複数需要モデル：
均衡を厳密に計算するアルゴリズム

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

均衡を厳密に計算する

- 評価値の情報を陽に使わず極小均衡価格を厳密に計算
- 使える情報：価格 $p = (p(1), p(2), \dots, p(n))$ を提示

→入札者は利得最大の財集合の族 $D_i(p)$ を答える

アルゴリズム（競り上げオークション）

1. 競売人：各財の初期価格=0
2. 各入札者： 暫定価格の下で $D_i(p)$ を報告
3. 競売人：入札者全員に（重複無く）最も欲しい財を

配分可能 ➔ 終了．現在の価格は均衡価格

配分不可能 ➔ 暫定価格を適切に変更

単一需要モデルの競り上げオークション

p は均衡価格 ←→ 以下を満たす財の配分が存在

- 入札者 i に財 j が配分される → $j \in D_i(p)$
- 入札者 $i \in B^+ \equiv \{i \in B |$利得最大値$> 0\}$ には財の割当あり
- 財 $j \in N^+ \equiv \{j \in N | \, p(j) > 0\}$ は割り当てあり

$$\Updownarrow$$

① [供給十分]

$\forall Z \subseteq N$: $D_i(p) \subseteq Z$ を満たす入札者 $i \in B^+$の数 $\leq |Z|$

② [需要十分]

$\forall Y \subseteq N^+$: $D_i(p) \cap Y \neq \emptyset$ を満たす入札者 $i \in B$ の数 $\geq |Y|$

競り上げオークションの方針:

条件②を満たしつつ，①に違反する Z を減らすよう，価格を増やす

（需要十分 → 需要を減らしていく）

均衡価格の必要十分条件

定義：財集合 $Z \subseteq N$ に対し， $\mu_i(Z;p) \equiv \min\{|X \cap Z| \mid X \in D_i(p)\}$

$\rho_i(Z;p) \equiv \max\{|X \cap Z| \mid X \in D_i(p)\}$

入札者 i が利得最大の財集合を得るとき，

Z から受け取る財の最小数と最大数

例： $D_i(p) = \{\{12\},\{24\},\{34\},\{123\},\{234\}\}$ のとき，

$$\mu_i(\{134\};p) = |\{12\} \cap \{134\}| = 1,$$

$$\mu_i(\{13\};p) = |\{34\} \cap \{13\}| = 0,$$

$$\rho_i(\{134\};p) = |\{34\} \cap \{134\}| = 2,$$

$$\rho_i(\{13\};p) = |\{34\} \cap \{34\}| = 2$$

均衡価格の必要十分条件

定義: 財集合 $Z \subseteq N$ に対し， $\mu_i(Z;p) \equiv \min\{|X \cap Z| \mid X \in D_i(p)\}$

$\rho_i(Z;p) \equiv \max\{|X \cap Z| \mid X \in D_i(p)\}$

入札者 i が利得最大の財集合を得るとき，

Z から受け取る財の最小数と最大数

定理: ある財の配分 $(X_0, X_1, \ldots, X_m)$ が存在して

$X_i \in D_i(p)\ (i = 1, \ldots, m)$ かつ $p(j) = 0\ (\forall j \in X_0)$

$\Updownarrow$

① [供給十分] $\forall Z \subseteq N$: $\sum_{i \in B} \mu_i(Z;p) \leq |Z|$

② [需要十分] $\forall Y \subseteq N^+$: $\sum_{i \in B} \rho_i(Y;p) \geq |Y|$

条件①，②の意味

① $\forall Z \subseteq N$:　　$|Z| \geq \sum_{i \in B} \mu_i(Z; p)$

$\Leftrightarrow$ 互いに素な $X_i \in D_i(p)$ $(i = 1, \ldots, m)$ が存在

② $\forall Y \subseteq N^+$:　　$\sum_{i \in B} \rho_i(Y; p) \geq |Y|$

$\Leftrightarrow$ $\bigcup_{i=1}^{m} X_i \subseteq N^+$ を満たす $X_i \in D_i(p)$ $(i = 1, \ldots, m)$ が存在

競り上げオークションの概要

① [供給十分] $\forall Z \subseteq N$:　$\sum_{i \in B} \mu_i(Z;p) \leq |Z|$
② [需要十分] $\forall Y \subseteq N^+$:　$\sum_{i \in B} \rho_i(Y;p) \geq |Y|$

考え方

②を満たしつつ，①に違反する Z を減らす

- 価格$p = (0,0,\ldots,0)$のとき，$N^+ = \emptyset$　∴ ②成立
- ①に違反するZ ⇔ Z の財を欲しい入札者が多すぎる
  ∴ Z の価格を増やし，欲しい入札者を減らす

Z の選び方

- 不足分 $\sum_{i \in B} \mu_i(Z;p) - |Z|$ が最大の Z(の中で極小)
  ➔②は満たされたまま

※ 極小な均衡価格を求めるとき，Zの極小性が必要

アルゴリズムの実行例(1-1)

- 入札者a: 重み和(①:2, ②:4, ③:3, ④:1, ⑤:5)
- 入札者b: 財集合(①:2, ②:5, ③:1, ④:4, ⑤:3)の中の上位2つの財に依存
- 入札者c: 財の数に依存(1つ:4, 2つ:7, 3つ:10, 4つ:12, 5つ:13)

- 初期価格 (0,0,0,0,0)
  - a の需要集合 = {1,2,3,4,5} のみ
  - b の需要集合 = {2,4} を含む任意の財集合
  - c の需要集合 = {1,2,3,4,5} のみ
- Z= {1,2,3,4,5} とすると，不足分が最大 5+2+5-5=7
- 価格 (1,1,1,1,1)
  - a の需要集合 = {1,2,3,5}, {1,2,3,4,5}
  - b の需要集合 = {2,4} のみ
  - c の需要集合 = {1,2,3,4,5} または要素数4の任意の財集合
- Z = {1,2,3,4,5} とすると，不足分が最大 4+2+4-5=6

アルゴリズムの実行例(1-2)

- 入札者a: 重み和(①:2, ②:4, ③:3, ④:1, ⑤:5)
- 入札者b: 財集合(①:2, ②:5, ③:1, ④:4, ⑤:3)の中の上位2つの財に依存
- 入札者c: 財の数に依存(1つ:4, 2つ:7, 3つ:10, 4つ:12, 5つ:13)

- 価格 (2,2,2,2,2)
  - a の需要集合 = {2,3,5}, {1,2,3,5}
  - b の需要集合 = {2,4} のみ
  - c の需要集合 =要素数3または4の任意の財集合
- Z = {2,3,4,5} とすると，不足分が最大 3+2+2-4=3
- 価格 (2,3,3,3,3)
  - a の需要集合 = {2,5}, {1,2,5}, {2,3,5}, {1,2,3,5}
  - b の需要集合 = {2,4} のみ
  - c の需要集合 = {1}を含む，要素数1,2または3の任意の財集合
- Z = {2} とすると，不足分が最大 1+1+0-1=2

アルゴリズムの実行例(1-3)

- 入札者a: 重み和(①:2, ②:4, ③:3, ④:1, ⑤:5)
- 入札者b: 財集合(①:2, ②:5, ③:1, ④:4, ⑤:3) の中の上位2つの財に依存
- 入札者c: 財の数に依存(1つ:4, 2つ:7, 3つ:10, 4つ:12, 5つ:13)

- 価格 (2,4,3,3,3)
  - a の需要集合 = {5}を含み{4}を含まない，任意の財集合
  - b の需要集合 = {2,4} のみ
  - c の需要集合 = {1}を含み{2}を含まない，要素数1, 2または3の任意の財集合
- 全ての Z に対し，不足数≦0
- X_a={5}, X_b={2,4}, X_c={1,3} は各入札者の利得最大の財集合
  → 均衡配分

定理 (p*(1),…,p*(n)): 極小均衡価格 とすると，アルゴリズムの反復回数＝$\max_j p^*(j)$

離散凸解析に基づく正当性の証明

証明の流れ

(1) 均衡価格の計算 → L♮凸関数最小化 へ帰着

(2) L♮凸関数の既知の結果より

- 最適性条件 → 均衡価格の必要十分条件①, ②
- 増加型最急降下法 → 競り上げオークション

鍵となる事実: M♮凹関数とL♮凸関数の共役性 [室田1998]

- 評価関数 $v_i: 2^N \to \mathbb{Z}$ はM♮凹

  $\Leftrightarrow g_i(p) \equiv \max_{X \subseteq N}\{v_i(X) - p(X)\}$ はL♮凸
- $g_i(p+\chi_Z), g_i(p-\chi_Y)$ は $D_i(p) \equiv \arg\max_{X \subseteq N}\{v_i(X) - p(X)\}$ を

  使って表現可能

均衡価格の計算とL♮凸関数最小化

総評価値最大化の双対

最適解←→均衡価格

最小化　$\sum_{i \in B} q(i) + p(N)$

条件　$q(i) + p(Y) \geq v_i(Y) \quad (\forall i \in B, \forall Y \subseteq N)$

$p(j) \in \mathbb{Z}_+ \ (\forall j \in N),\ \ q(i) \in \mathbb{Z}_+ \ \ (\forall i \in B)$

関数最小化に書き換え

最小化　$g(p) \equiv \sum_{i \in B} \max_{Y \subseteq N} \{v_i(Y) - p(Y)\} + p(N)$

条件　$p \in \mathbb{Z}_+^n$

定理　関数 g はL♮凸

$\because\ g_i(p) \equiv \max_{Y \subseteq N} \{v_i(Y) - p(Y)\}$ はL♮凸. L♮凸は和で閉じている.

$\therefore$ 均衡価格の計算　→　L♮凸関数最小化

均衡価格の条件と局所最適性

命題: $g(p) = \sum_{i\in B} \max\{v_i(Y_i) - p(Y_i) | Y_i \subseteq N\} + p(N)$ のとき,
ベクトル p の局所最適性　　　均衡価格の条件

$g(p+\chi_Z) \geq g(p) \Leftrightarrow$ ① $\sum_{i\in B} \mu_i(Z;p) \leq |Z|$

$g(p-\chi_Y) \geq g(p) \Leftrightarrow$ ② $\sum_{i\in B} \rho_i(Y;p) \geq |Y|$

$\mu_i(Z;p) \equiv \min\{|X\cap Z| \mid X \in D_i(p)\}$

$\rho_i(Z;p) \equiv \max\{|X\cap Z| \mid X \in D_i(p)\}$

（証明）

$g_i(p) \equiv \max_{Y\subseteq N}\{v_i(Y) - p(Y)\}$ とおくと,

離散凸解析の共役性より

$$g_i(p+\chi_Z) - g_i(p) = \min\{|X\cap Z| \mid X \in D_i(p)\}\ (= \mu_i(Z;p))$$

$$g_i(p-\chi_Y) - g_i(p) = \max\{|X\cap Y| \mid X \in D_i(p)\}\ (= \rho_i(Y;p))$$

■

競り上げオークションと最急降下法

$g(p+\chi_Z) \geq g(p)$ ←→ ① $|Z| \geq \sum_{i \in B} \mu_i(Z;p)$

$g(p-\chi_Y) \geq g(p)$ ←→ ② $\sum_{i \in B} \rho_i(Y;p) \geq |Y|$

よって，GreedyUp を関数 g に特殊化

→ 競り上げオークション

アルゴリズム GreedyUp

Step 0: $p \coloneqq (0, \ldots, 0)$.

Step 1: $g(p) \leq g(p+\chi_Z)$ $(Z \subseteq N)$ → 終了

Step 2: 最急降下方向 $+\chi_{Z^*} \in \arg\min g(p+\chi_Z)$

（の中で極小なもの）を計算． $p := p + \chi_{Z^*}$とおき，Step 1 へ