単一需要モデル：均衡を厳密に計算するアルゴリズム

塩浦昭義

東京工業大学 経営工学系

shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

均衡を厳密に計算する

- 評価値の情報を陽に使わず，（極小）均衡価格を厳密に計算
- 使える情報：　価格 $p = \big(p(1), p(2), \dots, p(n)\big) \in \mathbb{Z}^n_+$ を提示

→入札者は 利得最大の財の集合 $D_i(p)$ を答える

$$D_i(p) \equiv \{j \in N \mid v(i,j) - p(j) = \text{最大}\}$$

ただし最大利得 < 0 のとき $D_i(p) = \emptyset$

アルゴリズム（競り上げオークション）

1．競売人：各財の初期価格=0

2．各入札者：　暫定価格 p の下で $D_i(p)$ を報告

3．競売人：入札者全員に，重複なく利得最大の財を

配分可　➔　終了．現在の価格は均衡価格

配分不可 ➔　価格を適切に増加

均衡条件

定義: 財の価格 $p \in \mathbb{Z}_+^n$ は 均衡価格
⟷ 以下の条件を満たす財の配分が存在

（条件1）入札者 i に財 j が割り当て ➔ $j \in D_i(p)$
（条件2）入札者 i に財の割り当てなし ➔ $q(i) = 0$
（条件3）財 j の割り当てなし ➔ $p(j) = 0$

入札者 i の最大利得 $q(i) \equiv \max\left[0, \max_{1 \le h \le n}\{v(i,h) - p(h)\}\right]$
利得最大の財集合 $D_i(p)$

条件2,3の対偶:
（条件2）$q(i) > 0$ ➔ 入札者 i に財の割り当てあり
（条件3）$p(j) > 0$ ➔ 財 j の割り当てあり

補助グラフにおけるマッチングを用いて均衡条件を表現

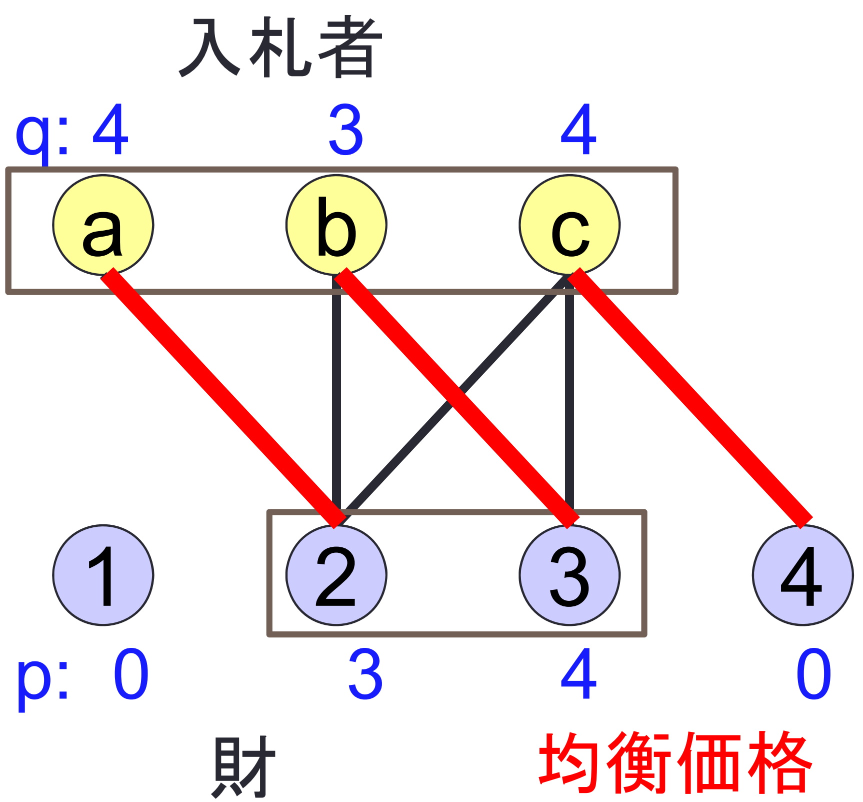
補助グラフを用いた均衡条件

補助二部グラフ $G(p)$ (p: 価格ベクトル)

頂点集合 $B \cup N$ 枝集合 $E = \{(i,j) \mid j \in D_i(p)\}$

$B^+ \equiv \{i \in B \mid q(i) > 0\}, \qquad N^+ \equiv \{j \in N \mid p(j) > 0\}$

$p \in \mathbb{Z}^n_+$ は 均衡価格
←→頂点集合 $B^+ \cup N^+$ をカバーする
マッチングが存在



v(i,j)	a	b	c
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

利得	a	b	c
①	3	1	0
②	4	3	4
③	-3	3	4
④	0	0	4

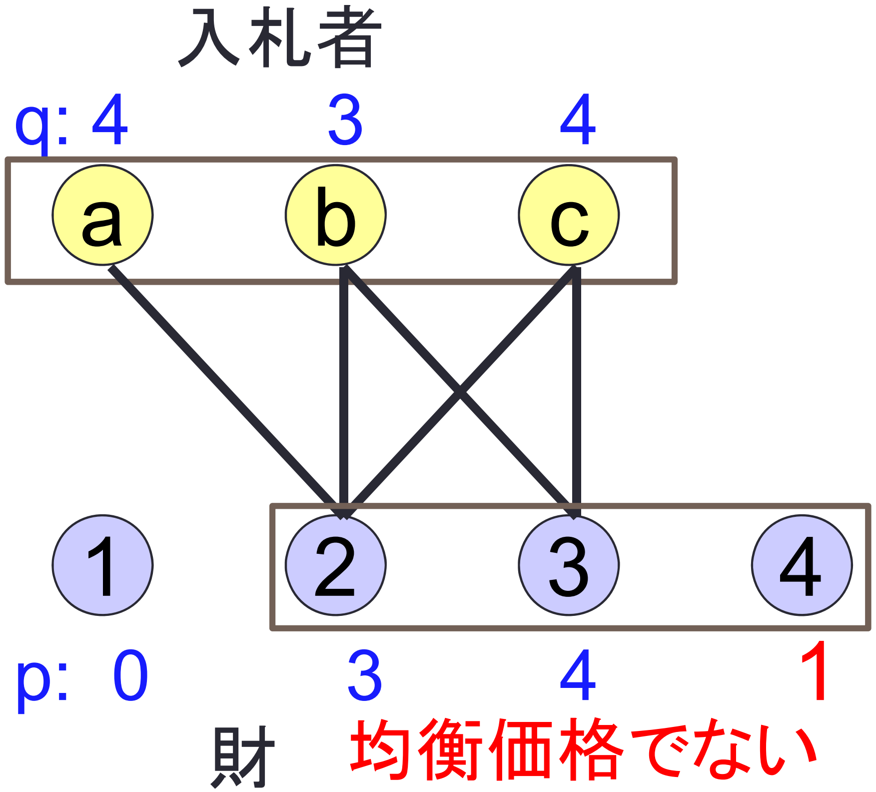
補助グラフを用いた均衡条件

補助二部グラフ $G(p)$　(p: 価格ベクトル)

頂点集合　$B \cup N$　　　　枝集合　$E = \{(i,j) \mid j \in D_i(p)\}$

$B^+ \equiv \{i \in B \mid q(i) > 0\}$,　　$N^+ \equiv \{j \in N \mid p(j) > 0\}$

$p \in \mathbb{Z}^n_+$　は　均衡価格
←→頂点集合 $B^+ \cup N^+$ をカバーする
マッチングが存在



v(i,j)	a	b	c
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

利得	a	b	c
①	3	1	0
②	4	3	4
③	-3	3	4
④	-1	-1	3

アルゴリズムのアイディア

頂点集合 $B^+ \cup N^+$ を同時にカバーするマッチングが存在

マッチングの性質より

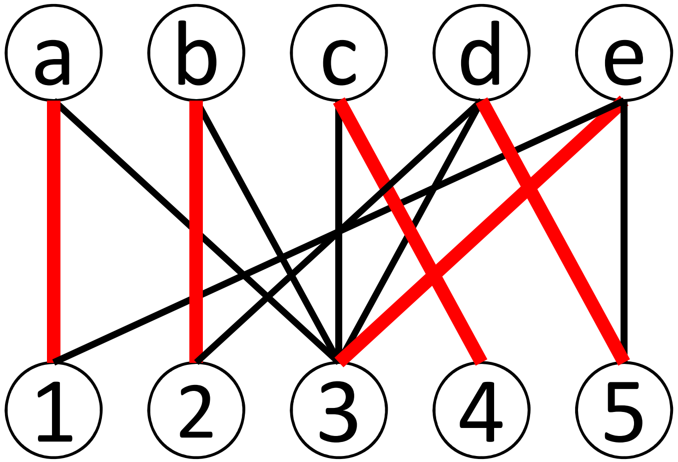
① B^+ をカバーするマッチングが存在
② N^+ をカバーするマッチングが存在

アルゴリズムの開始時，すべての財の価格=0
→ $N^+ = \emptyset$ → 条件②は自明に成立
すべての財の価格が十分高い
→ $B^+ = \emptyset$ →条件①は自明に成立
条件②を満たしつつ，①が満たされるように価格を増やしたい
どうやって？ ← ホールの定理を使う

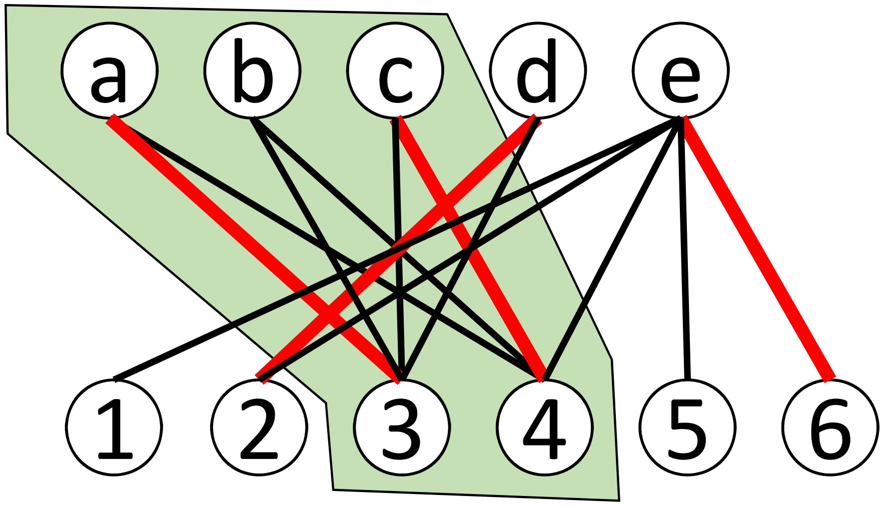
頂点集合をカバーするマッチング：必要条件(その1)

所与の B⁺⊆B をカバーするマッチングは存在するか？

B⁺={a,b,c,d,e}をカバー可能



B⁺={a,b,c,d,e}をカバー可能？



命題

ある X⊆B⁺に対し,

X が欲しい財の数 < $|X|$

➔ B⁺ をカバーする マッチングは存在しない

a,b,c の欲しい財 ⊆ {3,4}

∴ a,b,cのうち，高々2人に 割り当て可能

→ B⁺ はカバーできない

頂点集合をカバーするマッチング：必要十分条件（その1）

逆も成り立つ

定理（Hall（ホール）の定理）

B^+ をカバーするマッチングが存在

⇔ $\forall X \subseteq B^+$, Xが欲しい財の数 $\geq |X|$

N^+ についても同様

N^+ をカバーするマッチングが存在

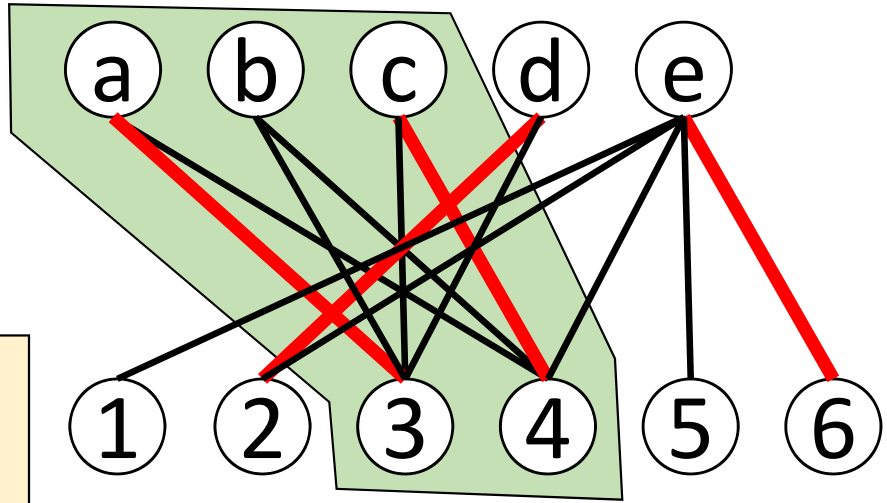
⇔$\forall Y \subseteq N^+$, Y の財を欲しい入札者 $i \in B$ の数

$= D_i(p) \cap Y \neq \emptyset$ を満たす入札者 $i \in B$ の数 $\geq |Y|$

頂点集合をカバーするマッチング：必要条件(その2)

入札者集合中心の見方
→ 財集合中心の見方

B⁺={a,b,c,d,e}をカバー可能？



命題
ある Z⊆N に対し,
$D_i(p) \subseteq Z$ を満たす入札者 $i \in B^+$ の数
(Zの財のみを欲しい入札者の数)
$> |Z|$
➔ B^+をカバーする
マッチングは存在しない

財集合 Z={3,4} に対し,
入札者a,b,cの欲しい財⊆ Z
∴ a,b,cのうち，高々2つに
割り当て可能
→ B^+ はカバーできない

頂点集合をカバーするマッチング：必要十分条件（その2）

逆も成り立つ

定理（Hall（ホール）の定理の変種）

B^+ をカバーするマッチングが存在

$\Leftrightarrow$ $\forall Z \subseteq N$, $D_i(p) \subseteq Z$ を満たす入札者 $i \in B^+$ の数 $\leq |Z|$

アルゴリズムの方針

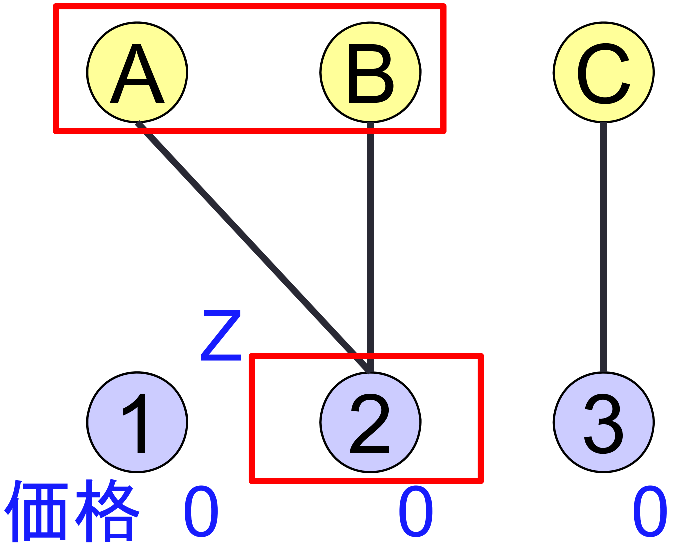
B⁺をカバーするマッチングが存在
⇔① $\forall Z \subseteq N$, $D_i(p) \subseteq Z$ を満たす入札者 $i \in B^+$ の数 $\leq |Z|$

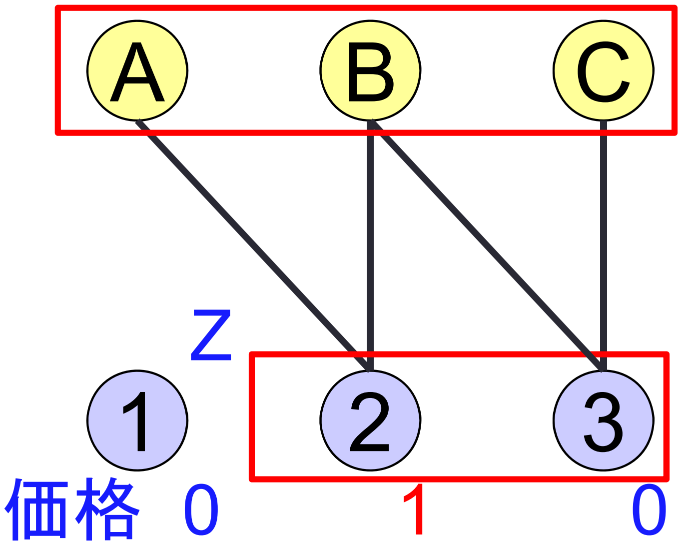
N⁺ をカバーするマッチングが存在
⇔② $\forall Y \subseteq N^+$, $D_i(p) \cap Y \neq \emptyset$ を満たす入札者 $i \in B$ の数 $\geq |Y|$

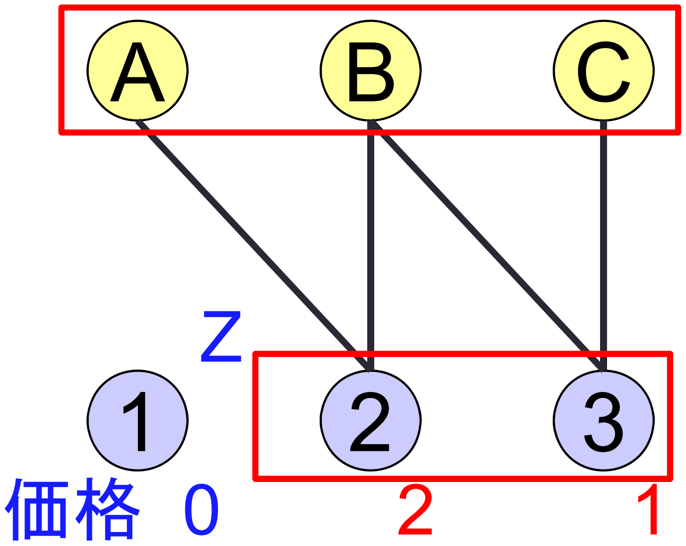
- 条件②を満たしつつ，①に違反する Z を減らすよう，価格を増やす
- ①に違反する Z ⇔ Z のみを欲しい入札者が多すぎる

  ∴ Z に含まれる(幾つかの)財の価格を増やせば，
  欲しい入札者を減らせる
- ①に「最も」違反する(左辺ー右辺が最大の)
  Z の中で極小なものを選び，価格を増やす
  ➔条件②は維持される(要証明)

アルゴリズムの実行例(1)





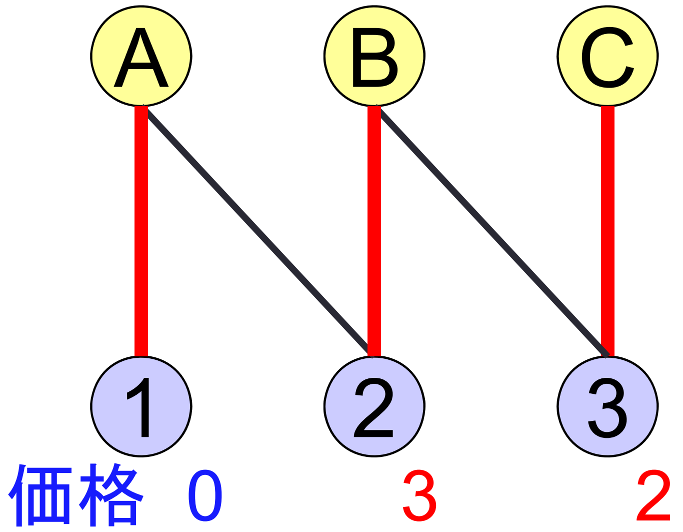


v(i,j)	A	B	C
①	3	1	1
②	6	5	3
③	2	4	4

利得	A	B	C
①	3	1	1
②	5	4	2
③	2	4	4

利得	A	B	C
①	3	1	1
②	4	3	1
③	1	3	3

アルゴリズムの実行例(1)

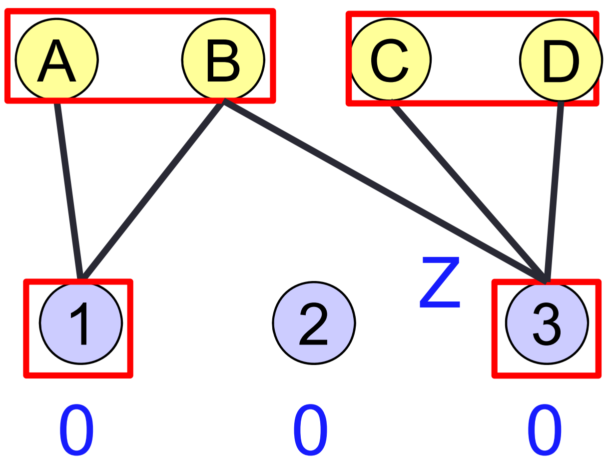


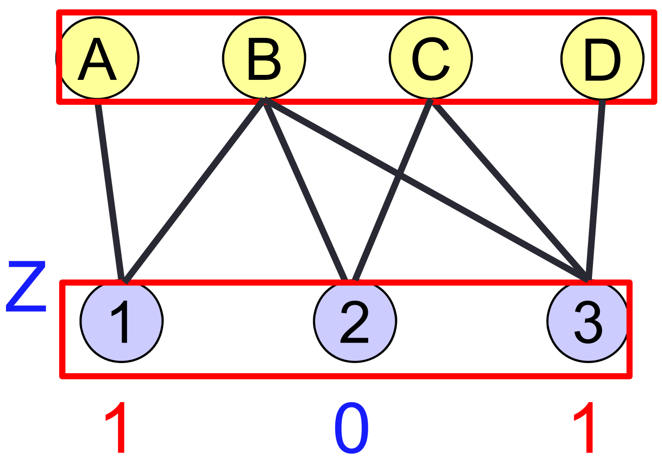
利得	A	B	C
①	3	1	1
②	3	2	0
③	0	2	2

①の条件に違反するZなし
→ アルゴリズム終了

所望のマッチング存在
∴ (極小)均衡価格が得られた

アルゴリズムの実行例(2)

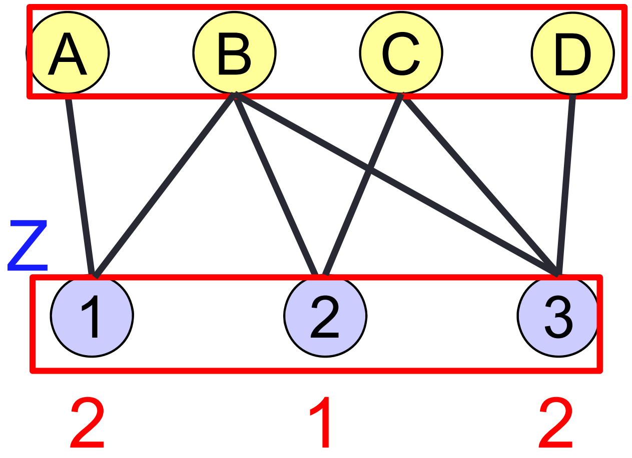


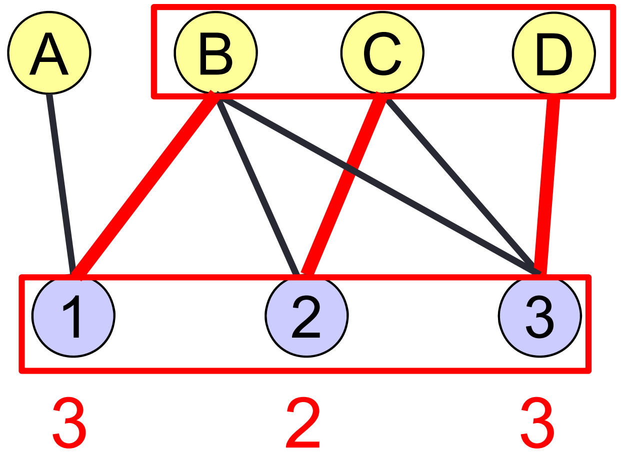


v(i,j)	A	B	C	D
①	3	7	1	0
②	1	6	7	0
③	0	7	8	4

利得	A	B	C	D
①	2	6	0	-1
②	1	6	7	0
③	-1	6	7	3

アルゴリズムの実行例(2)





利得	A	B	C	D
①	1	5	-1	-2
②	0	5	6	-1
③	-2	5	6	2

利得	A	B	C	D
①	0	4	-2	-3
②	-1	4	5	-2
③	-3	4	5	1

Aの最大利得=0

①の条件に
違反するＺなし
→ アルゴリズム終了

所望の
マッチング存在
∴（極小）均衡価格が
得られた

アルゴリズムの正当性の証明

二部グラフ G(p)=(B, N; E),　B^+ = 最大利得 > 0 の入札者全員

N^+ =価格 > 0 の財全体

満たすべき条件:

① ∀Z⊆N,　$D_i(p) \subseteq Z$　を満たす入札者 $i \in B^+$の数≦ |Z|

② $\forall Y \subseteq N^+$, $D_i(p) \cap Y \neq \emptyset$ を満たす入札者 $i \in B$ の数 $\geq |Y|$

- アルゴリズムが終了←→条件①成立
- すべての財の利得≦0 になったら，定義より $B^+ = \emptyset$ ∴条件①成立
- 各反復において，ある財の価格が1増加

∴ すべての財の利得≦0 になるまで，たかだか有限回

- アルゴリズム開始時は $N^+=\emptyset$　∴ ②は自明に成立

∴ 条件②が常に満たされることを証明すれば良い.

条件②が維持されることの証明：概要

② $\forall Y \subseteq N^+$,　$D_i(p) \cap Y \neq \emptyset$ を満たす入札者 i∈B の数 ≥ $|Y|$

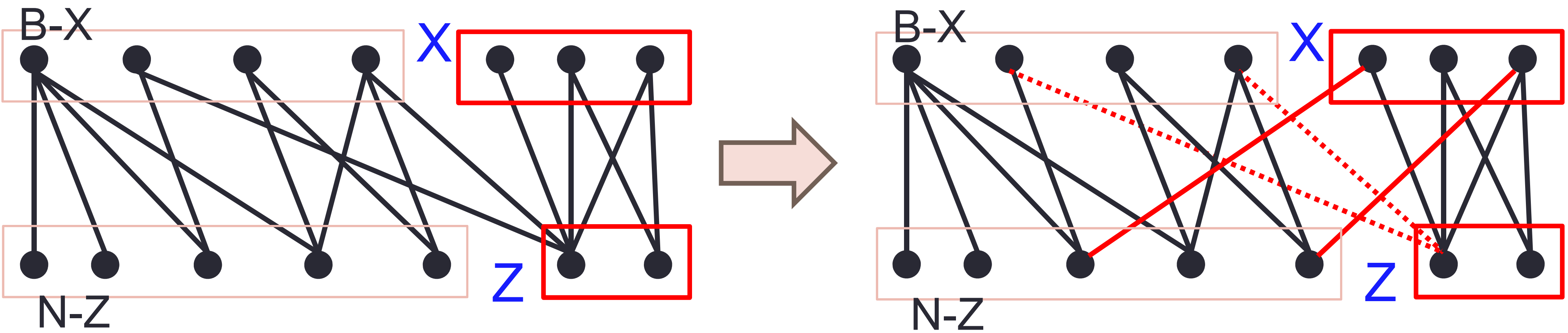
価格 p のときに②成立と仮定.

Z = ①に最も違反する集合で極小なもの

価格を $p' = p + \chi_Z$ に変更後も②が成立することを証明

X = 「（価格pにおいて）$D_i(p) \subseteq Z$ を満たす入札者 i∈B^+」の集合

→ |X| > |Z|（∵ Z は条件①に違反）



条件②が維持されることの証明：概要

② $\forall Y \subseteq N^+$, $D_i(p') \cap Y \neq \emptyset$ を満たす入札者 i∈B の数 $\geq |Y|$ を示したい

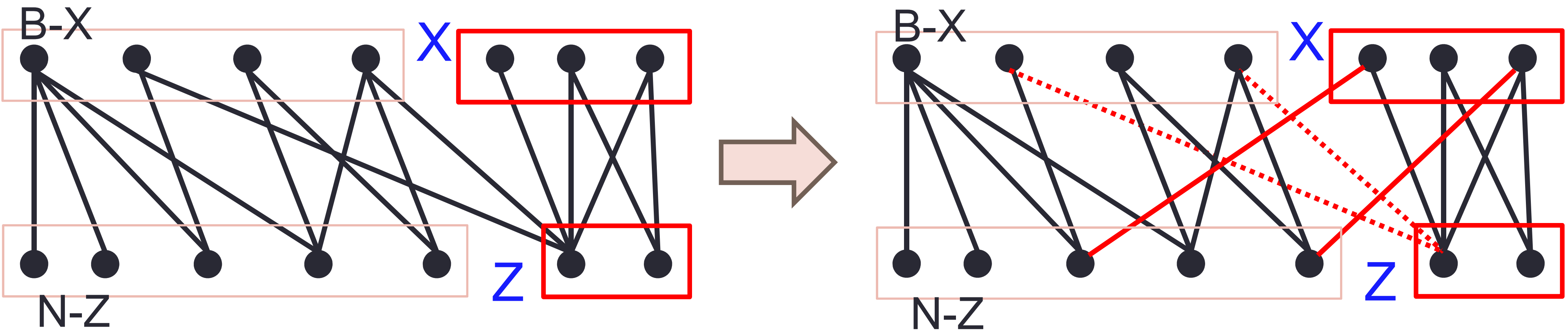
以下の (a), (b) を示せば良い

(a) $\forall Y \subseteq N^+ \setminus Z$, $D_i(p') \cap Y \neq \emptyset$ を満たす入札者 i∈B-Xの数 ≧ |Y|

（∵帰納法の仮定）

(b) $\forall Y \subseteq Z$, $D_i(p') \cap Y \neq \emptyset$ を満たす入札者 i∈Xの数 ≧ |Y|

（∵ Z の性質より）



(a), (b) ➔ ② の証明

(a) $\forall Y \subseteq N^+ \setminus Z,\ D_i(p') \cap Y \neq \emptyset$ を満たす入札者 $i \in B \setminus X$ の数 $\geq |Y|$

(b) $\forall Y \subseteq Z,\quad D_i(p') \cap Y \neq \emptyset$ を満たす入札者 $i \in X$ の数 $\geq |Y|$

を使って

② $D_i(p') \cap Y \neq \emptyset$ を満たす入札者 $i \in B$ の数 $\geq |Y|$ 　を証明する

[証明]　$Y_1 = Y \cap Z, Y_2 = Y \setminus Z$ とおくと, (a), (b) より

$D_i(p') \cap Y_1 \neq \emptyset$ を満たす入札者 $i \in B \setminus X$ の数 $\geq |Y_1|$

$D_i(p') \cap Y_2 \neq \emptyset$ を満たす入札者 $i \in X$ の数 $\geq |Y_2|$

$\therefore D_i(p') \cap Y \neq \emptyset$ を満たす入札者 $i \in B$ の数

$\geq D_i(p') \cap Y_1 \neq \emptyset$ を満たす入札者 $i \in B \setminus X$ の数

$+ D_i(p') \cap Y_2 \neq \emptyset$ を満たす入札者 $i \in X$ の数

$\geq |Y_1| + |Y_2| = |Y|$ ■

条件(a), (b): 証明の準備

価格 p→p' の変化による, 2部グラフの枝の変化（これから証明）

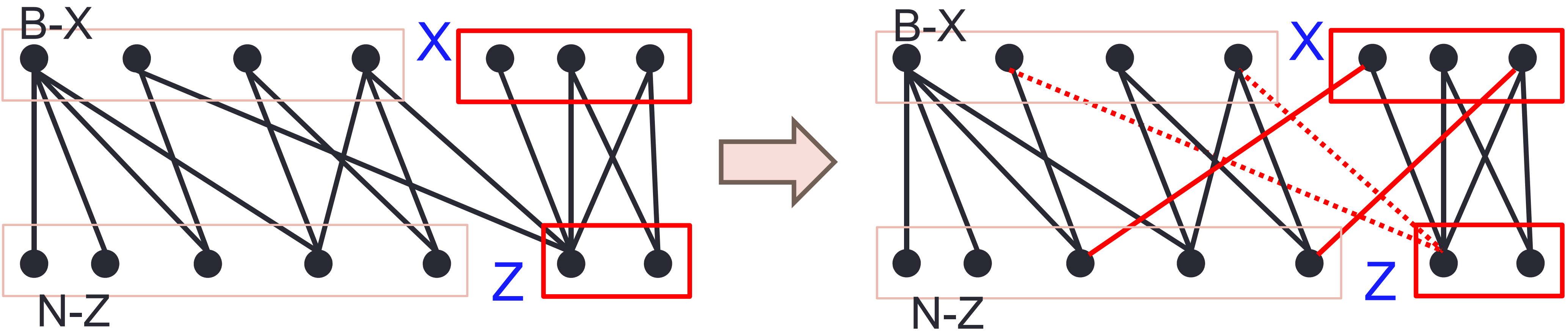
(i) B – X と Z を結ぶ枝は消える

(ii) B-XとN-Z の間の枝は不変

(iii) X と Z の間の枝は不変

(iv) 価格 p のとき, X と N – Z を結ぶ枝は存在しない

(v) 価格が p' に増えると， X と N – Z を結ぶ枝は現れる可能性あり



条件(a), (b): 証明の準備

(i) B – X と Z を結ぶ枝は消える　(ii) B-XとN-Z の間の枝は不変

[証明] Xの定義より，i∈B-X ←→ $D_i(p) \not\subseteq Z$

よって i∈B-X は N-Z の中に最大利得の財 j* をもつ

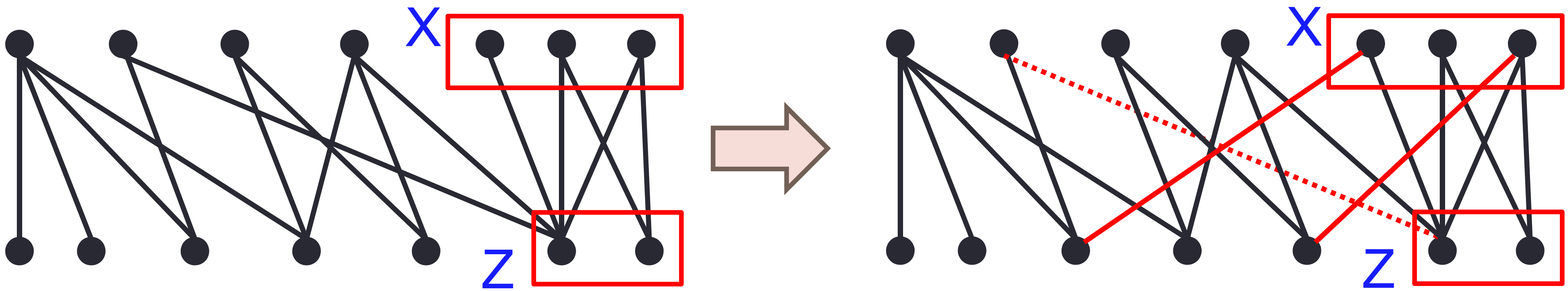
$$\therefore\ v(i,j^*) - p(j^*) = \max_{h \in N \setminus Z}\{v(i,h) - p(h)\} \geq \max_{h \in Z}\{v(i,h) - p(h)\}$$

p→p' のとき, Z の中の財のみ価格増加 → 利得減少

$$\therefore\ v(i,j^*) - p'(j^*)\ >\ \max_{h \in Z}\{v(i,h) - p'(h)\}\quad \therefore\ \text{(i) 成立}$$

N – Z の財は価格不変

→ N – Z の中での利得最大の財は不変　∴ (ii) 成立



条件(a), (b): 証明の準備

(iii) X と Z の間の枝は不変
(iv) 価格 p のとき，X と N – Z を結ぶ枝は存在しない
(v) 価格が p' に増えると，X と N – Z を結ぶ枝は現れる可能性あり
[証明] i∈X に対し，価格 p における最大利得の財は
すべて Z に含まれる（$D_i(p) \subseteq Z$） ➔ (iv)

$$\therefore \max_{h\in N}\{v(i,h)-p(h)\} = \max_{h\in Z}\{v(i,h)-p(h)\}$$
$$> \max_{h\in N\setminus Z}\{v(i,h)-p(h)\}$$

よって Z の価格増加後 (p → p') は

$$\max_{h\in N}\{v(i,h)-p'(h)\} = \max_{h\in Z}\{v(i,h)-p'(h)\}$$
$$\geq \max_{h\in N\setminus Z}\{v(i,h)-p'(h)\}$$

∴ i∈X の最大利得だった財 in Z は，利得最大のまま（∴ (iii)）
N-Z の財も利得最大になる可能性あり（∴ (v)）

不等式(a)の証明

Y⊆N-Z に対し，価格 p’ のときに Y に隣接するB-Xの頂点数 ≧ |Y|

[証明]

- 前述のグラフの性質 (ii),(iv),(v) より，

  価格 p’ のときに Y に隣接するB−X 内の頂点数

  ≧価格 p のときに Y に隣接するB−X 内の頂点数

- グラフの性質 (iv)より，

  価格 p のときに Y に隣接する B−X 内の頂点数

  ＝価格 p のときに Y に隣接するBの頂点数

- 仮定より，価格 p のときに条件②が成り立つ

  ∴ 価格 p のときに Y に隣接する頂点数 ≧ |Y|

以上の不等式，等式より，所望の不等式が得られる． ■

不等式(b)の証明

Y⊆Z に対し，価格 p’ のときに Y に隣接する Xの頂点数 ≧ |Y|

[証明]

グラフの性質 (iii) より，

価格 p’ のときに Y に隣接する X 内の頂点数

＝ 価格 p のときに Y に隣接する X 内の頂点数

以下，価格 p のときに Y に隣接する X 内の頂点数 ≧ |Y|　を証明

[(Case 2-1) Y=Zの場合]

X の定義より，価格 p のとき，各 i∈X は Z に隣接

∴価格 p のときに Z に隣接する X 内の頂点数= |X| > |Z|=|Y|

Zが①に違反することより

不等式(b)の証明（つづき）

[(Case 2-2) Y⊂Zの場合]

価格 p のとき, Z は ($D_i(p) \subseteq Z$ を満たす入札者 $i \in B^+$ の数) − |Z|

を最大にする. 複数存在する場合は, 極小なもの

∴ 任意の Z'⊂Z に対し,

($D_i(p) \subseteq Z'$ を満たす入札者 $i \in B^+$の数) − |Z' | < |X| - |Z|

Z'=Z−Y, X' = ($D_i(p) \subseteq Z-Y$ を満たす入札者 $i \in B^+$の集合)　　とおく

➔ |X'|−|Z'| < |X|−|Z|

さらに X'⊆X（∵ $D_i(p) \subseteq Z' \subseteq Z$）

X と X' の定義より, 各 i∈X-X' に対し $D_i(p) \not\subseteq Z'$, $D_i(p) \subseteq Z$

∴各 i∈X-X' は Z - Z' = Y の中に利得最大の財をもつ（i はYに隣接）

∴ Y に隣接する X 内の頂点数 ≧|X|-|X'| > |Z|-|Z'|=|Z|-|Z-Y|=|Y|

■

極小均衡価格の計算

- 紹介したアルゴリズムは，実は極小均衡価格を求める
  - 極小均衡価格の必要十分条件を使って証明

定理: 価格ベクトル p は均衡価格

⇔ ① $\forall Z \subseteq N$: $D_i(p) \subseteq Z$ を満たす入札者 $i \in B^+$の数 $\leq |Z|$

② $\forall Y \subseteq N^+$: $D_i(p) \cap Y \neq \emptyset$ を満たす入札者 $i \in B$の数 $\geq |Y|$

定理: 価格ベクトル p は極小均衡価格

⇔ ① $\forall Z \subseteq N$: $D_i(p) \subseteq Z$ を満たす入札者 $i \in B^+$の数 $\leq |Z|$

②' $\forall Y \subseteq N^+$: $D_i(p) \cap Y \neq \emptyset$ を満たす入札者 i∈B の数 $>$ $|Y|$

前述の証明をよく見ると，条件②' を示している

∴アルゴリズムの出力は極小均衡価格

離散凸解析との繋がり

離散凸解析の立場からの理解

単一需要モデルの均衡価格を求める

競り上げオークション

→ ある種のL♮凸関数最小化に対する

変数値増加型(最急)降下法　とみなせる

価格ベクトルが均衡であるための必要十分条件①, ②

→ L♮凸関数最小化における最適性条件

L♮凸関数の定義

命題:連続関数 $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ は凸関数

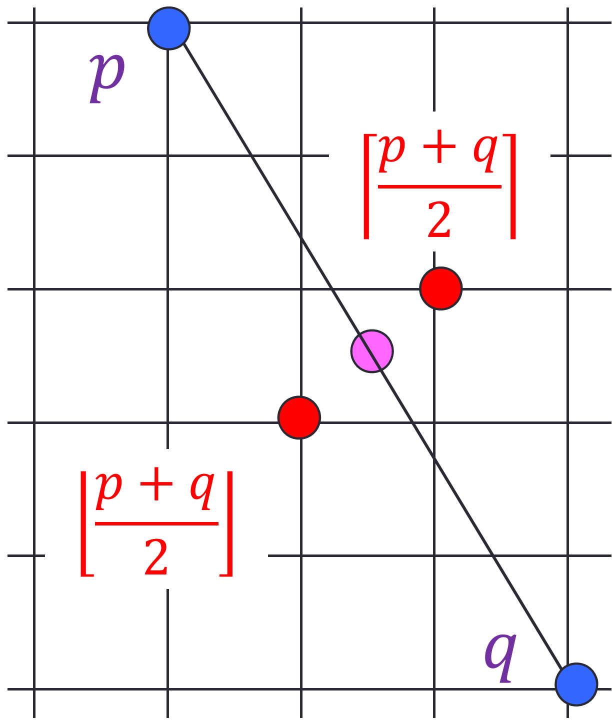
⟷ 中点凸性:$\forall p, q \in \mathbb{R}^n,\ \ g(p) + g(q) \geq 2g\left(\frac{p+q}{2}\right)$

定義: $g: \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$はL♮凸関数

⟷ 離散中点凸性: $\forall p, q \in \mathbb{Z}^n$,

$$g(p) + g(q) \geq g\left(\left\lceil \frac{p+q}{2} \right\rceil\right) + g\left(\left\lfloor \frac{p+q}{2} \right\rfloor\right)$$

[藤重-室田2000] [Favati-Tardella 1990]



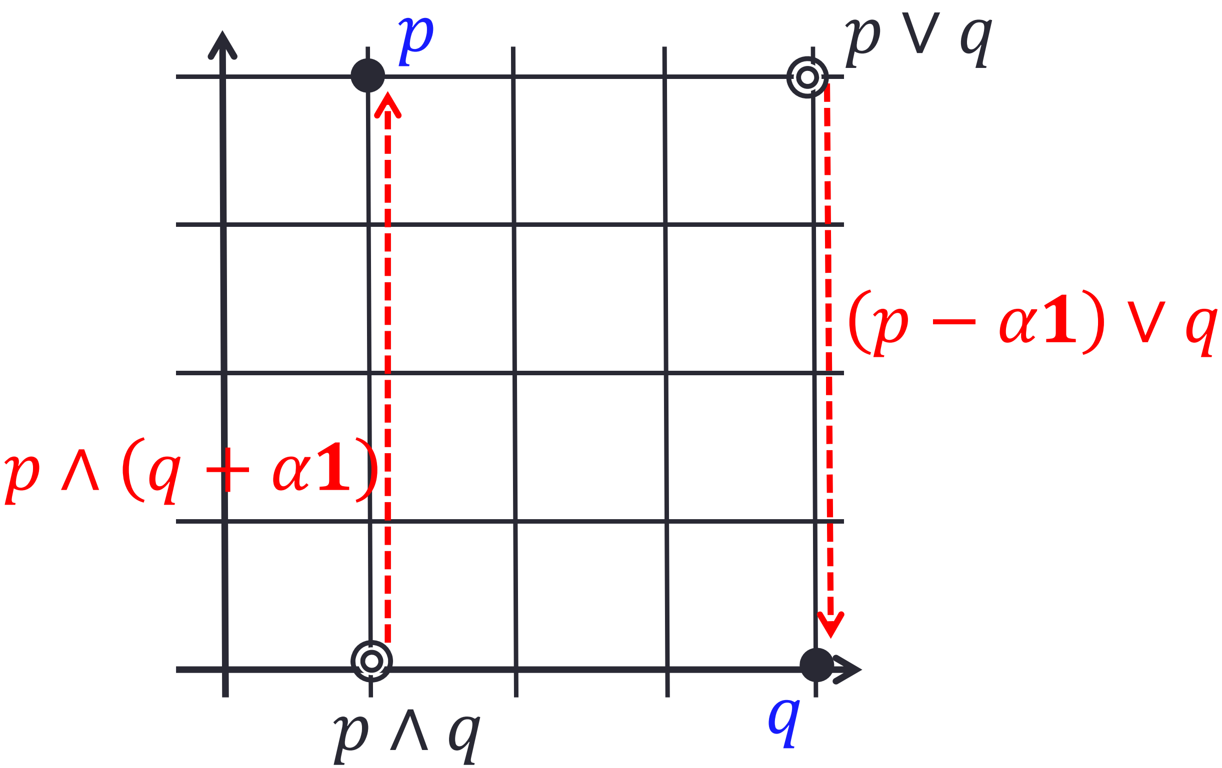
L♮凸関数の並進劣モジュラ性

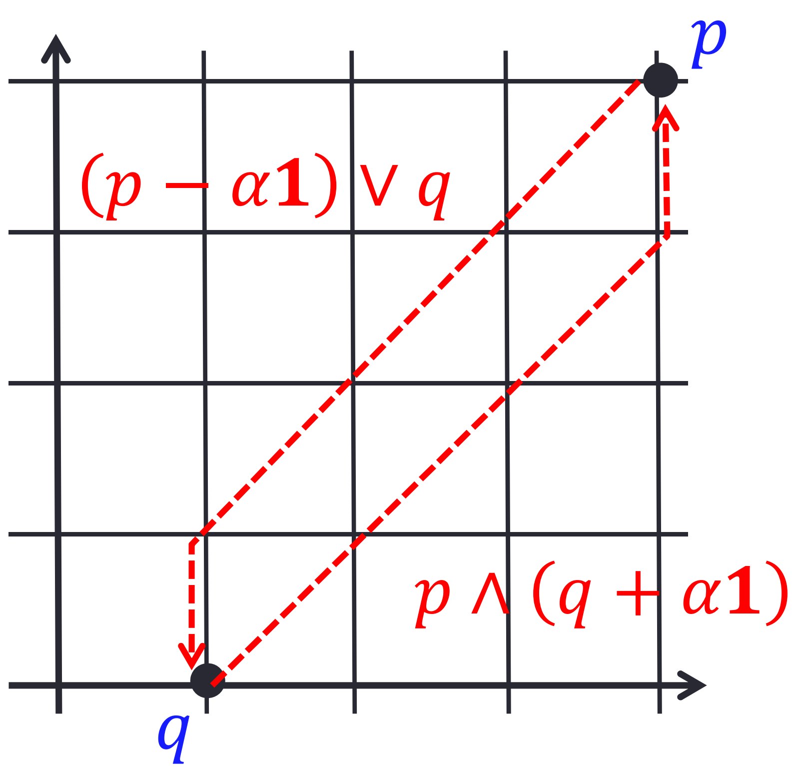
本来の定義

定理: $g: \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ はL♮凸関数 [藤重-室田2000]

⟺ 並進劣モジュラ $\forall p, q \in \mathbb{Z}^n, \alpha \in \mathbb{Z}_+$:

$$g(p) + g(q) \geq g(p \wedge (q + \alpha\mathbf{1})) + g((p - \alpha\mathbf{1}) \vee q)$$





均衡価格とL♮凸関数最小化

- 均衡価格を求める問題は，L♮凸関数最小化と見なせる

定理　財の価格 p(j) は
均衡価格 ←→ 最大重みマッチングの双対問題の最適解（の一部）

最小化　$\sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$

条件　$q(i) + p(j) \geq v(i,j) \quad (\forall i, \forall j)$

$q(i) \geq 0 \quad (\forall i)$

$p(j) \geq 0 \quad (\forall j)$

L♮凸関数

最小化　$\boxed{g(p) \equiv \sum_{i \in B} \max\left[0, \max_j \{v(i,j) - p(j)\}\right] + \sum_{j \in N} p(j)}$

条件　$p(j) \geq 0 \quad (\forall j \in N)$

$\because\ g_i(p) = \max\left[0, \max_j \{v(i,j) - p(j)\}\right]$ はL♮凸．　L♮凸は和で閉じている．

L♮凸関数最小化の最適性条件

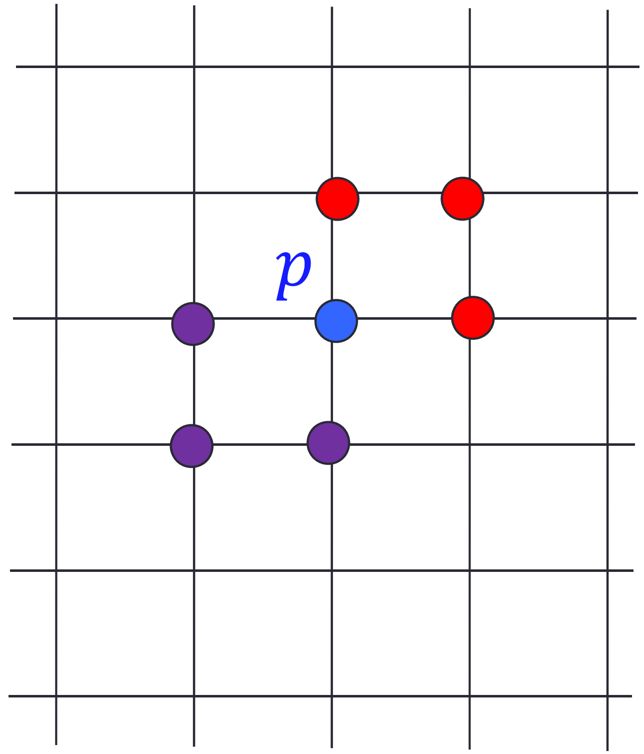
定理(最適性条件): [室田1998]

p はL♮凸関数 g の最小解 $\quad g(p) \leq g(q)\ (\forall q \in \mathbb{Z}^n)$

$\Leftrightarrow$ p は局所最小解:

$$g(p) \leq g(p + \chi_Z), \quad g(p) \leq g(p - \chi_Y) \quad (\forall Z, Y \subseteq N)$$

最適性条件に基づく
様々な(最急)降下法が提案される



均衡価格の条件と局所最適性

命題: $g(p) \equiv \sum_{i \in B} \max\left[0, \max_j \{v(i,j) - p(j)\}\right] + \sum_{j \in N} p(j)$ のとき,

ベクトルpの局所最適性 $g(p) \leq g(p + \chi_Z)$, $g(p) \leq g(p - \chi_Y)$

⇔ 均衡価格の条件①, ②

① $\forall Z \subseteq N$, $D_i(p) \subseteq Z$ を満たす入札者 $i \in B^+$の数 $\leq |Z|$

② $\forall Y \subseteq N^+$, $D_i(p) \cap Y \neq \emptyset$ を満たす入札者 $i \in B$ の数 $\geq |Y|$

∴ 関数 g の降下方向 ←→ ①, ②に違反する集合

（証明）関数 g の定義より,

$g(p + \chi_Z) - g(p)$

= −（$D_i(p) \subseteq Z$ を満たす入札者 $i \in B'$ の数）＋ $|Z|$

$g(p - \chi_Y) - g(p)$

= −（$D_i(p) \cap Y \neq \emptyset$ を満たす入札者 $i \in B$ の数）＋ $|Y|$ ■

極小最小解の条件

定理:
p はL♮凸関数 g の最小解
⇔ $g(p) \leq g(p+\chi_Z)$, $g(p) \leq g(p-\chi_Y)$ $(\forall Z, Y \subseteq N)$

定理
p はL♮凸関数 g の極小最小解
⇔ $g(p) \leq g(p+\chi_Z)$, $g(p) < g(p-\chi_Y)$ $(\forall Z, Y \subseteq N)$

∵ 最小解の特徴付けと並進劣モジュラ性を使う ■

上記の定理より，極小均衡価格の特徴付けが得られる

命題: $g(p) \equiv \sum_{i\in B} \max\left[0, \max_j\{v(i,j) - p(j)\}\right] + \sum_{j\in N} p(j)$ のとき，

ベクトル p は極小最小解 ⇔ 均衡価格の条件①, ②'

競り上げオークションと最急降下法

競り上げオークション → 関数 g の増加型最急降下法
- 非負象限 $\mathbb{Z}^n_+$ で定義されたL♮凸関数に適用可
- $g(p) \leq g(p - \chi_Y)$ $(Y \subseteq N)$ を満たしつつ，
  $g(p) \leq g(p + \chi_Z)$ $(Z \subseteq N)$ を満たすようにする

アルゴリズム GreedyUp

Step 0: $p \coloneqq (0, \dots, 0)$.

Step 1: $g(p) \leq g(p + \chi_Z)$ $(Z \subseteq N)$ ➔ 終了

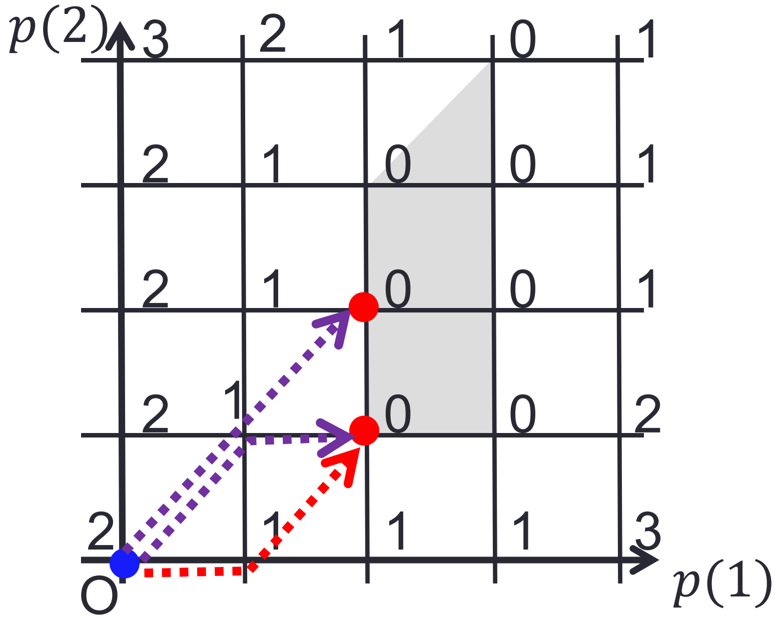
Step 2: 最急降下方向 $+\chi_{Z^*} \in \arg\min g(p + \chi_Z)$

（の中で極小なもの）を計算． $p{:}= p + \chi_{Z^*}$とおき，Step 1 へ

$\|p^*\|_\infty$ 最小の最小解 p^* を出力．　反復回数＝ $\|p^*\|_\infty$

[室田-塩浦-Yang (2013)]

増加型最急降下法の実行例



アルゴリズム GreedyUp

Step 0: $p := (0, \ldots, 0)$.

Step 1: $g(p) \leq g(p + \chi_Z)\ \ (Z \subseteq N)$ ➔ 終了

Step 2: 最急降下方向 $+\chi_{Z^*} \in \arg\min g(p + \chi_Z)$

（の中で極小なもの）を計算． $p := p + \chi_{Z^*}$とおき，Step 1 へ

GreedyUpの正当性

鍵となる性質

命題: ある反復において $g(p) \le g(p - \chi_Y)$ $(Y \subseteq N)$ 成立
➔ $\tilde{p} = p + \chi_{Z^*}$ に対し $g(\tilde{p}) \le g(\tilde{p} - \chi_Y)$ $(Y \subseteq N)$

L♮凸関数は (a) 区間への制限に関して閉じている (b) 劣モジュラ
を使って証明

（証明）仮定より, p は区間$(-\infty, p]$において局所的最小➔大域的最小
$\tilde{p}$ が条件を満たさないと仮定 ➔ $\tilde{p}$ は区間$(-\infty, \tilde{p}]$において大域的最小ではない
$p^* =$ 区間$(-\infty, \tilde{p}]$における大域的最小解（のうち極大なもの） とおく➔ $p^* \ne \tilde{p}$
L♮凸関数は劣モジュラなので, $g(p^*) + g(p) \ge g(p^* \vee p) + g(p^* \wedge p)$
$p^* \vee p \le \tilde{p},\ p^* \wedge p \le p$ より $g(p^* \vee p) \ge g(p^*)$, $g(p^* \wedge p) \ge g(p)$
3つの不等式より $g(p^* \vee p) = g(p^*)$.
p^*の極大性より $p \le p^* (\le \tilde{p})$ ∴ $\exists Z \subset Z^*$: $p^* = p + \chi_Z$
∴ $g(p^*) = g(p + \chi_Z) \ge g(p + \chi_{Z^*}) = g(\tilde{p})$ となり, p^* の選び方に矛盾. ■

GreedyUpが極小最小解を求めることの証明

命題: ある反復において $g(p) < g(p - \chi_Y)$ $(Y \subseteq N)$ 成立
➔ $\tilde{p} = p + \chi_{Z^*}$ に対し $g(\tilde{p}) < g(\tilde{p} - \chi_Y)$ $(Y \subseteq N)$

（証明）直前のスライドの命題より, $\tilde{p}$ は区間$(-\infty, \tilde{p}]$において最小解
$\tilde{p}$ が条件を満たさないと仮定 ➔ある非空な $Y \subseteq N$ に対し $g(\tilde{p}) = g(\tilde{p} - \chi_Y)$
つまり, $\tilde{p} - \chi_Y$も区間$(-\infty, \tilde{p}]$において最小解
(i) $Y \setminus Z^* \neq \emptyset$ のとき: $p^* \equiv \tilde{p} - \chi_Y$ とおく.
L♮凸関数は劣モジュラなので, $g(p^*) + g(p) \geq g(p^* \vee p) + g(p^* \wedge p)$
$p^* \vee p \leq \tilde{p}$, $p^* \wedge p \leq p$ より $g(p^* \vee p) \geq g(p^*)$, $g(p^* \wedge p) \geq g(p)$
3つの不等式より $g(p^* \wedge p) = g(p)$. また, $Y \setminus Z^* \neq \emptyset$ から $p^* \wedge p \neq p$
仮定より p は区間$(-\infty, p]$において極小最小解 ∴ $g(p^* \wedge p) > g(p)$ ←矛盾.
(ii) $Y = Z^*$ のとき: $\tilde{p} - \chi_Y = p$ かつ $+\chi_{Z^*}$ は降下方向なので
$g(\tilde{p}) = g(p + \chi_{Z^*}) < g(p) = g(\tilde{p} - \chi_Y)$ となり矛盾.
(iii) $Y \subset Z^*$ のとき: $\tilde{p} - \chi_Y = p + \chi_Z$ $(\exists Z \subset Z^*)$ かつ
$g(p + \chi_{Z^*}) = g(\tilde{p}) = g(\tilde{p} - \chi_Y) = g(p + \chi_Z)$ となり, Z^* の選び方に矛盾. ■

離散凸解析の有り難み

- L♮凸関数最小化アルゴリズムの正当性を使うことで,
  競り上げオークションの正当性の別証明を与えた.

- マッチングを用いた元の証明より「容易」
  - 示すべきこと: g がL♮凸性を満たすこと
    劣モジュラ性
    区間の制限に関して閉じていること
    最適性条件

- 抽象化により, 本質的な部分が明確になる.

- 様々な問題に適用可能

複数需要モデルの
競り上げオークションの
証明で役立つ

文献情報

- T. Andersson, C. Andersson, A.J.J. Talman: Sets in excess demand in simple ascending auctions with unit-demand bidders, Annals of Operations Research 211 (2013) 27-36
- G. Demange, D. Gale, M. Sotomayor: Multi-item auctions, Journal of Political Economy 94 (1986) 863-872
- P. Favati, F. Tardella: Convexity in nonlinear integer programming, Ricerca Operativa 53 (1990) 3-44
- S. Fujishige, K. Murota: Notes on L-/M-convex functions and the separation theorems, Mathematical Programming 88 (2000) 129-146
- J.-P. Mo, P.-S. Tsai, S.-C. Lin: Pure and minimal overdemanded sets: a note on Demange, Gale and Sotomayor, Discussion Paper No. 8808, Institute of Economics, Academia Sinica, Taipei, Taiwan 1988.
- K. Murota: Discrete convex analysis, Mathematical Programming 83 (1998) 313-371
- K. Murota, A. Shioura, Z. Yang: Time bounds for iterative auctions: a unified approach by discrete convex analysis, Discrete Optimization 19 (2016) 36-62
- J.K. Sankaran: On a dynamic auction mechanism for a bilateral assignment problem, Mathematical Social Sciences 28 (1994) 143-150