組合せ最適化セミナー

2021-08-06

演習問題

政策研究大学院大学

土谷　隆

[問題 1]

講義で取り上げた線形計画の ABGJ 例題について，基底形式を計算し，その特徴や $\bar{\chi}_A$，$\bar{\chi}_A^*$ の値について検討せよ．

[問題 2]

対称行列 X の関数の $-\mathrm{logdet}(X)$ 関数の勾配が $-X^{-1}$ であることを示せ．また，ヘッセ行列が正定値であることを示すことにより，狭義凸関数であることを示せ．

[問題 3]

以下の方針で，半正定値計画問題 (P) と (D) が強実行可能であれば，最適値が存在し，両問題の最適値は一致することを示せ．なお，A_i は一次独立であるとしてよい．

1. (P) も (D) も等高実行可能集合は有界であることを示す．
2. 共通のパラメータ $\nu > 0$ を持つ最適化問題

$$\begin{array}{ll} (\mathrm{P}(\nu)) & \min\ C \bullet X - \nu \mathrm{logdet}(X), \mathrm{s.t.}\ \forall i\ A_i \bullet X = b_i,\ X \succeq 0 \\ (\mathrm{D}(\nu)) & \max b^T y + \nu \mathrm{logdet}(S),\ C - \sum A_i y_i = S \succeq 0 \end{array}$$

が最適解を持ち，

$$XS = \nu I,\ \ \forall i\ A_i \bullet X = b_i,\ \mathrm{s.t.}\ S = C - \sum_i A_i y_i,\ X \succeq 0,\ S \succeq 0.$$

を満たす．

3. $X \bullet S = C \bullet X - \sum_i b_i y_i$ が成立する．

[問題４]

講義で紹介した Ramana による双対ギャップが１の半正定値計画問題を２つの非負のパラメータ ε, η で摂動した次の問題 (D(ε, η)) を考える．

$$\max\ (1+\eta)y_1 + \eta y_2 \text{ s.t. } \begin{pmatrix} 1+\varepsilon-y_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon-y_2 & -y_1 \\ 0 & -y_1 & \varepsilon \end{pmatrix} \succeq 0.$$

を考える．対応する主問題 (P(ε, η)) は，

$$\min\ (1+\varepsilon)x_{11} + \varepsilon x_{22} + \varepsilon x_{33} \ \text{ s.t. } x_{11} + 2x_{23} = 1+\eta,\ x_{22} = \eta,\ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{12} & x_{22} & x_{23} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{pmatrix} \succeq 0.$$

となる．$\varepsilon = \eta = 0$ 以外では，双対ギャップは０なので，共通の最適値が存在する．これを $v(\varepsilon, \eta)$ と書く．双対ギャップが１なので $v(0,0)$ は定義されないが，$\alpha \geq 0, \beta \geq 0, (\alpha, \beta) \neq 0$ として，

$$\lim_{t \downarrow 0} v(t\alpha, t\beta)$$

を求めよ．

[問題５]

(P) が実行不能であるとし，(D) が強実行可能であるとする．この時目的関数の無限方向を求める問題

$$b^T y = 1 \text{ s.t. } -\sum A_i y_i \succeq 0$$

の実行可能性について検討せよ．(この場合双対ギャップがないことに注意．)

[問題６]

線形計画問題に対して強多項式アルゴリズムが存在するとすればどのような可能性があるか検討せよ．

[問題７]

半正定値計画問題の経済的意味づけが何かできないか検討せよ．