組合せ最適化セミナー

2021-08-16

演習問題の解答（2021 年 8 月 6 日土谷講義分）

政策研究大学院大学

土谷　隆

[問題 1]

講義で取り上げた線形計画の ABGJ 例題について，基底形式を計算し，その特徴や $\bar{\chi}_A$，$\bar{\chi}^*_A$ の値について検討せよ．

[解答]

今のところ不明.

[問題 2]

対称行列 X の関数の $-\mathrm{logdet}(X)$ 関数の勾配が $-X^{-1}$ であることを示せ．また，ヘッセ行列が正定値であることを示すことにより，狭義凸関数であることを示せ．

[解答]

問題では対称行列の関数，と書いているが，より正確には正定対称行列の関数である．任意の対称行列 V について，

$$\frac{d}{dt}\mathrm{logdet}(X+tV) = -X^{-1}\bullet V = -\mathrm{Tr}(X^{-1}V)$$

となることを示す（題意からは曖昧であったかもしれないが，これが，勾配が $-X^{-1}$ であるということの意味である）．

(必ずしも対称とは限らない) 行列 Y の余因子行列 Δ を, その (j,i) 要素 Δ_{ji} が Y から i 行と j 列を除いた行列の行列式に $(-1)^{i+j}$ を掛けたものとして定義する．すると，

$$\det(Y) = \sum_j y_{ij}\Delta_{ji} (= (Y\Delta)_{ii})$$

となる．これより，

$$\frac{\partial \det(Y)}{\partial y_{ij}} = \Delta_{ji}$$

ここで，$(Y\Delta)_{ij}, i \neq j$ を考えると，これは

$$(Y\Delta)_{ij} = \sum y_{ik}\Delta_{kj} = \det(\widehat{Y}\Delta) = 0.$$

ここで，$\widehat{Y}$ は，Y の j 行を i 行で置き換えた行列で，j 行目と i 行目が同じものであるために，その行列式は 0 である．ゆえに

$$Y\Delta = \det(Y)I$$

となる．つまり, $\Delta = \det(Y)Y^{-1}$ が成立．これより，

$$-\frac{\partial \mathrm{logdet}(Y)}{\partial y_{ij}} = -(Y^{-T})_{ij} = \frac{\Delta_{ji}}{\det(Y)}$$

となる．

対称性を考慮して，ij 成分と ji 成分に 1 が入り他の成分は 0 の行列を E_{ij} $(i < j)$, ii 成分のみに 1 がはいった行列を E_{ii} として, 対称行列の空間に基底を入れると，任意の対称行列は,

$$X = \sum_{i \le j} x_{ij} E_{ij}$$

と表せる．すると，合成関数の微分公式より，

$$\frac{\partial \det(X)}{\partial x_{ij}} = \sum \frac{\partial \det(Y)}{\partial y_{ij}} \frac{\partial y_{ij}}{\partial x_{ij}} = X^{-1} \bullet E_{ij}$$

となる．これより，一般の対称行列 V 方向への方向微分は，$X^{-1} \bullet V$ となる．

2 回微分を計算するにあたっては，逆行列の方向微分が $YY^{-1} = I$ を微分して，

$$\frac{d}{dt} Y^{-1} = -Y^{-1}(\frac{d}{dt} Y) Y^{-1}$$

であることを使う．方向 2 回微分を考えて, X から V 方向に移動するとすると，

$$\frac{d^2}{dt^2} - \mathrm{logdet}(X + tV) = -\frac{d}{dt}(X + tV)^{-1} \bullet V = \mathrm{Tr}(X^{-1} V X^{-1} V) = \mathrm{Tr}((X^{-1/2} V X^{1/2})^2) > 0.$$

ここで，$X^{1/2}$ は 2 乗が X となる正定対称行列 (特異値分解から簡単に作れる) と $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(BCA)$ であることを使った．

[問題 3]

以下の方針で，半正定値計画問題 (P) と (D) が強実行可能であれば，最適値が存在し，両問題の最適値は一致することを示せ．なお，A_i は一次独立であるとしてよい．

1. (P) も (D) も等高実行可能集合は有界であることを示す．

2. 共通のパラメータ $\nu > 0$ を持つ最適化問題

$$\begin{array}{ll} (\mathrm{P}(\nu)) & \min\ C \bullet X - \nu \mathrm{logdet}(X), \mathrm{s.t.}\ \forall i\ A_i \bullet X = b_i,\ X \succeq 0 \\ (\mathrm{D}(\nu)) & \max b^T y + \nu \mathrm{logdet}(S),\ \mathrm{s.t.}\ C - \sum A_i y_i = S \succeq 0 \end{array}$$

が最適解を持ち，

$$XS = \nu I,\ \ \forall i\ A_i \bullet X = b_i,\ \mathrm{s.t.}\ S = C - \sum_i A_i y_i,\ X \succeq 0,\ S \succeq 0.$$

を満たす．

3. $X \bullet S = C \bullet X - \sum_i b_i y_i$ が成立する．

[解答]

1. (P) も (D) も等高実行可能集合は有界である．

   (解答) 等高実行可能集合は目的関数値が一定の実行可能解の集合である．(D) について示す．(P) が強実行可能なので，

   $$AX - tb_i = 0, \quad X \succ 0,\ t > 0$$

   なる t, X が存在する．したがって，Gordan の定理より，

   $$-b^T y \geq 0,\ \sum_i A_i y_i \geq 0$$

   は 0 以外の解を持たない．これより，目的関数値が一定の実行可能解の集合は有界．

2. 共通のパラメータ $\nu > 0$ を持つ最適化問題

   $$\begin{aligned}
   &(\mathrm{P}(\nu)) \qquad \min\ C \bullet X - \nu \mathrm{logdet}(X), \mathrm{s.t.}\ \forall i\ A_i \bullet X = b_i,\ X \succeq 0 \\
   &(\mathrm{D}(\nu)) \qquad \max b^T y + \nu \mathrm{logdet}(S),\ C - \sum A_i y_i = S \succeq 0
   \end{aligned}$$

   が最適解を持ち，

   $$XS = \nu I, \quad \forall i\ A_i \bullet X = b_i,\ S = C - \sum_i A_i y_i,\ X \succeq 0,\ S \succeq 0. \tag{1}$$

   を満たす．

   (解答)

   $(\mathrm{D}(\nu))$ に最適解が存在することを示す．$(\mathrm{D}(\nu))$ の目的関数を $g(y)$ と記す．$g(y)$ が上に有界であることを示す．もしそうでないと，$g(y^k) \to \infty$ である点列が存在する．$b^T y^k$ は有界なので，$\mathrm{logdet}(C - \sum A_i y_i^k) \to \infty$. これが起こるためには，$\|C - \sum A_i y_i^k\| \to \infty$ である必要がある．これより，$S^k = C - \sum A_i y_i^k$ として，$y^k/(S^k \bullet I)$ を考えると，この集積点 y^* は，

   $$b^T y^* = 0, \quad -\sum A_i y_i^* \succeq 0,\ -\sum A_i y_i^* \neq 0$$

   となる．これは，先に示したものと矛盾する．

   $g(y^k)$ が上に有界として，$g(y^k)$ が最大値に収束する点列 y^k を考える．この時，上と同様の議論により，y^k は有界である．さらに，$-\mathrm{logdet}(C - \sum_i A_i y_i)$ が有界であることより，その任意の集積点は内点である．勾配が 0 であることが最適性の上で必

要となる．故に，(D(ν)) は最適解を持つ．この最適解を y^* とし，$S_* = C - \sum A_i y_i^*$ とおく．すると,

$$A_i \bullet (\nu S_*^{-1}) = b_i, \quad C - \sum A_i y_i^* = S_*, \quad S_* \succeq 0$$

を満たす．一方, (P(ν)) の最適性条件は

$$C - \nu X^{-1} = \sum A_i \lambda_i, \ \forall\ i\ A_i \bullet X = b_i, \quad X \succeq 0$$

であるが，これは，$X = \nu S_*^{-1}$ とすると，$\lambda = y_i^*$ と置く事で満たされる．これが (1) を満たすことはほぼ自明である．

3. $X \bullet S = C \bullet X - \sum_i b_i y_i$ が成立する．

(解答) 簡単な代入計算で分かる．

1~3 に基づいて，半正定値計画問題 (P) と (D) が強実行可能であれば，最適値が存在し，両問題の最適値は一致することを示す．弱双対定理より, (P) の最適値が (D) の最適値以上である．一方，任意の $\nu > 0$ について，2,3 より，(P) と (D) の実行可能解で，$X \bullet S = C \bullet X - \sum b_i y_i = n\nu$ となるものが存在する．そのため，(P) の最適値と (D) の最適値が等しいことが簡単に背理法で示せる．

ここでは最適解が存在することを示すことまでは求めていないが，等高目的関数集合の有界性とコンパクト集合上の点列が集積点を持つことを用いると，最適解が存在することも示せる．

[問題４]

講義で紹介した Ramana による双対ギャップが 1 の半正定値計画問題を 2 つの非負のパラメータ ε, η で摂動した次の問題 (D(ε, η)) を考える．

$$\max\ (1+\eta)y_1 + \eta y_2 \text{ s.t. } \begin{pmatrix} 1+\varepsilon-y_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon - y_2 & -y_1 \\ 0 & -y_1 & \varepsilon \end{pmatrix} \succeq 0.$$

を考える．対応する主問題 (P(ε, η)) は,

$$\min\ (1+\varepsilon)x_{11} + \varepsilon x_{22} + \varepsilon x_{33} \ \text{ s.t. } x_{11} + 2x_{23} = 1+\eta,\ x_{22} = \eta,\ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{12} & x_{22} & x_{23} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{pmatrix} \succeq 0.$$

となる．$\varepsilon = \eta = 0$ 以外では，双対ギャップは 0 なので，共通の最適値が存在する．これを $v(\varepsilon, \eta)$ と書く．双対ギャップが 1 なので $v(0,0)$ は定義されないが，$\alpha \geq 0, \beta \geq 0, (\alpha, \beta) \neq 0$ として,

$$\lim_{t \downarrow 0} v(t\alpha, t\beta)$$

を求めよ．

[解答]

$(\mathrm{D}(\varepsilon,\eta))$ は以下の問題と同値.

$$\max\ (1+\eta)y_1+\eta y_2\ \ \text{s.t. } 1+\varepsilon-y_1\geq 0,\quad \varepsilon(\varepsilon-y_2)-y_1^2\geq 0.$$

目的関数が線形なので，少なくとも 1 つの不等式制約が等式で満たされる．そこで以下の 3 つに分岐することにする.

$$\begin{aligned}
&(\text{Case 1})\ \max\ (1+\eta)y_1+\eta y_2\ \ \text{s.t. } 1+\varepsilon-y_1=0,\quad \varepsilon(\varepsilon-y_2)-y_1^2\geq 0.\\
&(\text{Case 2})\ \max\ (1+\eta)y_1+\eta y_2\ \ \text{s.t. } 1+\varepsilon-y_1\geq 0,\quad y_1=\sqrt{\varepsilon(\varepsilon-y_2)}.\\
&(\text{Case 3})\ \max\ (1+\eta)y_1+\eta y_2\ \ \text{s.t. } 1+\varepsilon-y_1\geq 0,\quad y_1=-\sqrt{\varepsilon(\varepsilon-y_2)}.
\end{aligned}$$

(Case 1)

この場合，2 つ目の制約より次が成立.

$$\varepsilon-\frac{(1+\varepsilon)^2}{\varepsilon}\geq y_2.$$

$y_1=1+\varepsilon$ を考慮すると，線形計画となる．これを解いて,

$$v_1(\varepsilon,\eta)\equiv(1+\eta)(1+\varepsilon)+\eta\varepsilon-\frac{\eta(1+\varepsilon)^2}{\varepsilon}.$$

を得る.

(Case 2)

この場合, 目的関数が次のように書ける.

$$f(y_2)\equiv(1+\eta)\sqrt{\varepsilon(\varepsilon-y_2)}+\eta y_2.$$

微分してこの関数が

$$y_2=\varepsilon-\frac{\varepsilon(1+\eta)^2}{4\eta^2} \tag{2}$$

と

$$\sqrt{\varepsilon(\varepsilon-y_2)}=\frac{\varepsilon(1+\eta)}{2\eta}. \tag{3}$$

を満たす時に最大であることがわかる．すると,

$$f(y_2)=\varepsilon\eta+\frac{\varepsilon}{4\eta}(1+\eta)^2. \tag{4}$$

を得るが，この最大値は，次の制約を無視している：

$$1+\varepsilon-y_1=1+\varepsilon-\sqrt{\varepsilon(\varepsilon-y_2)}\geq 0.$$

(2) と (3) をこの制約に代入して, (4) は

$$1+\varepsilon-\frac{\varepsilon(1+\eta)}{2\eta}\geq 0, \text{あるいは同値な}, \ \frac{2\eta}{1-\eta}\geq\varepsilon \tag{5}$$

が満たされる場合のみに最大値をとることがわかる.

もし (5) が成立しなければ, $f(y_2)$ の最大値は $1+\varepsilon-y_1\geq 0$ の境界となる, つまり y_2 は次の条件を満たす.

$$1+\varepsilon=\sqrt{\varepsilon(\varepsilon-y_2)}.$$

この方程式を y_2 について解いて,

$$y_2=-2-\frac{1}{\varepsilon},\ y_1=1+\varepsilon,\quad f(y_2)=(1+\eta)(1+\varepsilon)-\eta\left(2+\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

を得る. 結局 (Case 2) の最大値は次のようになる:

$$v_2(\varepsilon,\eta)\equiv\varepsilon\eta+\frac{\varepsilon}{4\eta}(1+\eta)^2\ \text{ if }\frac{2\eta}{1-\eta}\geq\varepsilon, \tag{6}$$

$$v_2(\varepsilon,\eta)\equiv(1+\eta)(1+\varepsilon)-\eta\left(2+\frac{1}{\varepsilon}\right)\ \text{ if }\frac{2\eta}{1-\eta}\leq\varepsilon \tag{7}$$

(Case 3)

この場合，$1+\varepsilon-y_1\geq 0$ が自明に成立するので，最大化問題は,

$$\max -(1+\eta)\sqrt{\varepsilon(\varepsilon-y_2)}+\eta y_2.$$

を $y_2\leq\varepsilon$ の条件下で解くことになる. この関数は単調増加なので，最大値は $y_2=\varepsilon$ の時に達成されて，最大値は

$$v_3(\varepsilon,\eta)\equiv\eta\varepsilon.$$

これらを合わせて，$\tilde{v}$ を評価する. $\varepsilon=t\alpha, \eta=t\beta$ with $t>0$ として $t\downarrow 0$ とすると，以下を得る.

(Case 1) $\lim_{t\downarrow 0}v_1(t\alpha,t\beta)=0$.

(Case 2) $\lim_{t\downarrow 0}v_2(t\alpha,t\beta)=\frac{\alpha}{4\beta}$ if $\frac{\beta}{\alpha}\geq\frac{1}{2}$, $\lim_{t\downarrow 0}v_2(t\alpha,t\beta)=1-\frac{\beta}{\alpha}$ if $\frac{\beta}{\alpha}\leq\frac{1}{2}$

(Case 3) $\lim_{t\downarrow 0}v_3(t\alpha,t\beta)=0$.

これらの最大値が $\tilde{v}$ となるが (Case 2) がいつも最大となる. つまり,

$$\tilde{v}(\beta)=1-\beta\ (\beta\in[0,\frac{1}{2}]),\quad \tilde{v}(\beta)=\frac{1}{4\beta}\ (\beta\in[\frac{1}{2},\infty)),\quad \tilde{v}(\infty)=0$$

となる. 以上.

[問題 5]

(P) が実行不能であるとし，(D) が強実行可能であるとする．この時目的関数の無限方向を求める問題

$$b^Ty=1 \text{ s.t. } -\sum A_iy_i\succeq 0 \tag{8}$$

の実行可能性について検討せよ．(この場合双対ギャップがないことに注意．)

[解答]

次の制約条件を持つ半正定値計画を考える.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} y_0 + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} y_1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} y_0 \succeq 0.$$

ここで，y_1 の最大化問題を考えると，y_0 についての無限方向は存在しないが，y_1 を十分に大きくとった上で，y_0 を非常に大きくとれば，常に半正定値条件を満たすことができるので，いくらでも y_1 を大きくする解が存在する．このように，目的関数を無限に大きくできるのに，目的関数を厳密に増大させるような無限方向は存在しない，というちょっと直観に反する？例となっている．さらに，この問題が強実行可能であることも容易に分かる（y_1 を十分に大きくとり，さらに y_0 を半正定値性が保証されるだけ大きくとれば良い）． 実は，この時，主問題は，弱実行不能となる.

一方，もし y_0 の最大化問題を考えると，y_0 についての無限方向は自明に存在する．この時，主問題は強実行不能となる.

これが一般的に言える，ということを以下に示すこと，つまり「(D) が強実行可能である，という条件下では，無限方向を求める問題 (8) のの実行可能性と弱実行不能性が，それぞれ，対応する (P) の強実行不能性と弱実行不能性に対応する.」を示すことはよい練習問題ではあるが，むしろ上の例題が教訓的で本質的であると思うので，ここで止めておく.

[問題 6]

線形計画問題に対して強多項式アルゴリズムが存在するとすればどのような可能性があるか検討せよ．

[解答] ここに書くにはスペースが足りない:-).

[問題 7]

半正定値計画問題の経済的意味づけが何かできないか検討せよ．

[解答] 今のところ不明. 考えてみて何かわかったら教えて下さい:-).