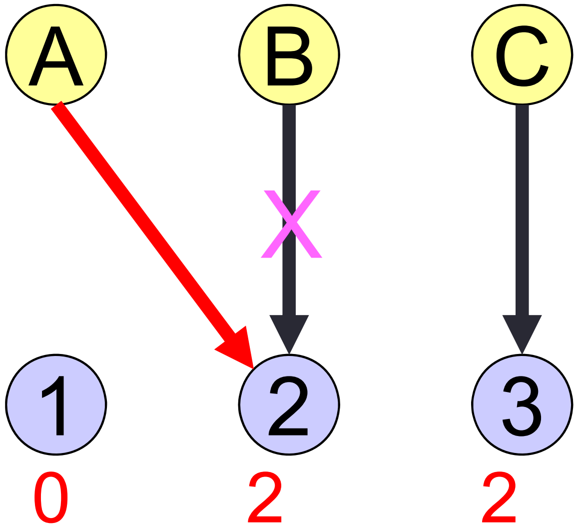
利得	A	B	C
①	3	1	1
②	5	4	2
③	1	3	3

アルゴリズムの実行例

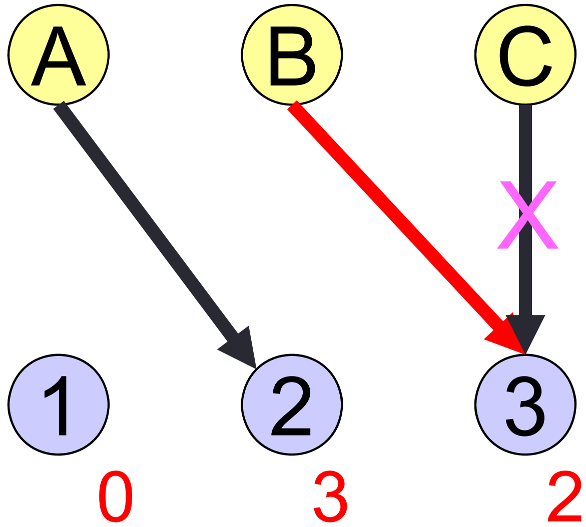
δ=1のとき



利得	A	B	C
①	3	1	1
②	5	4	2
③	0	2	2



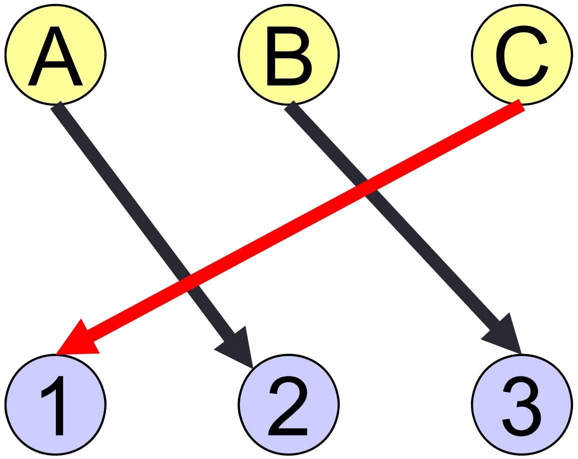
利得	A	B	C
①	3	1	1
②	4	3	1
③	0	2	2



利得	A	B	C
①	3	1	1
②	3	2	0
③	0	2	2

アルゴリズムの実行例

δ=1のとき



0 3 3

利得	A	B	C
①	3	1	1
②	3	2	0
③	-1	1	1

終了
均衡配分×
均衡価格○
極小均衡価格×

均衡配分と
極小均衡価格

	v(i,j)	A	B	C
0	①	3	1	1
3	②	6	5	3
2	③	2	4	4

	利得	A	B	C
0	①	3	1	1
3	②	3	2	0
2	③	0	2	2

近似精度の解析

アルゴリズムの正当性

定理1 アルゴリズムは有限回の反復後に終了し，
δ均衡を求める．

（条件1）入札者 i に財 j が割り当てられる
➔ $v(i,j) - p(j) \geq \max\left[0, \max_{1\leq h\leq n}\{v(i,h) - p(h)\}\right] - \delta$
（条件2）入札者 i に財の割り当てがない
➔ $\max_{1\leq h\leq n}\{v(i,h) - p(h)\} \leq 0$
（条件3）財 j が誰にも割り当てられない ➔ $p(j) = 0$

[有限性の証明]
- 各財の価格：初期値＝０
- アルゴリズムの各反復：
  ある財 j の価格 $p(j)$ が δ 増加（➔ $v(i,j) - p(j)$ が δ 減少）
- すべての入札者 i に対し $v(i,j) - p(j) \leq 0$
  ➔ 財 j の価格は今後変化しない

∴財 j の価格 $p(j)$ の増加回数 $\leq \max_{i\in B} v(i,j) / \delta$

アルゴリズムの正当性

定理1 アルゴリズムは有限回の反復後に終了し，
δ均衡を求める．

（条件1）入札者 i に財 j が割り当てられる
➔ $v(i,j) - p(j) \geq \max\left[0, \max_{1 \leq h \leq n}\{v(i,h) - p(h)\}\right] - \delta$
（条件2）入札者 i に財の割り当てがない
➔ $\max_{1 \leq h \leq n}\{v(i,h) - p(h)\} \leq 0$
（条件3）財 j が誰にも割り当てられない ➔ $p(j) = 0$

[条件1の証明]
入札者 i が最終的に得た財 j を，i が（最後に）選んだ反復に注目．
財 j を選んだ時点で，i にとって利得最大
→ 他の入札者から奪った場合，直後に価格が δ 増加
アルゴリズム終了時まで，他の入札者に奪われないので，
価格 p(j) 不変 ■

アルゴリズムの正当性

定理1 アルゴリズムは有限回の反復後に終了し，
δ均衡を求める．

（条件1）入札者 i に財 j が割り当てられる
➔ $v(i,j) - p(j) \geq \max\left[0, \max_{1 \leq h \leq n}\{v(i,h) - p(h)\}\right] - \delta$
（条件2）入札者 i に財の割り当てがない
➔ $\max_{1 \leq h \leq n}\{v(i,h) - p(h)\} \leq 0$
（条件3）財 j が誰にも割り当てられない ➔ $p(j) = 0$

[条件2の証明]
アルゴリズムの途中で，ある入札者に対して
条件2 が不成立（ $\max_{1 \leq h \leq n}\{v(i,h) - p(h)\} > 0$ かつ割当なし）
➔ ステップ1より，アルゴリズムは終了しない ■

アルゴリズムの正当性

定理1 アルゴリズムは有限回の反復後に終了し，
δ均衡を求める．

（条件1）入札者 i に財 j が割り当てられる

➔ $v(i,j) - p(j) \geq \max\left[0, \max_{1 \leq h \leq n}\{v(i,h) - p(h)\}\right] - \delta$

（条件2）入札者 i に財の割り当てがない

➔ $\max_{1 \leq h \leq n}\{v(i,h) - p(h)\} \leq 0$

（条件3）財 j が誰にも割り当てられない ➔ $p(j) = 0$

[条件3の証明]
アルゴリズムの途中で，財の価格が増加
⇔ その財の割当が別の入札者に変更
∴アルゴリズム終了時に割り当てなしの財 j に対し，
価格 p(j) はずっと不変で 0 ■

アルゴリズムの性能評価

得られたマッチングの重み ≒ 最大重み

定理2 δ均衡配分（マッチング）の重み
≧ 最大重みマッチングの重み $-\ \delta \min\{|B|, |N|\}$

証明は「均衡配分➔最大重みマッチング」と同様

得られた財の価格 ≒ 均衡価格

定理3 $p(j)$: δ均衡価格, $p^*(j)$: 極小均衡価格
➔ $|p(j) - p^*(j)| \le \delta \min\{|B|, |N|\}$

定理3の証明は Demange, Gale, Sotomayor (1986) 参照.

厳密な均衡を得る

評価値 $v(i,j)$ がすべて整数　→　極小均衡価格も整数値
→ δ が十分小さいとき，厳密な均衡が得られる

定理2 δ均衡配分（マッチング）M の重み
≧ 最大重みマッチングの重み $-\ \delta \min\{|B|,|N|\}$

$\delta < 1/\min\{|B|,|N|\}$
→　Mの重み > 最大重みマッチングの重み −1
∴ 重みの整数性より　　Mの重み ＝ 最大重み

定理3 $p(j)$: δ均衡価格，　$p^*(j)$: 極小均衡価格
➔ $|p(j) - p^*(j)| \leq \delta \min\{|B|,|N|\}$

$\delta < 1/2\min\{|B|,|N|\}$　→　$|p(j) - p^*(j)| < 0.5$
∴ p*(j) の整数性より　　p(j) に最も近い整数 ＝ p*(j)

定理2の証明(その1)

記号の定義

$\alpha(i)$ $(i \in B)$: アルゴリズム終了時の財の配分

B_α = アルゴリズム終了時に財が配分された入札者の集合

➔$\{\alpha(i) | i \in B_\alpha\}$ = アルゴリズム終了時, 入札者に配分された財の集合

$\alpha^*(i)$ $(i \in B)$: 最大重みマッチング M* に対応する財の配分

B^* = M* において, 財が配分された入札者の集合

➔ $\{\alpha^*(i) | i \in B^*\}$ = M* において入札者に配分された財の集合

示したい不等式

$$\sum_{i \in B_\alpha} v(i, \alpha(i)) \geq \sum_{i \in B_{\alpha^*}} v\big(i, \alpha^*(i)\big) - \delta \min\{|B|, |N|\}$$

この不等式の代わりに, 以下の等価な不等式を示す:

① $\sum_{i \in B_\alpha} v(i, \alpha(i)) - \sum_{j \in N} p(j)$

$$\geq \sum_{i \in B_{\alpha^*}} v\big(i, \alpha^*(i)\big) - \sum_{j \in N} p(j) - \delta \min\{|B|, |N|\}$$

定理2の証明(その2)

① を示すために，以下の不等式を示す(証明は後ほど)：

② i に割り当てられた財は，ほぼ利得最大

$$v(i,\alpha(i)) - p\big(\alpha(i)\big) \geq v\big(i,\alpha^*(i)\big) - p\big(\alpha^*(i)\big) - \delta \quad (\forall i \in B_\alpha \cap B^*)$$

③ i に割り当てられた財は，ほぼ利得≧0

$$v(i,\alpha(i)) - p\big(\alpha(i)\big) \geq -\delta \quad (\forall i \in B_\alpha \setminus B^*)$$

④ 財の割り当てのない入札者 i については，

均衡においても利得≦0

$$0 \geq v\big(i,\alpha^*(i)\big) - p\big(\alpha^*(i)\big) \quad (\forall i \in B^* \setminus B_\alpha)$$

⑤ 誰にも割り当てられない財の価格＝0

$$-p(j) = 0 \quad (\forall j \in N \setminus \{\alpha(i) | \, i \in B_\alpha\})$$

⑥ 財の価格≧0　　$0 \geq -p(j) \quad (\forall j \in N \setminus \{\alpha^*(i) | \, i \in B^*\})$

②--⑥を辺々加える ➔ ① が得られる

定理2の証明(その3)

②--⑥を辺々加えたときの

左辺 = $\sum_{i\in B_\alpha}[v(i,\alpha(i)) - p(\alpha(i))] - \sum_{j\in N\setminus\{\alpha(i)|\, i\in B_\alpha\}} p(j)$

$= \sum_{i\in B_\alpha} v(i,\alpha(i)) - \sum_{j\in N} p(j)$

右辺 = $\sum_{i\in B_\alpha\cap B^*}[v(i,\alpha^*(i)) - p(\alpha^*(i)) - \delta] - \delta|B_\alpha\setminus B^*|$

$+ \sum_{i\in B^*\setminus B_\alpha}[v(i,\alpha^*(i)) - p(\alpha^*(i))] - \sum_{j\in N\setminus\{\alpha^*(i)|\, i\in B^*\}} p(j)$

$= \sum_{i\in B^*}[v(i,\alpha^*(i)) - p(\alpha^*(i))] - \sum_{j\in N\setminus\{\alpha^*(i)|\, i\in B^*\}} p(j) - \delta|B_\alpha|$

$= \sum_{i\in B^*} v(i,\alpha^*(i)) - \sum_{j\in N} p(j) - \delta|B_\alpha|$

$\geq \sum_{i\in B^*} v(i,\alpha^*(i)) - \sum_{j\in N} p(j) - \delta\min\{|B|,|N|\}$

(最後の不等号は $|B_\alpha| \leq \min\{|B|,|N|\}$ より)

∴ ①成立

定理2の証明(その4)

② $v(i,\alpha(i)) - p(\alpha(i)) \geq v(i,\alpha^*(i)) - p(\alpha^*(i)) - \delta \quad (\forall i \in B_\alpha \cap B^*)$

③ $v(i,\alpha(i)) - p(\alpha(i)) \geq -\delta \quad (\forall i \in B \setminus B^*)$ の証明

入札者 $i \in B_\alpha$ は, アルゴリズム終了時にδ均衡の条件1を満たす

➔ $v(i,\alpha(i)) - p(\alpha(i)) \geq -\delta$ ➔ ③

⑦ $v(i,\alpha(i)) - p(\alpha(i)) \geq \max_{1 \leq h \leq n}\{v(i,h) - p(h)\} - \delta$

$i \in B_{\alpha^*}$に対して $\max_{1 \leq h \leq n}\{v(i,h) - p(h)\} \geq v(i,\alpha^*(i)) - p(\alpha^*(i))$

この式と⑦ ➔ ②

定理2の証明(その5)

⑤ $-p(j) = 0 \quad (\forall j \in N \setminus \{\alpha(i) | \, i \in B_\alpha\})$

⑥ $0 \geq -p(j) \quad (\forall j \in N \setminus \{\alpha^*(i) | \, i \in B^*\})$ 　の証明

⑥はアルゴリズムでの価格の非負性より自明.

$j \in N \setminus \{\alpha(i) | i \in B_\alpha\}$はアルゴリズム終了時に割り当てられていない財

➔ 命題1より p(j)=0 ➔ ⑤

補足:「オークション」アルゴリズムの高速化

- オリジナルの「オークション」アルゴリズムは擬多項式時間
- スケーリング技法が適用可能 → 弱多項式時間
  - 最初はδを大きくとり，徐々に小さくする
- 逐次最短路法(ハンガリー法)との組合せでさらに高速化
  - 最初はスケーリング版アルゴリズムを適用
  - 途中で逐次最短路法に切り替え

D.P. Bertsekas, J. Eckstein: Dual coordinate step methods for linear network flow problems, Mathematical Programming 42 (1988) 203-243

J.B. Orlin, R.K. Ahuja: New scaling algorithms for the assignment and minimum mean cycle problems, Mathematical Programming 54 (1992) 41-56