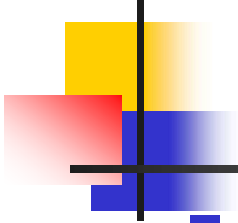


線形計画問題と半正定値計画問題への 幾何学的接近法

土谷 隆
(政策研究大学院大学)

RIMS 共同研究「組合せ最適化セミナー」(第18回)
2021年8月6日(8月16日修正)



土谷 隆

■ 経歴

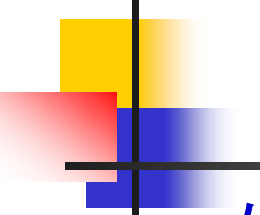
- 政策研究大学院大学(11年3ヶ月)
- 統計数理研究所(24年; 1986年4月から2010年3月まで. 修士卒で入所(古き良き時代).)

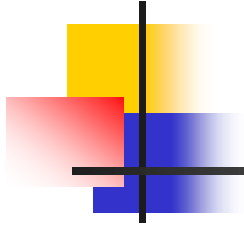
■ 研究分野

- 計算推論(統計数理・数理工学)

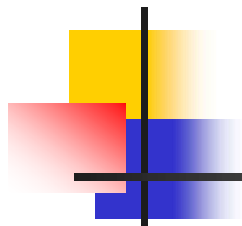
■ モデリング・数理・アルゴリズム

- 凸最適化アルゴリズムの設計・解析・活用
- 内点法アルゴリズムの情報幾何

- 
- 信号処理・統計科学のアルゴリズムと活用
 - マウス動画画像解析
 - リニアモーターカー磁気シールド設計
 - 海洋データ同化(エルニーニョ予測)
 - メソポタミア粘土板データ解析(古代都市人口推定)
 - 夏季電力最大需給量の解析
 - パラグアイ農業政策(大豆生産と灌漑)
 - 新型コロナ感染症の感染拡大と社会的制御



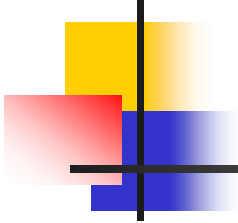
モデリング・数理・アルゴリズム



モデリング・数理・アルゴリズム

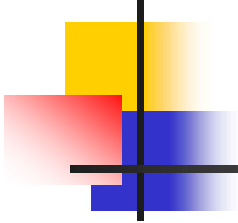
物理学・数学・情報科学

統計科学の研究者は人の三倍勉強しないといけない
(赤池弘次先生)



第一部：線形計画問題

- 凸錐上の線形計画問題と応用
- 内点法
- Vavasis-Ye のアルゴリズムと層別最小二乗法
- 曲率積分と反復回数
- 内点法の情報幾何
- 代数幾何・トロピカル幾何と中心曲線



(古典的)線形計画問題

$\min c^T x$ (主問題)

s.t. $Ax = b, x \geq 0, A \in R^{m \times n}, b \in R^n, c \in R^m$

$\max b^T y$ (双対問題)

s.t. $s = c - A^T y, s \geq 0$

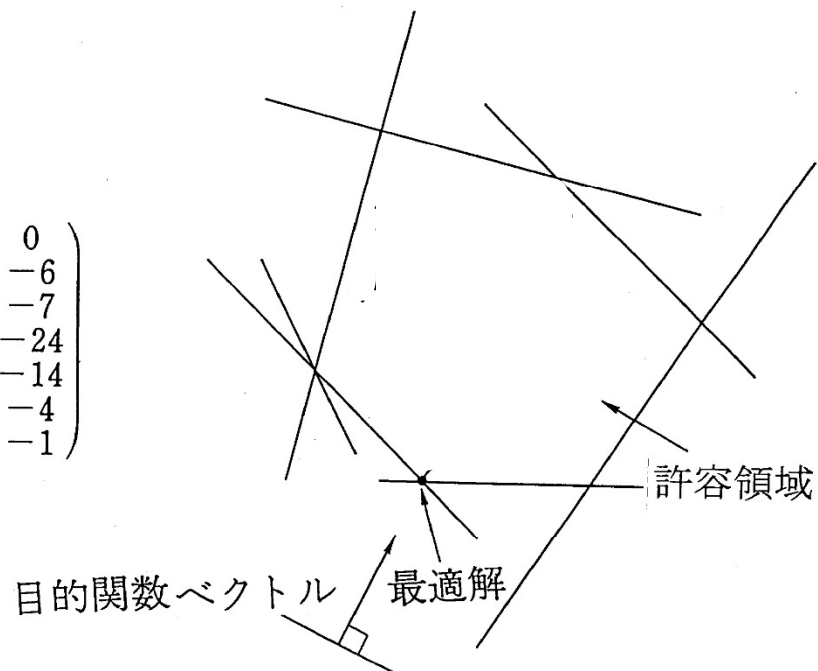
$$\boxed{A} \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline b \\ \hline \end{array}$$

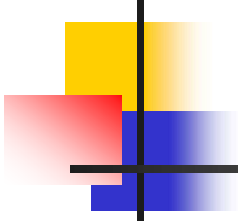
多面体上での線形関数の最適化

線形計画問題

$$\min (0.5 \ 1.0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

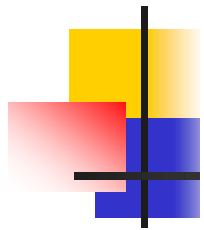
$$\text{subject to } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \\ -1 & -1 \\ -1 & -4 \\ 4 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -7 \\ -24 \\ -14 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$



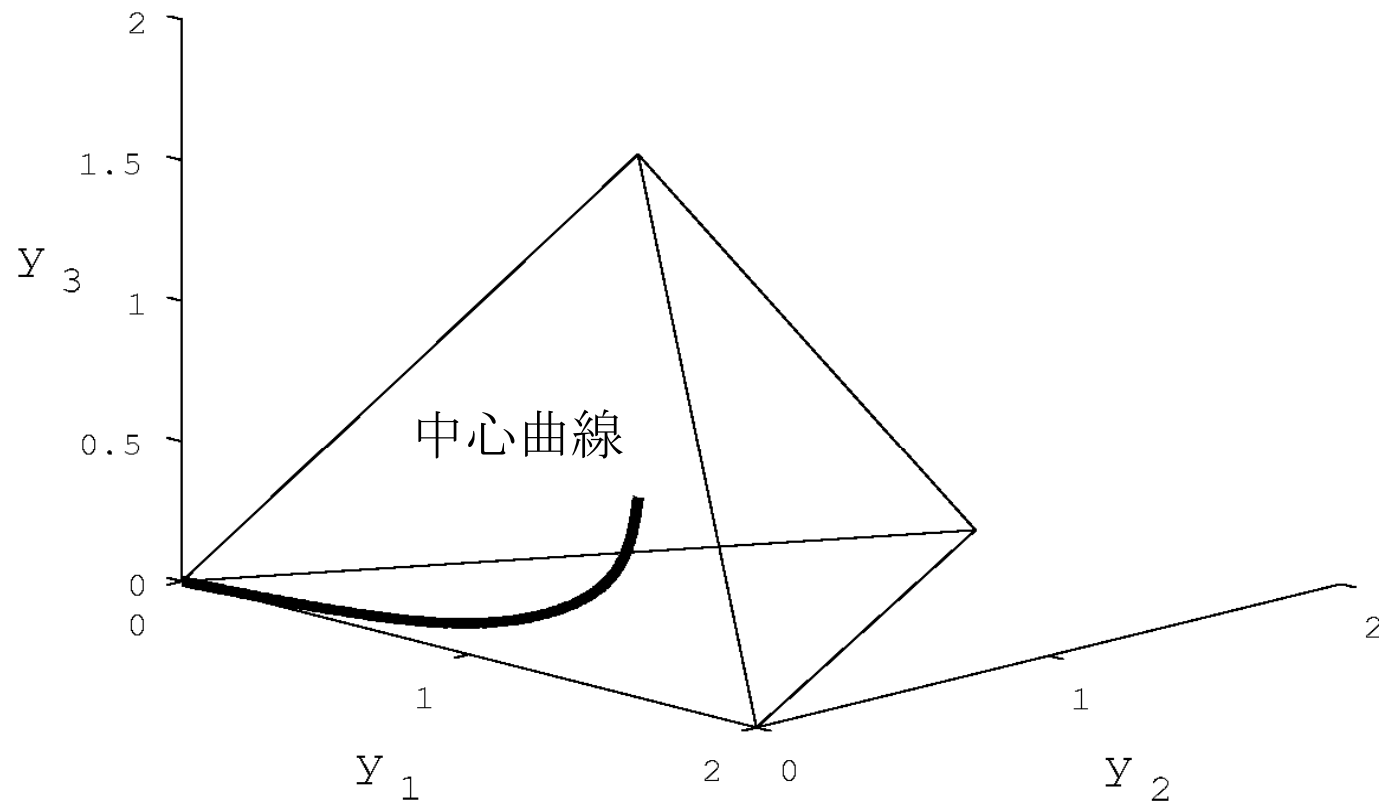


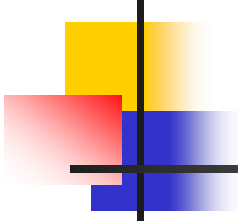
(多項式時間)内点法

- 凸計画問題を、中心曲線と呼ばれる曲線を離散的に辿りながら解く.
- Karmarkar (1984) が発見, 最適化分野に一大変革をもたらす.
- 主双対内点法(小島・水野・吉瀬、田邊(1987)): 日本で発明され世界で使われているアルゴリズム



Example





凸錐上の線形計画問題

$$\min c^T x \quad (\text{主問題})$$

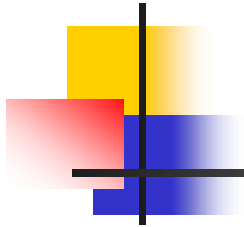
$$\text{s.t.} \quad Ax = b, \quad x \in C, \quad A \in R^{m \times n}, b \in R^n$$

$$\max b^T y \quad (\text{双対問題})$$

$$\text{s.t.} \quad s = c - A^T y, \quad s \in C^*,$$

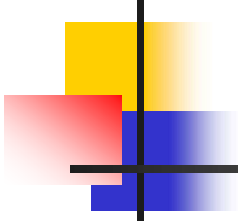
C : Closed Convex cone,

C^* : Cone dual to C .



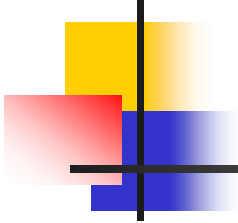
- 凸錐とは、凸な(つまり凹みのない)錐。
- 凸錐 C の双対錐 C^* とは次のような集合:
(C の任意の要素と鋭角となる。)

$$C^* = \{s | s^T x \geq 0 \text{ for all } x \in C\}.$$



特長

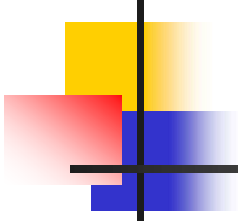
- (主問題の最適値) = (双対問題の最適値)
- もし C が対称錐ならば, 多項式主双対内点法により、十分に大きな問題を高速にそれなりに安定して解ける.



対称錐計画問題

- 対称錐: $C = C^*$ (+等質性)
- 線形計画問題 (C: 第一象限)
- 2次錐計画問題 (C: 2次錐)
- 半正定値計画問題 (C: 半正定値対称行列)

これらの問題は内点法で多項式時間で求解可能.
凸2次計画問題など, 目的関数が凸2次の場合も
この枠組みで扱える.



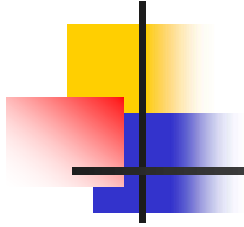
半正定値計画問題

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum b^T y \\ \text{s.t.} \quad & Z = C - \sum_{i=1}^m A_i y_i, \end{aligned}$$

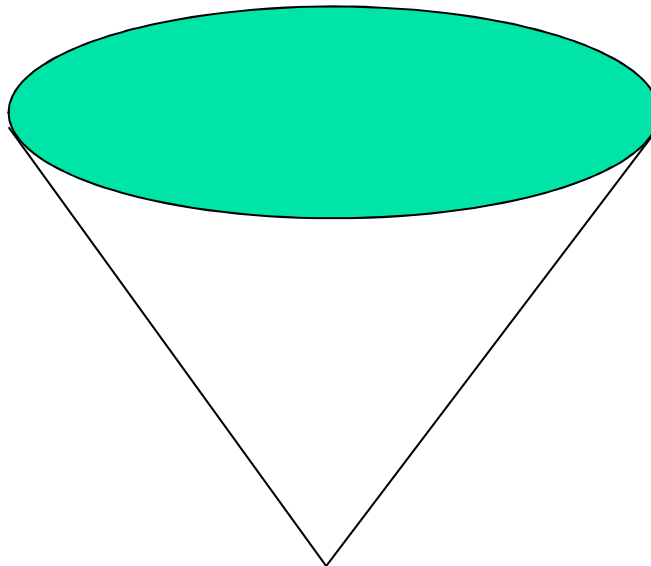
$$Z \succeq 0,$$

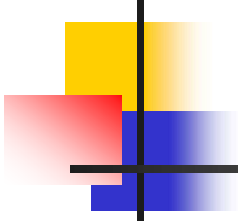
↑

Z は半正定値対称行列



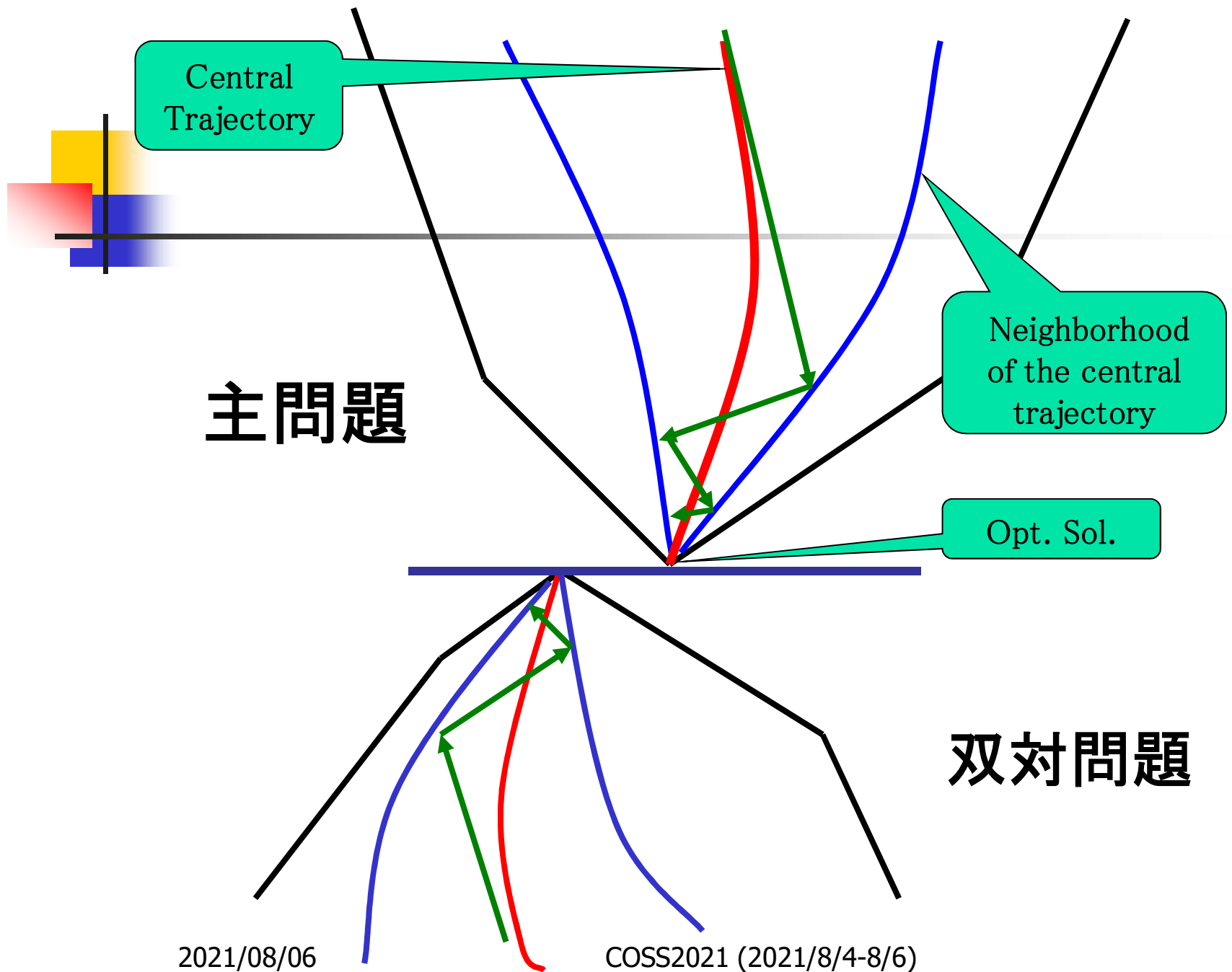
2次錐の自画像

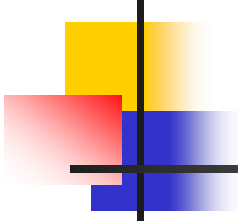




主双対内点法

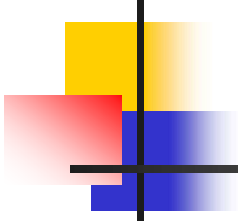
- 中心曲線をユークリッド的ジョルダン代数を用いて双一次方程式として表現.
- 問題のスケーリングに対する対称性を生かしたスケーリング付きニュートン法を用いた多項式アルゴリズム.





ソ連における線形計画の展開 (1960年代)

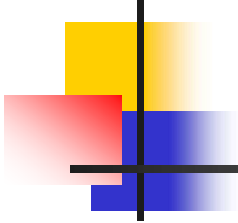
- 計画経済
- 物の値段を市場に頼らずに決めたい
- 線形計画モデル(Kantorovich)
- 利潤(売上)最大化問題のシャドウプライス
(双対問題の最適解)で物の値段(価値)
が決まる
- 双対問題の最適解を推定したい



線形計画問題

	カレーライス	スパニッシュオムレツ	材料の総量
価格	400円/1人前	350円/1人前	
豚肉	50g/1人前	40g/1人前	10Kg
ジャガイモ	50g/1人前	80g/1人前	12Kg
にんじん	30g/1人前	10g/1人前	5Kg
たまねぎ	50g/1人前	30g/1人前	8Kg

材料制約の下で売り上げを最大にするには、カレーとオムレツを
いくつつつ作ればいいのか？



レストラン売り上げ最大化問題

最大化

$$400x + 350y$$

条件

$$50x + 40y \leq 10000$$

$$50x + 80y \leq 12000$$

$$30x + 10y \leq 5000$$

$$50x + 30y \leq 8000$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

双対問題

— 解かずに最大売り上げを推定する —

最大化

$$400x + 350y$$

条件

$$50x + 40y \leq 10000$$

$$50x + 80y \leq 12000$$

$$30x + 10y \leq 5000$$

$$50x + 30y \leq 8000$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

双対問題

— 解かずに最大売り上げを推定する —

最大化

$$400x + 350y$$

条件

$$50x + 40y \leq 10000$$

条件式の一つ
(豚肉制約)

$\times 9$

$$450x + 360y \leq 90000.$$

双対問題

— 解かずに最大売り上げを推定する —

最大化

$$400x + 350y$$

条件

~~$$0 \times (50x + 40y) \leq 0 \times 10000$$~~

$$4 \times (50x + 80y) \leq 4 \times 12000$$

$$7 \times (30x + 10y) \leq 7 \times 5000$$

~~$$0 \times (50x + 30y) \leq 0 \times 8000$$~~

$\Rightarrow$

$$410x + 390y \leq 48000 + 35000 = 83000$$

双対問題

— 解かずに最大売り上げを推定する —

一般化

最大化

$$400x + 350y$$

条件

$$s \times (50x + 40y) \leq 10000s$$

$$t \times (50x + 80y) \leq 12000t$$

$$u \times (30x + 10y) \leq 5000u$$

$$v \times (50x + 30y) \leq 8000v$$

$\Rightarrow$

$$400\text{以上ならOK} \rightarrow (50s + 50t + 30u + 50v)x$$

$$350\text{以上ならOK} \rightarrow \begin{aligned} &+ (40s + 80t + 10u + 30v)y \\ &\leq 10000s + 12000t + 5000u + 8000v. \end{aligned}$$

双対問題

— 解かずに最大売り上げを推定する —

双対問題

一元の問題の最大値の一番良い推定値を求める問題—

最小化 $10000s + 12000t + 5000u + 8000v$

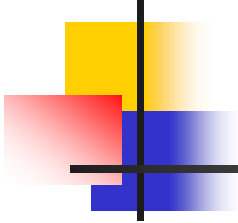
条件 $50s + 50t + 30u + 50v \geq 400$

$$40s + 80t + 10u + 30v \geq 350$$

$$s \geq 0, t \geq 0, u \geq 0, v \geq 0.$$

元の問題と双対問題の最適値は一致する！

元問題の最適解: カレー112人分、スパニッシュオムレツ80人分、最大売り上げ72800円



経済学との関係

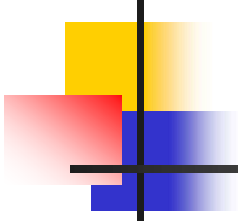
ものの値段がどう決まるか？

s, t, u, v : 肉、じゃがいも、たまねぎ、にんじんの価格
皆競争していて市場価格だとすると下記が成立する筈.

$$50s + 50t + 30u + 50v \geq 400$$

$$40s + 80t + 10u + 30v \geq 350$$

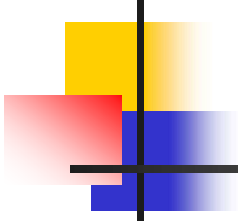
もし成立していないと, 潜在的な競争相手が現れて市場原理でカレーやスパニッシュオムレツの価格が下がる.



売り上げ最大化の双対問題の意味

- レストランを買収しようとする投資家の問題(できるだけ安く！)

最小化	$10000s + 12000t + 5000u + 8000v$
条件	$50s + 50t + 30u + 50v \geq 400$
	$40s + 80t + 10u + 30v \geq 350$
	$s \geq 0, t \geq 0, u \geq 0, v \geq 0.$



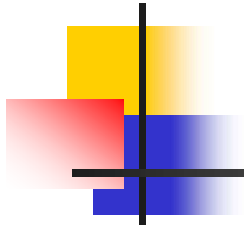
線形計画問題の相補性条件

- 最適性: 双対ギャップ=0

$$c^T x - b^T y = 0$$

$$Ax = b, \quad x \geq 0,$$

$$c - A^T y = s, \quad s \geq 0.$$

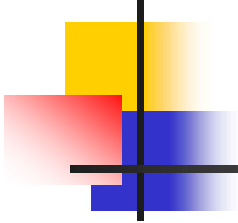


$$\begin{aligned}c^T x - b^T y &= x^T (c - A^T y) \\ &= x^T s \geq 0. \quad (x \geq 0, \quad s \geq 0).\end{aligned}$$

$$x^T s = 0, \quad x \geq 0, \quad s \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$x_i s_i = 0 \text{ for all } i.$$



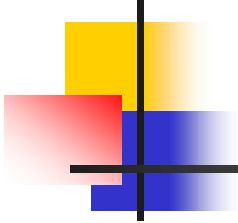
線形計画問題の相補性条件

- 最適性:

$$x_i s_i = 0 \text{ for all } i$$

$$Ax = b, \quad x \geq 0,$$

$$c - A^T y = s, \quad s \geq 0.$$



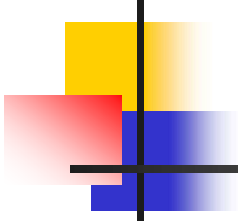
線形計画問題の相補性条件

- 最適性:

$$\sum (x_i s_i)^2 = 0$$

$$Ax = b, \quad x \geq 0,$$

$$c - A^T y = s, \quad s \geq 0.$$



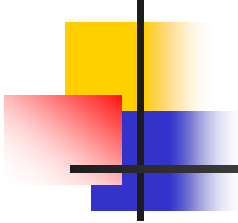
双対推定(Dikin)

- $Ax = b, \quad x > 0 : \text{given}$

双対変数 s を適切に推定したい。相補性条件より、下記のような重み付き最小二乗法で推定する。

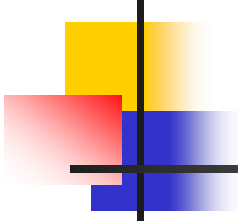
$$\min \sum_i (x_i s_i)^2$$

$$\text{subject to } c - A^T y = s.$$



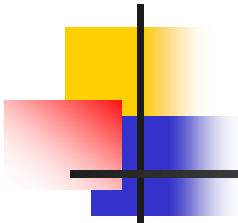
双対推定(Dikin, Kantorovich)

実際にこのような考えで、農作地の地代が
推定されている



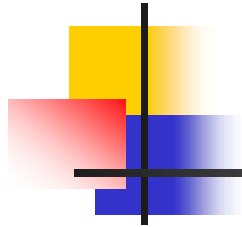
アフィンスケーリング法

- 双対推定をちょっと細工すると、主問題に対する降下方向(目的関数値を小さくする方向)が求められる
- この探索方向を用いるのが、世界最初の内点法である、アフィンスケーリング法(Dikin 1967年)
- アフィンスケーリング法の収束性の証明は(Tsuchiya, Muramatsu 1995) で与えられた。



重みつき最小二乗法

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}$$



条件数

χ_A

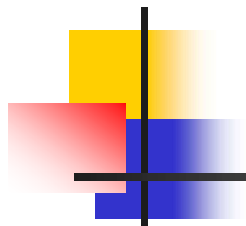
- 定義

$$\chi_A \equiv \max\{\|A_B^{-1}\| :$$

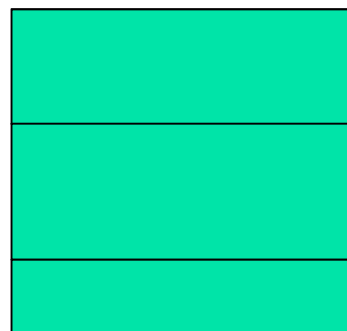
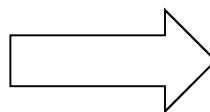
$A_B : \text{invertible } n \times n$

submatrix of $A\}$

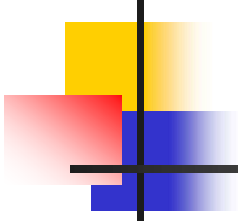
n : A の列数 (A : 列一次独立)



A



A_B (正則)



条件数

 $\bar{\chi}_A$

- 定義

(広義)基底行列

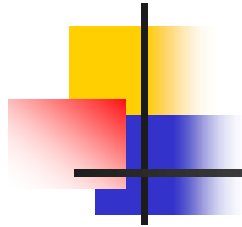
$$\bar{\chi}_A \equiv \max\{\|A_B^{-1}A\| :$$

$A_B : \text{invertible } n \times n$

submatrix of $A\}$

n : A の列数 (A : 列一次独立)

$$\log \bar{\chi}_A = O(L_A)$$



条件数

χ_A

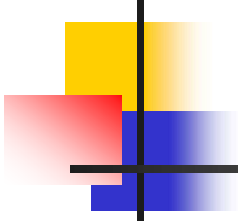
- 定義

$$\chi_A \equiv \max\{\|A_B^{-1}\| :$$

$A_B : \text{invertible } n \times n$

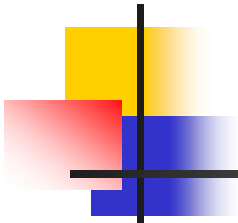
submatrix of $A\}$

n : A の列数 (A : 列一次独立)



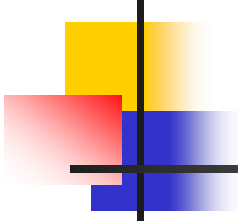
普通の最小二乗法

$$\begin{aligned} \min_x \|Ax - b\|^2 \\ = \min_x \sum_{i=1}^n (a_i^T x - b_i)^2 \end{aligned}$$



重み付き最小二乗法

$$\min_x \sum_{i=1}^n d_i^2 (a_i^T x - b_i)^2$$

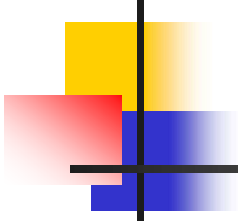


内点法の探索方向

重み付き最小二乗法

$$\min_x \sum_{i=1}^n d_i^2 (a_i^T x - b_i)^2$$

を解いて求める。最適解近辺では非常に悪条件

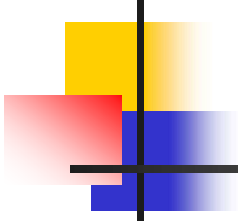


層別最小二乗法

■ ブロック重み付き最小二乗法

$$\min_x \sum_{i=1}^N d_i^2 \|A_i x - b_i\|^2$$

$$d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq 0$$

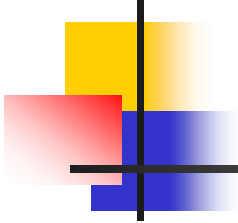


層別最小二乗法

$$\min_x \sum_{i=1}^N d_i^2 \|A_i x - b_i\|^2$$

$$\frac{d_1}{d_2}, \frac{d_2}{d_3}, \dots, \frac{d_{N-1}}{d_N} \rightarrow \infty$$

での重み付き最小二乗解の極限が存在する。
これを層別最小二乗解ということにする。



層別最小二乗解の計算 (N=2)

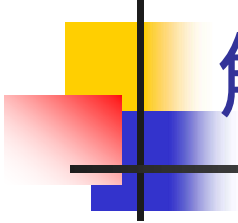
1.
$$\min_x \|A_1 x - b_1\|^2$$

を計算. 解を x_1 とする.

2. 条件 $A_1 \Delta x = 0$ の下で

$$\min_{\Delta x} \|A_2(x_1 + \Delta x) - b_2\|^2$$

を計算、 $x^* = x_1 + \Delta x$ が層別最小二乗解。



重み付き最小二乗解と層別最小二乗解の差の評価

- ブロック重み付き最小二乗解を与える行列

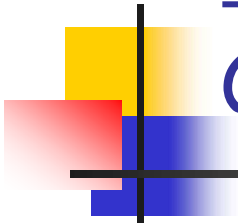
$$S_w(d_1, \dots, d_N)$$

- 層別最小二乗解を与える行列

$$S_L$$

- 隣り合う重みの比 d_{i+1}/d_i の最大のもの:

$$\tau$$



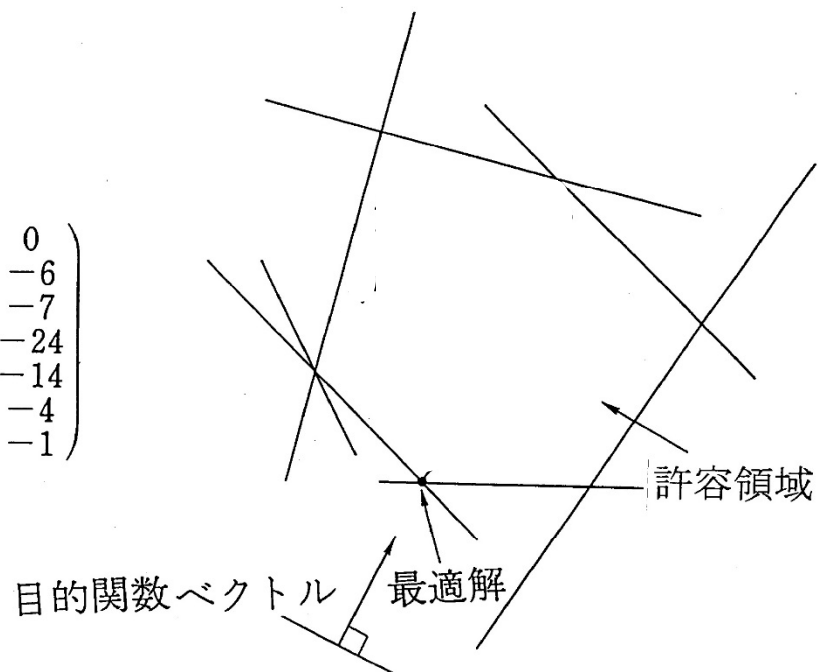
重み付き最小二乗解と層別最小二乗解 の差の評価（土谷、2005）

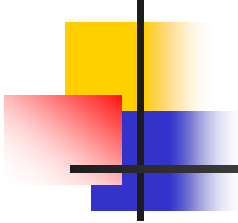
$$\begin{aligned} \|S_w(d_1, \dots, d_N) - S_L\| \\ \leq 10\chi_A \bar{\chi}_A^{N+3} \tau^2 \end{aligned}$$

線形計画問題

$$\min (0.5 \ 1.0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$\text{subject to } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \\ -1 & -1 \\ -1 & -4 \\ 4 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -7 \\ -24 \\ -14 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$





線形計画問題

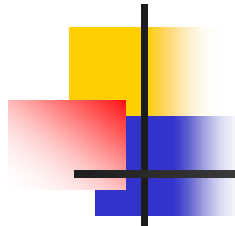
$$\min c^T x, \text{ s.t. } a_i^T x - b_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

中心曲線(下の問題の t を変えた時の最適解の集合)

$$\min \quad t c^T x - \sum_{i=1}^n \log(a_i^T x - b_i)$$

$t \rightarrow \infty$ で最適解に収束

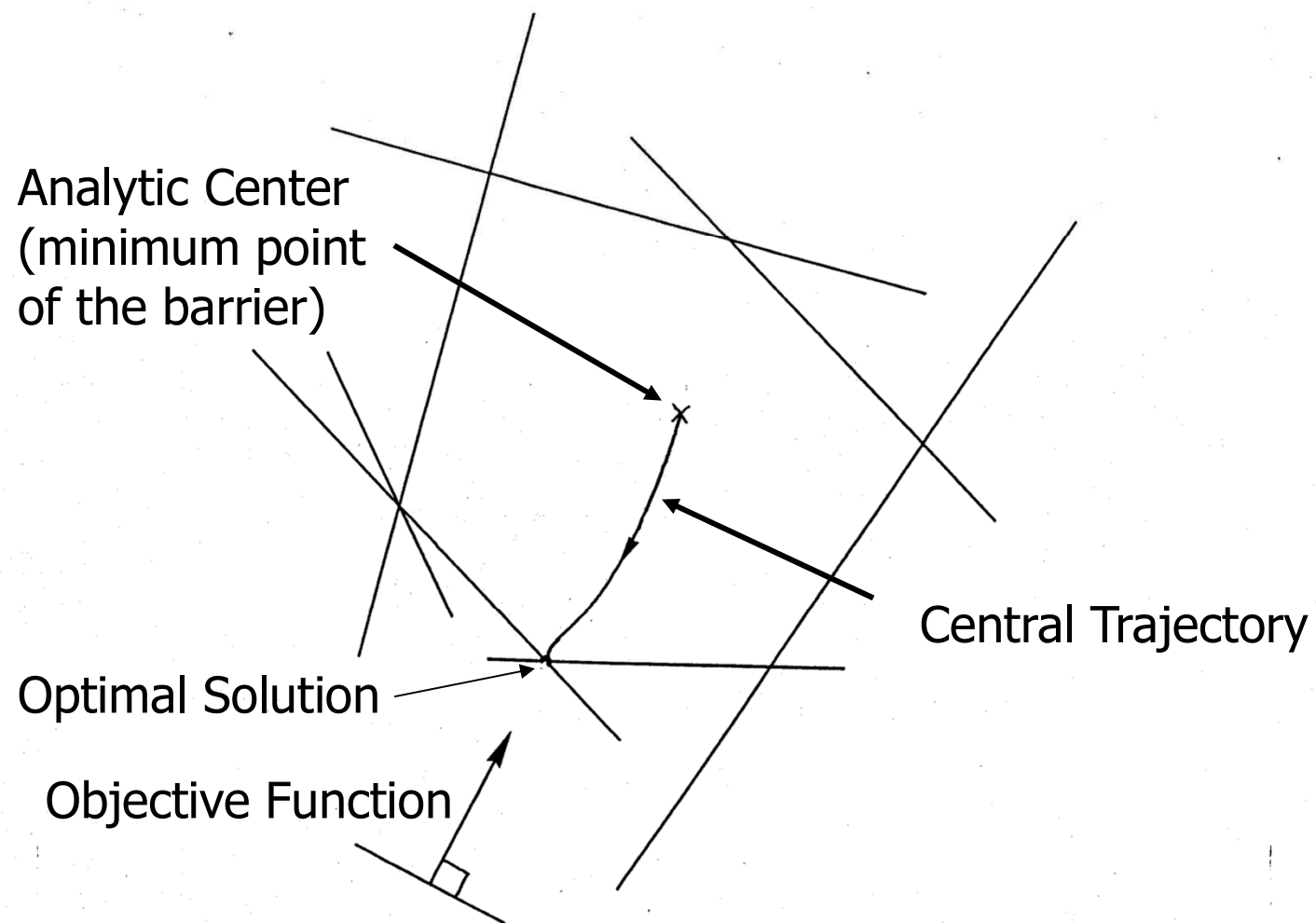
この関数の最小化は簡単(不等号条件は無視できる)



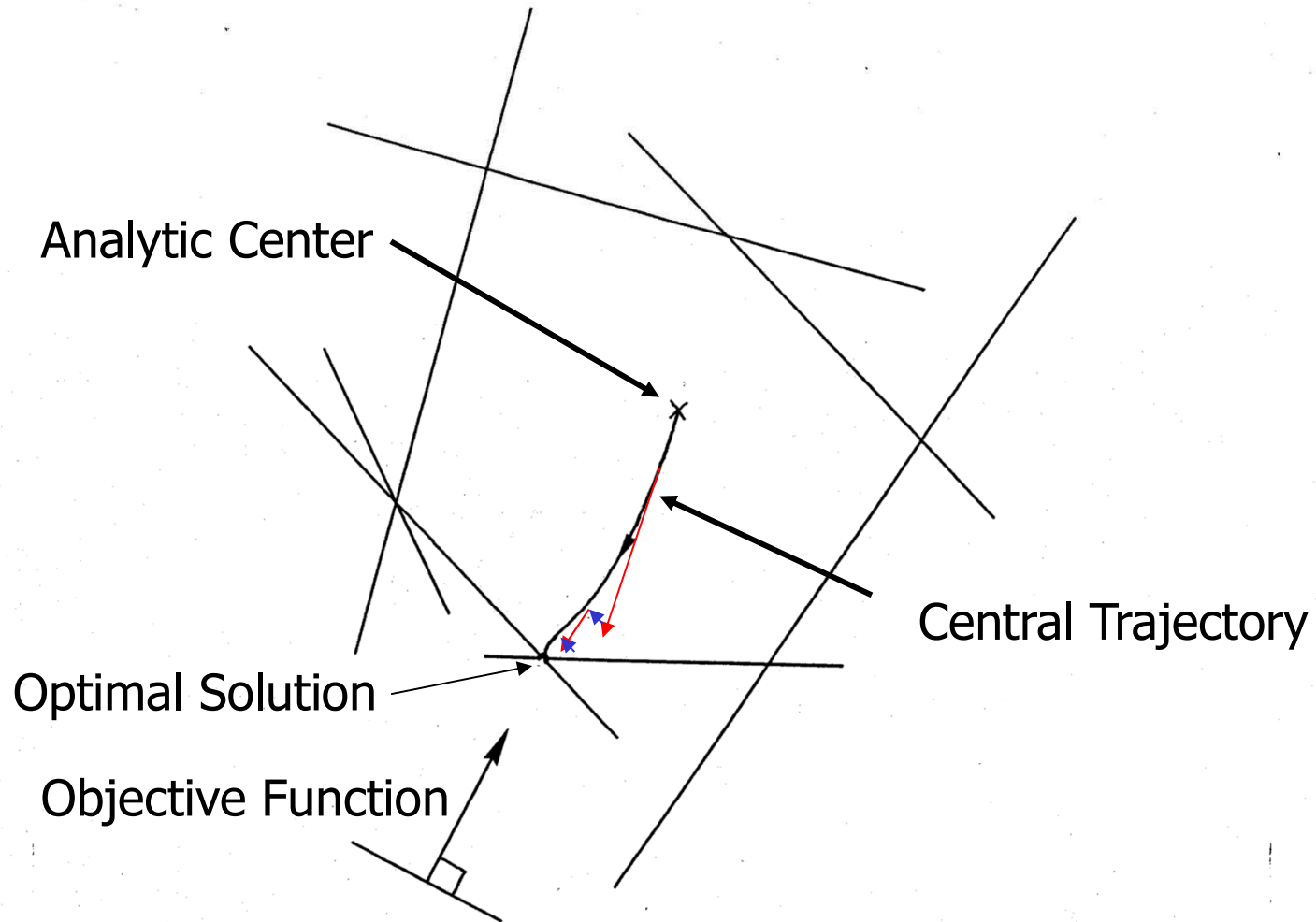
障壁関数

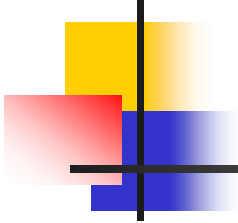
Log barrier: $-\sum_{i=1}^n \log(a_i^T x - b_i)$

許容領域の境界に近づくとき ∞ となる
凸関数



内点法 — 中心曲線を近似的に辿る

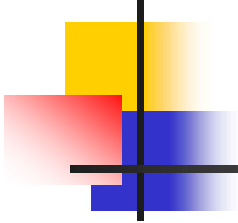




情報幾何

- 情報幾何学

- 情報を取り扱うための微分幾何学 (e.g. Amari and Nagaoka (2000))
- 適用分野
 - 統計学
 - 機械学習
 - Neural Networks
 - 信号処理
 - 制御 etc.,etc.



情報幾何

- 双対平坦空間: 凸なポテンシャル関数から定められる微分幾何構造
- 2種類の測地線 (互いに双対な接続)
 - 元の座標系での直線を測地線
 - ポテンシャルの勾配の流れで直線を定める
- リーマン計量
 - ポテンシャルの2階微分 (ヘッセ行列)

線形計画の場合 (Log barrier)

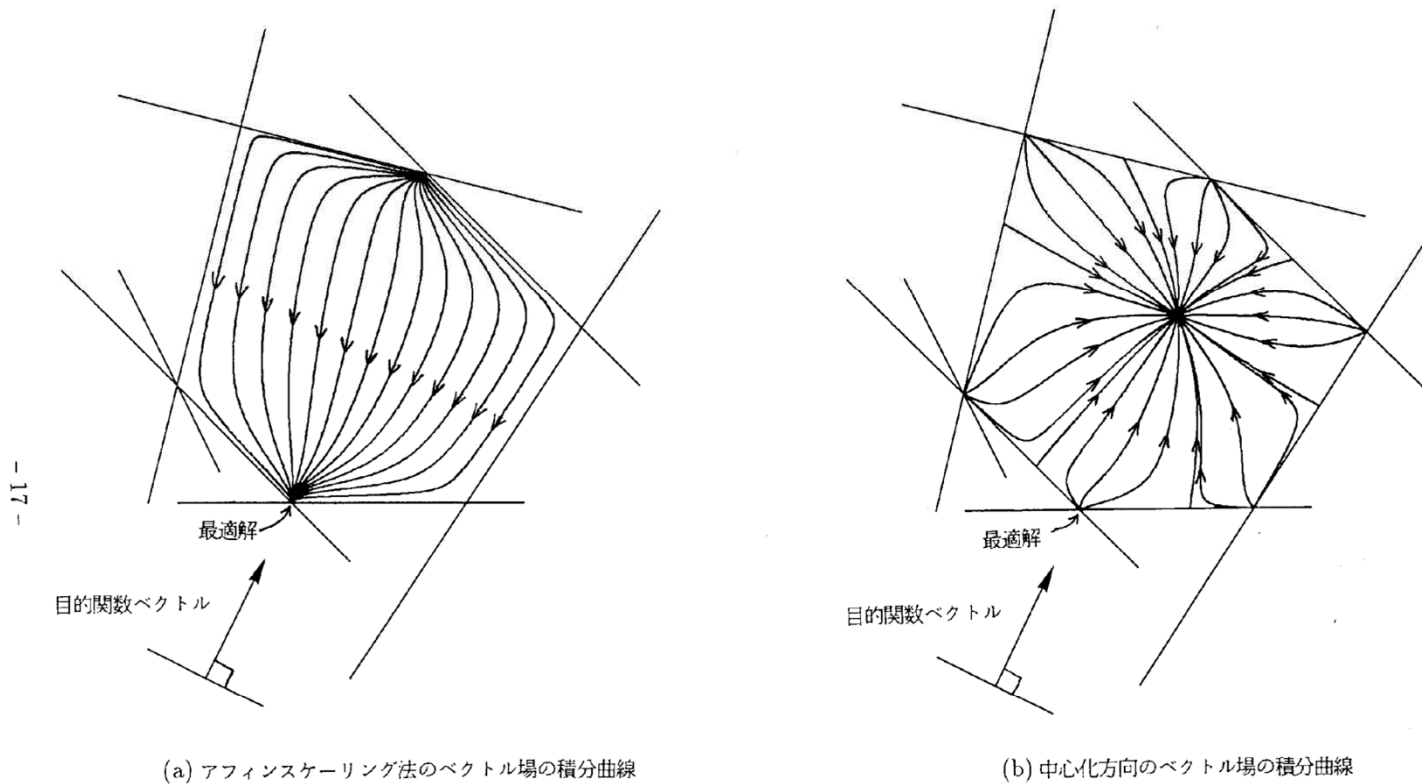
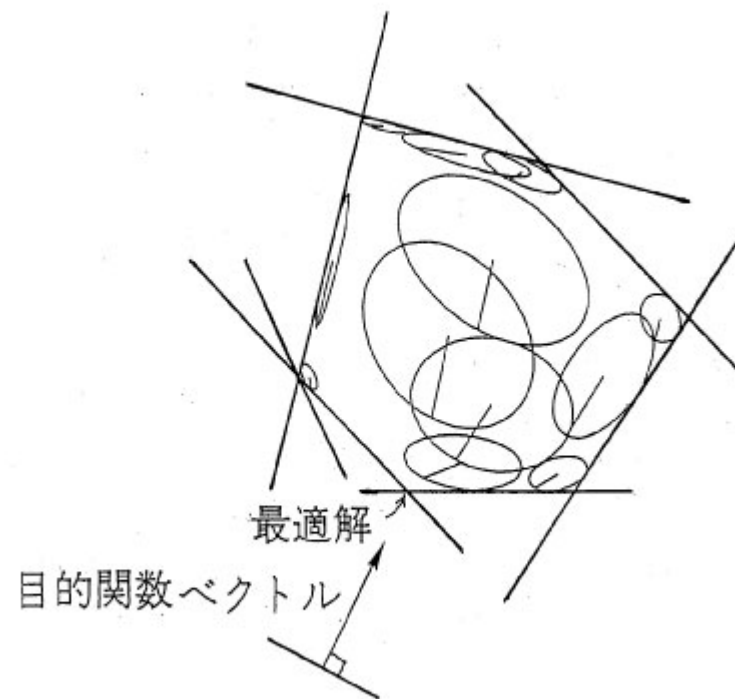
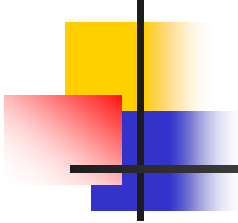


図 1.2.4. 図 1.1 の例題に対するアフィンスケーリング法のベクトル場の積分曲線と中心化方向のベクトル場の積分曲線.

これらの曲線は ∇^* 測地線 (∇ 測地線は上図で任意の直線)

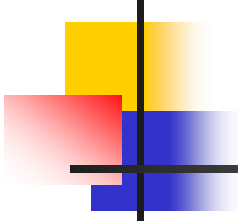
Dikin 楕円体 (各点でのリーマン計量による半径1の楕円体)





情報幾何と内点法

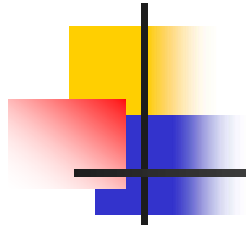
- アフィンスケーリング法のベクトル場の流れは、双対接続の測地線となっている(田辺、土谷(1988))。
- 情報幾何の双対性と内点法の双対性はどう結びつくか？
- 計算複雑度との関係は？



関連論文

Satoshi Kakiyara, Atsumi Ohara and Takashi Tsuchiya:
Information geometry and interior-point algorithms in
semidefinite programs and symmetric cone programs.
Journal of Optimization Theory and Applications,
Vol.157 (2013), pp. 749-780.

Satoshi Kakiyara, Atsumi Ohara and Takashi Tsuchiya:
Curvature integrals and iteration complexities in SDP and
symmetric cone programs. Computational Optimization and
Applications, Vol. 57 (2014), pp. 623-665.

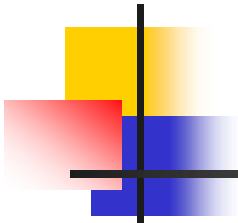


R.D.C. Monteiro and T. Tsuchiya:

A strong bound on the integral of the central path curvature and its relationship with the iteration complexity of primal-dual path-following LP algorithms. *Mathematical Programming*, Vol. 115, No.1 (2008), pp. 105-149.

S.A.Vavasis, Y.Ye:

A primal-dual interior point method whose running time depends only on the constraint matrix. *Mathematical Programming* 74, 79–120 (1996).

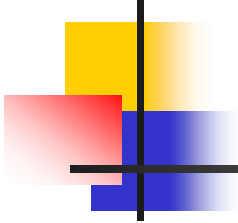


線形計画問題の双一次方程式系としての定式化

$$xs = 0, \quad x \text{ と } s \text{ 要素ごとの積がゼロ}$$

$$Ax = b, \quad s = c - A^T y,$$

$$x \geq 0, \quad s \geq 0,$$



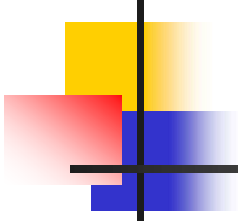
中心曲線(主双対)

$$xs = ve, \quad v \in (0, \infty) \quad \text{e: 各要素が1のベクトル}$$

$$Ax = b, \quad s = c - A^T y,$$

$$x \geq 0, \quad s \geq 0$$

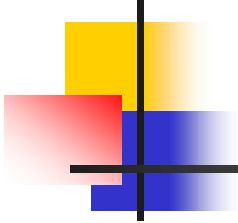
実行可能領域の内部を通して最適解
にいたる曲線.



中心曲線の近傍(主双対)

近傍の定義: 下記を満たす実行可能解集合

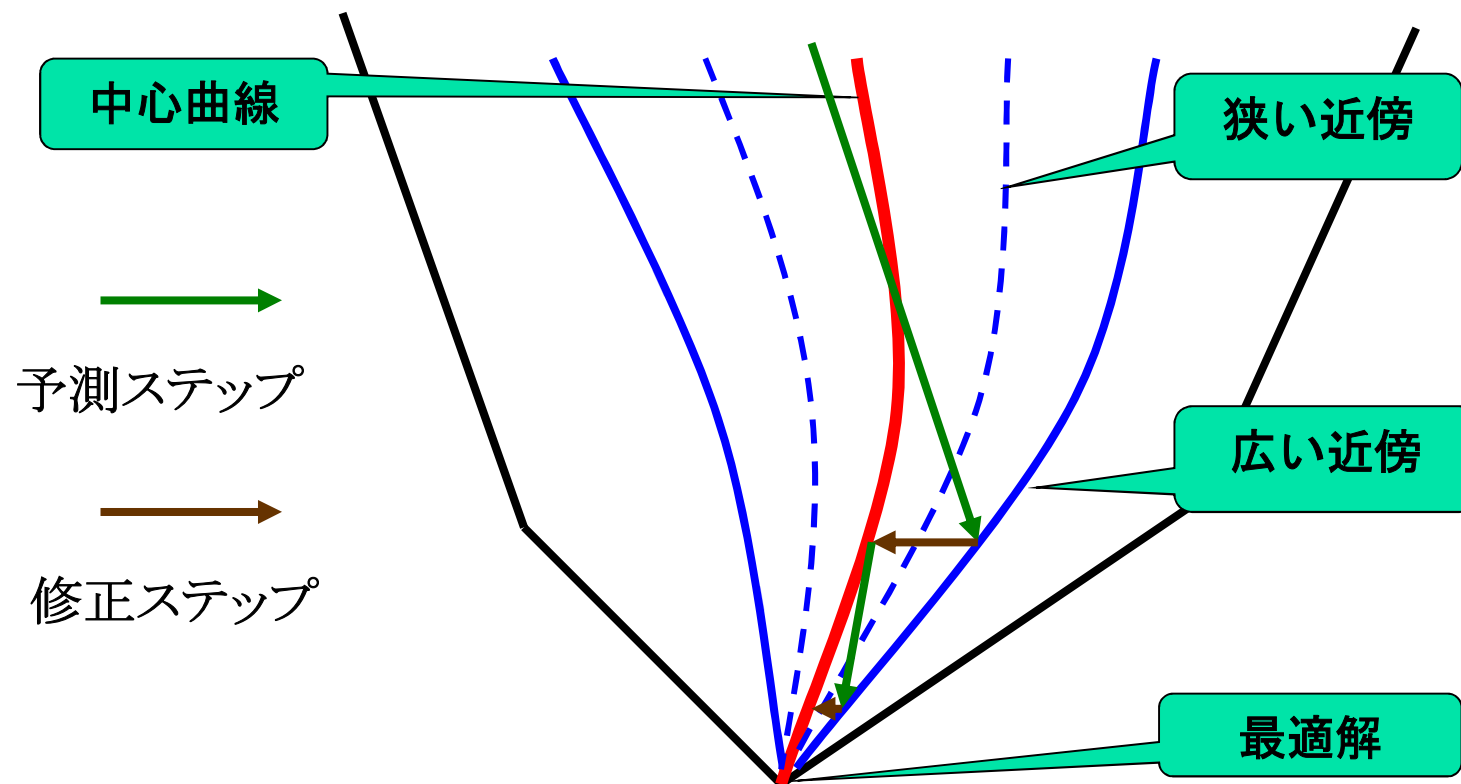
$$\|xs - \mu e\| \leq \beta\mu, \quad \mu = \frac{x^T s}{n}$$

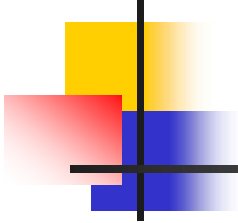


予測子修正子法 概要と準備 (あるいは Mizuno-Todd-Ye 法)

- 予測子(中心曲線の接線方向に進み双対ギャップを減少させる) + 修正子(中心曲線からのずれを修正)の2段階からなる。
- 多項式性
双対ギャップを μ_1 から μ_0 まで減少させるのに必要な反復回数が $O(\sqrt{n} \log(\mu_1/\mu_0))$
- 2次収束性

予測子修正子法





反復回数の積分による近似

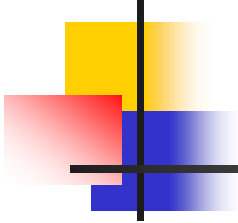
$$xs = \nu e$$

$$x\dot{s} + \dot{x}s = e$$

$$\|(x - \Delta\nu\dot{x})(s - \Delta\nu\dot{s}) - (\nu - \Delta\nu)e\| = (\nu - \Delta\nu)\beta$$

$$\Delta\nu^2 \|\dot{x}\dot{s}\| = (\nu - \Delta\nu)\beta$$

$$\frac{\|\dot{x} \circ \dot{s}\|^{1/2}}{\sqrt{\nu - \Delta\nu}} \Delta\nu = \sqrt{\beta}$$



反復回数の積分による近似

$$\frac{\|\dot{x} \circ \dot{s}\|^{1/2}}{\sqrt{\nu - \Delta\nu}} \Delta\nu = \sqrt{\beta}$$

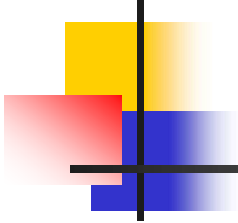
$$\left\| \frac{\dot{x} \circ \dot{s}}{\nu} \right\|^{1/2} \Delta\nu = \sqrt{\beta}$$

$$\int_{\nu_1}^{\nu_2} \left\| \frac{\dot{x} \circ \dot{s}}{\nu} \right\|^{1/2} d\nu \sim \sqrt{\beta} \times (\text{反復回数})$$

Vavasis-Ye の内点法 (1996)

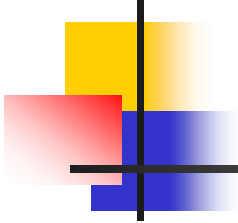
(Megiddo-Mizuno-Tsuchiya (1998), Monteiro-Tsuchiya (2003))

- 必要に応じて予測子として重み付き最小二乗法の代わりに層別最小二乗法で得られる探索方向を利用(主変数を小さい順に並べて比に大きなギャップがあるところで層別する.)
- 計算複雑度がAのみに依存、b, c とは独立になる。
- 反復回数 $O(n^{3.5} \log \bar{\chi}_A)$ ($O(n^{3.5} L_A)$ in TM model)



クロスオーバーイベント (Vavasis-Yeの核となるアイデア)

- 中心曲線上で2つの非負変数の大小関係が入れ替わって再び逆転することがないことをクロスオーバーイベントという. (より正確には $\bar{\chi}_A$ 倍までは許される.)
- クロスオーバーイベントは $n(n-1)/2$ 回しか起こらない.
- 層別最小2乗ステップを行うと, 最適解が見つかるか, あるいはそのあと $O(n \log \bar{\chi}_A)$ 回の反復で必ずクロスオーバーイベントが起こる.



凸錐上の線形計画問題

$\min c^T x$ (主問題)

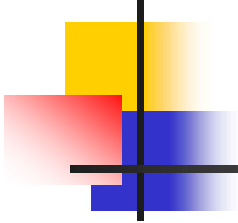
s.t. $Ax = b, x \in C, A \in R^{m \times n}, b \in R^n$

$\max b^T y$ (双対問題)

s.t. $s = c - A^T y, s \in C^*,$

C : Convex cone,

C^* : Cone dual to C .



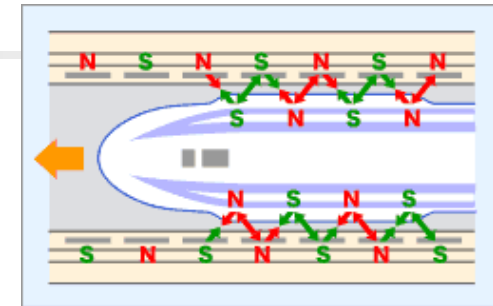
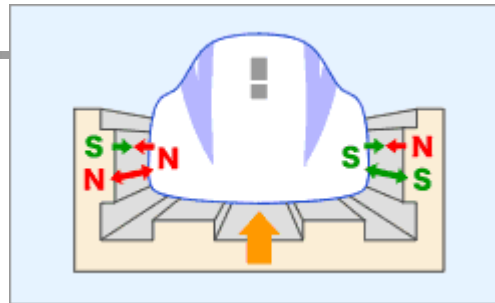
2次錐計画と主双対内点法

- 2次錐計画: C が2次錐の直積の場合.
- 多項式時間主双対内点法が、ユークリッドジョルダン代数を用いて拡張可能(Tsuchiya (1999), Monteiro-Tsuchiya(2000))
- リニアモーターカー磁気シールド最適設計問題へ活用(Sasakawa, Tsuchiya (2003))

凸最適化(2次錐計画法)によるリニア モーターカー磁気シールド最適設計



山梨リニア実験線



リニアモーターカー : 超伝導磁石で浮上, 推進
強力な磁場を発生

車体内部をシールドして, 内部に磁場がもれないようにする. 一方, シールドはできるだけ軽くしたい.

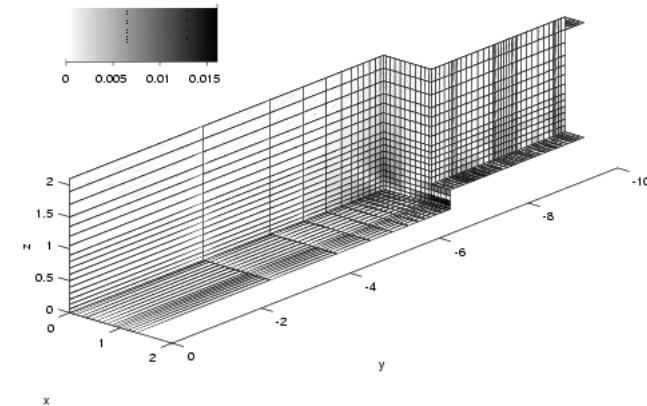
→最適設計問題(2次錐計画という凸最適化問題に定式化) (左の図 <http://www.rtri.or.jp>; 右2つの図 <http://www.pref.yamanashi.jp/> より)



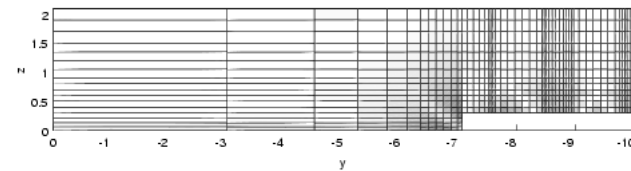
- 問題の大きさ
主双対変数の数: **5007**
自由度 (yの次元): **1669**
- 計算時間 : **1.8秒**
(反復回数: **21**)
PentiumIII 700MHz

解法の利点: 高速で安定しているため、異なる想定で一萬回解いてロバストなシールドを設計できた。

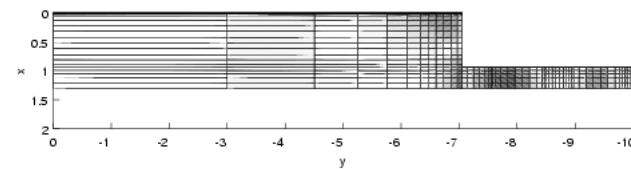
最適化されたシールドの形

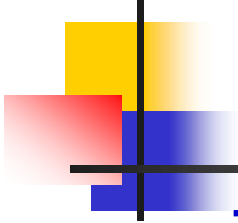


(a)



(b)



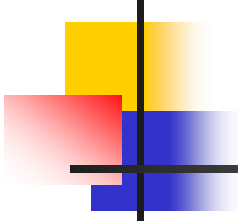


磁気シールド最適設計問題

■ 磁気シールド最適設計問題

- シールド内の磁束の流れ場を F とする
- ある点での場が F とすると、 $\|F\|$ の厚みが必要
- 厚みをシールド全体で積分するとシールドの体積となる。これを最小化(重量に比例)
- F が満たすべき線形制約式(B_n : 超電導磁石が作る外部磁場):

$$\operatorname{div} F = B_n$$

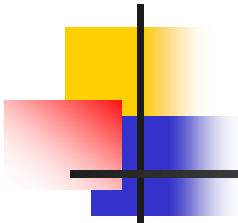


磁気シールド最適化問題

- 下記の最適化問題を解けば良い

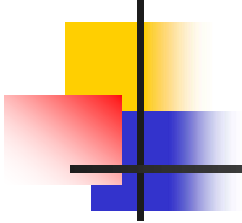
$$\begin{aligned} \min \int \|F\| dS \\ \text{s.t. } \operatorname{div} F = B_n \end{aligned}$$

- この問題は2次錐計画問題に定式化可能



モデリングとの関係

- 磁気シールド最適設計問題
 - 透磁率 μ : 高いが有限
 - 内部に少しは漏洩磁界がある



モデリングとの関係

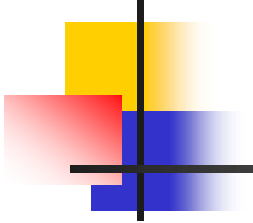
■ 磁気シールド最適設計問題

仮定 $\mu \rightarrow \infty$

(物理的考察による) 帰結

- $\operatorname{div} F = B_n$
- No leak inside the car

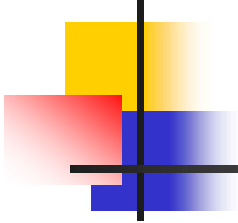
これをどのように「数理的に」理解するか？

- 
- 変分法的定式化
 - 磁場の総エネルギー (各項は2次関数)

$$\frac{1}{2}E_{\text{out}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu}E_{\text{shield}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu^2}E_{\text{in}}$$

- 全系の磁場はエネルギー最小原理で定まる ($\mu \rightarrow \infty$) $\Rightarrow$

層別最小二乗法の帰結として自然と導出可能



情報幾何と内点法 (II)

(Kakihara-Ohara-Tsuchiya (2008-2013))

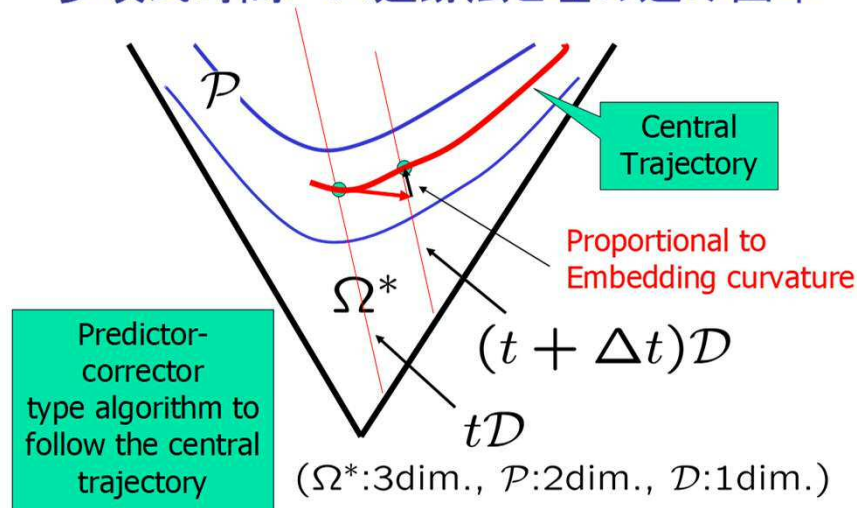
- 情報幾何学

- 情報を取り扱うための微分幾何学 (e.g. Amari and Nagaoka (2000))
- 適用分野
 - 統計学
 - 機械学習
 - Neural Networks
 - 信号処理
 - 制御 etc.,etc.

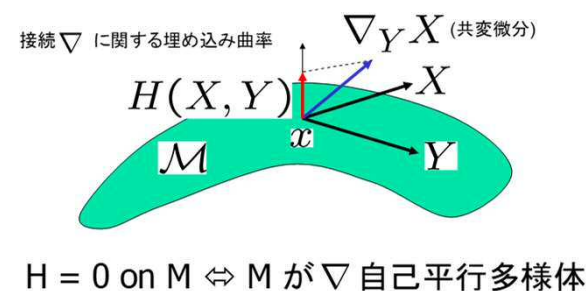
計算複雑度を多様体の埋め込み曲率で表現する

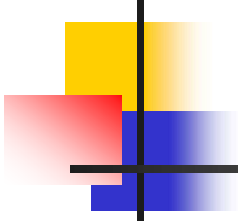
- 凸最適化の求解に要する計算量を厳密に微分幾何学的量(中心曲線上の曲率積分)で表現する。

多項式時間パス追跡法と埋め込み曲率



埋め込み曲率





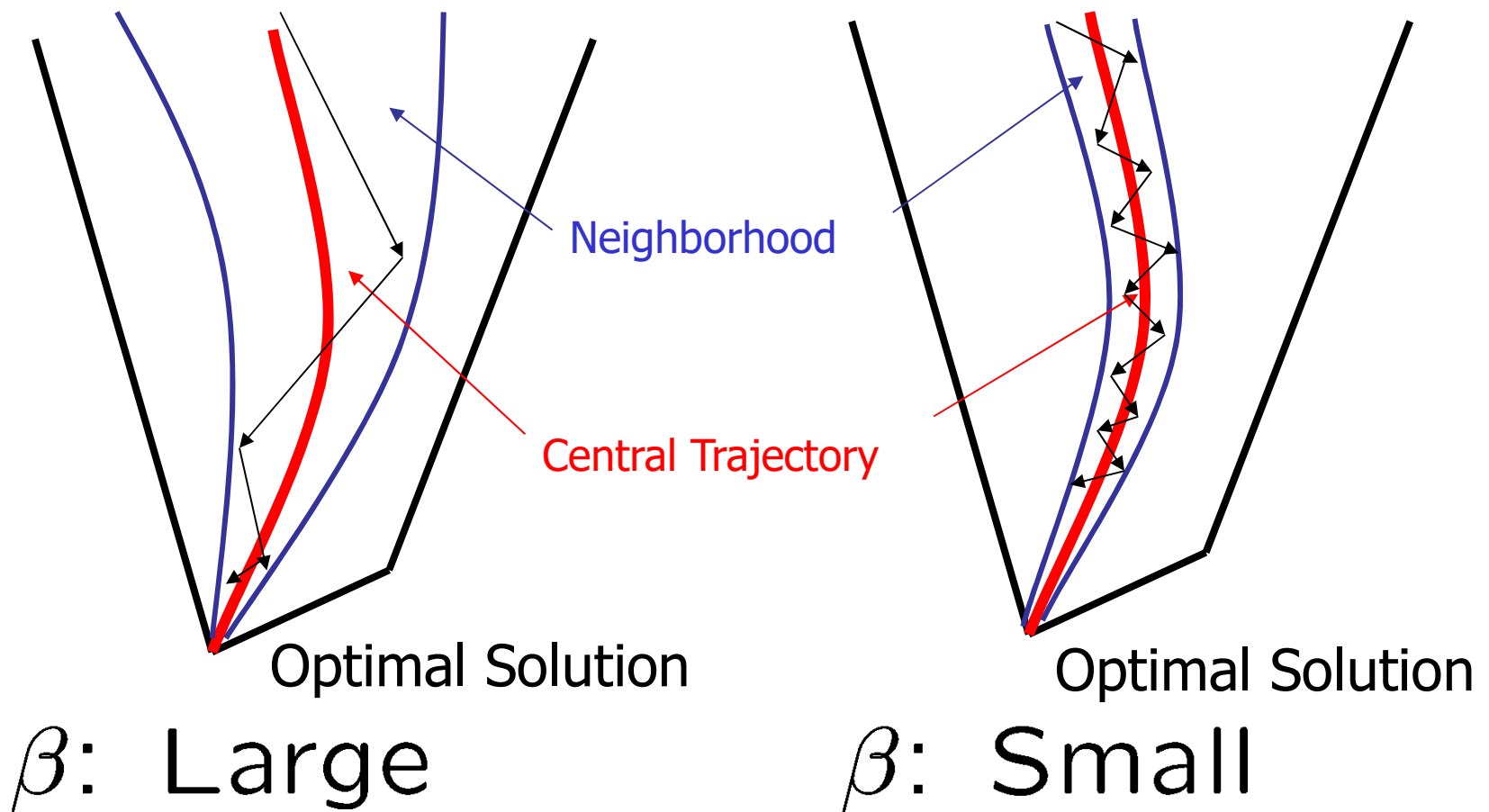
計算複雑度と曲率積分

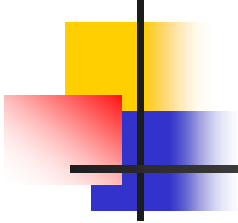
- 多項式時間内点法の反復回数は、中心曲線の埋め込み局率に関する情報幾何的積分 I_P を用いて以下のように表現できる。

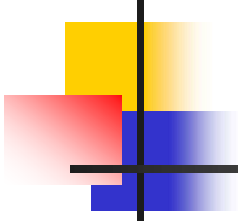
$$\# \text{ of iterations} \sim \frac{I_P(t_1, t_2)}{\sqrt{\beta}}$$

β : 用いる中心曲線の近傍の大きさ

パス追跡法



- 
-
- $I_{\mathcal{P}}(t_1, t_2)$ は、 $\beta = 1$ の場合の反復回数
の推定値.
 - この積分が大きければ、内点法で効率的に問題を解ける可能性は低くなる。

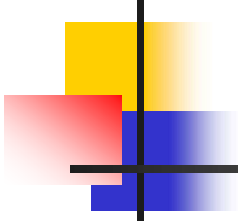


古典的線形計画問題(LP)の場合

- 古典的な LP の場合, 中心曲線の全曲率、すなわち $I(0, \infty)$ が存在して、下記の通り評価できる。

$$I(0, \infty) = O(n^{3.5} \log \bar{\chi}_A)$$

(independent of c and d ; n : # of nonnegative variables).

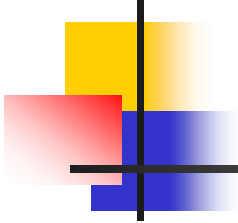


古典的LPの場合

- 係数行列が0-1行列であるような LP（ネットワーク流問題を含む）の場合,

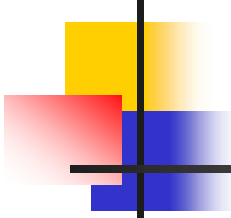
$$I(0, \infty) = O(n^{4.5}m)$$

(n: 非負変数の次元, m: 等式制約の数).



古典的LPの場合

- 情報幾何の立場からは、本命題は、中心曲線の大域的構造を捉えたものと考えられる。
- アルゴリズムの立場からは、本命題は、LPについて、係数行列にしか計算複雑度が依存しない多項式時間解法が存在することの帰結と考えられる。(係数行列が0-1行列の場合は強多項式解法となる) (Vavasis-Ye, Monteiro-Tsuchiya)



古典的 LP の場合: 計算複雑度と曲率 (主双対内点法)

- 主双対内点法: 一番良く使われている内点法
主問題と双対問題両方の情報を用いて反復列を作る。
- 主双対内点法についても、中心曲線上の積分を用いた反復回数の表現が知られていた。(Monteiro-Tsuchiya (2008))

$$\# \text{ of iterations} \sim \frac{I_{PD}(t_1, t_2)}{\sqrt{\beta}}$$

β : 用いる中心曲線の近傍の大きさ

古典的線形計画の場合の中心曲線の 主双対表現

Jordan 積

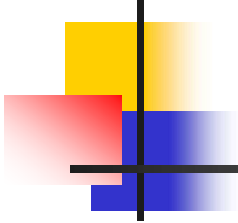
$$x \circ s = \frac{1}{t}$$

$x \in \mathcal{P}, s \in \mathcal{D}$

の解が

$$x(t), s(t)$$

x, s の要素ごとの積

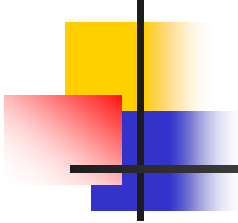


古典的 LP の場合: 計算複雑度と曲率 (主双対内点法)

数学的に同じ積分 $\int_{\nu_1}^{\nu_2} \left\| \frac{\dot{x} \circ \dot{s}}{\nu} \right\|^{1/2} d\nu$

$I_{PD}(t_1, t_2) \equiv \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{h_{PD}(t)} dt$

t_1, t_2 : correspond to two points
on the central trajectory



ピタゴラス関係と主双対内点法

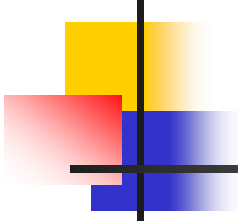
- 実は、下記のようなピタゴラスの関係が成立する。

(主双対内点法の反復を近似する積分の
被積分関数の情報幾何的な意味づけ)

$$h_{PD}(t)^2 = \frac{\|H_{\mathcal{P}}^*(\dot{x}, \dot{x})\|^2}{4} + \frac{\|H_{\mathcal{D}}(\dot{s}, \dot{s})\|^2}{4}$$

各項の1/4乗の積分が

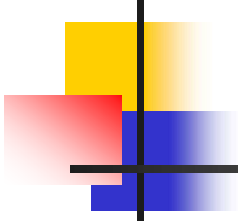
$$I_{PD}, I_{\mathcal{P}}, I_{\mathcal{D}}$$



主内点法と主双対内点法の反復回数 数の関係

- ピタゴラス関係から, 古典的LPの場合については、主内点法の方が主双対内点法よりも少ない反復回数で問題をとくことができることがわかる。

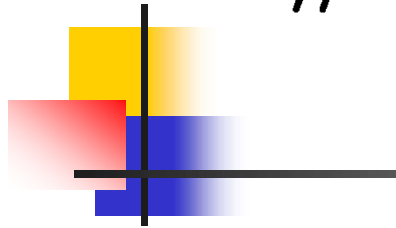
$$\begin{aligned} & \max[I_{\mathcal{P}}(t_1, t_2), I_{\mathcal{D}}(t_1, t_2)] \\ & \leq I_{PD}(t_1, t_2) \\ & = O(n^{3.5} \log \bar{\chi}_A) \end{aligned}$$



DFL001

- Netlib 問題集の中でも、難しい問題として知られている。(大規模問題の入口位の問題)
(行列の大きさ: 6072×12230)
- DFL001, says Marc Meketton, "is a 'real-world' airline schedule planning (fleet assignment) problem."

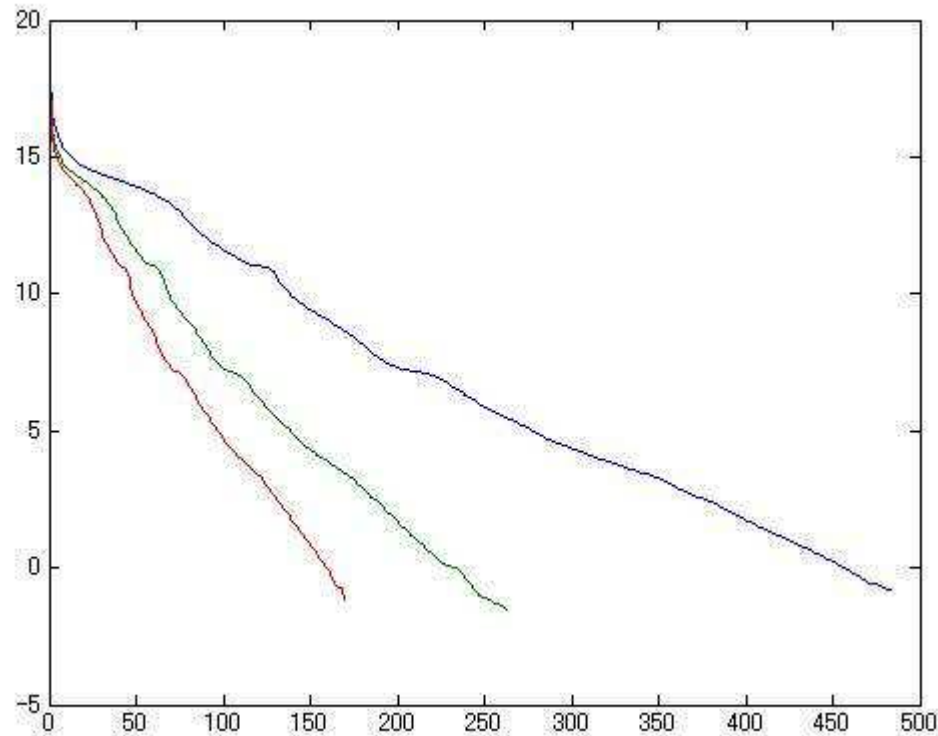
$$\# \text{ of iterations} \sim \frac{I_{PD}(t_1, t_2)}{\sqrt{\beta}} ?$$



目的関数
の最適解
への近さ



$\log_{10}(\text{双対ギャップ})$

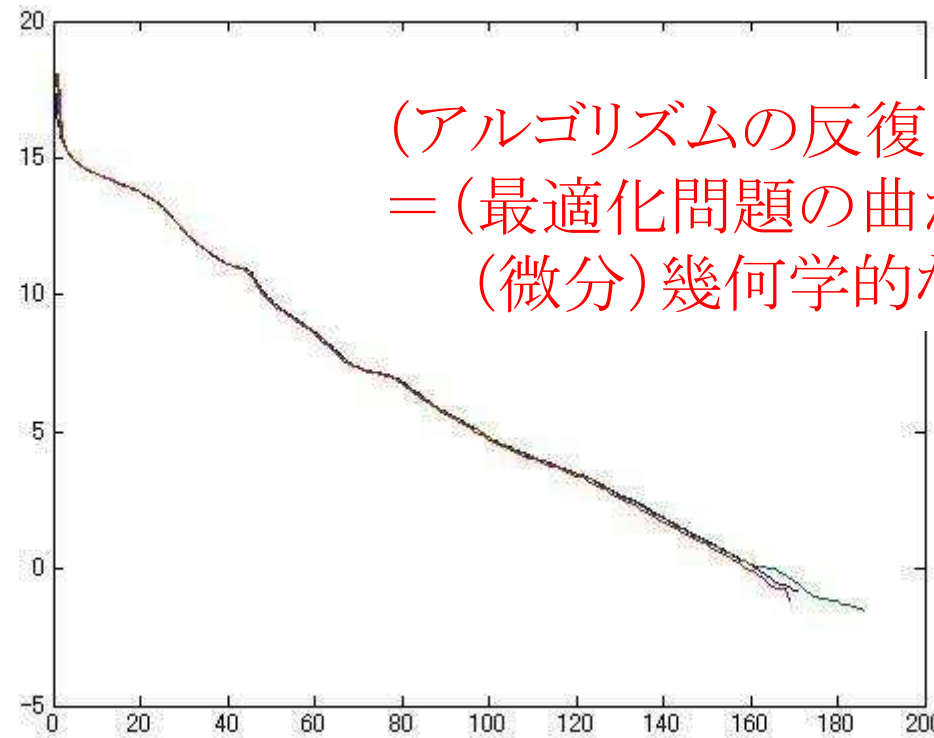


反復回数

グラフ左から $\beta = 1, 1/2, 1/4$ の場合

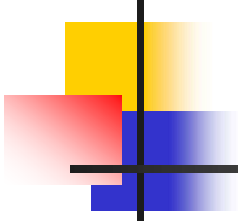
$$\# \text{ of iterations} \sim \frac{I_{PD}(t_1, t_2)}{\sqrt{\beta}} !$$

log10(双対ギャップ)



(アルゴリズムの反復回数)
= (最適化問題の曲がり方を反映した
(微分)幾何学的な量である！)

反復回数*(beta)^{1/2} ~ 曲率積分
(3本がほとんど重なっている)

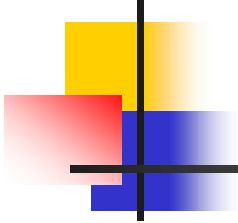


不変性の見地から ...

- 問題のスケーリング(問題をどのような単位系で記述するかに対応.)
- 予測子-修正子法はスケーリング不変
- Vavasis-Ye のアルゴリズムは問題のスケーリングに対して不変でない.
- $\bar{\chi}_A$ も不変でない.
- スケーリング不変な条件数

$$\bar{\chi}_A^* = \min_D \bar{\chi}_{AD}$$

Dは対角要素が正の
対角行列

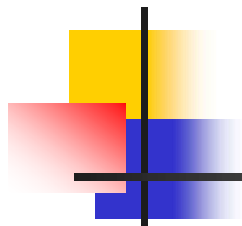


スケーリング不変なVavasis-Yeアルゴリズム の拡張

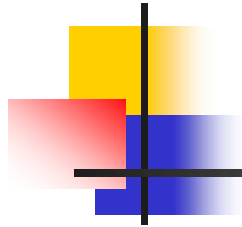
D.Dadush, S.Huiberts, B.Natura, L.Végh:
A Scaling-Invariant Algorithm for Linear Programming whose
Running Time Depends only on the Constraint Matrix (STOC 2020)

- 層をどのようにして作るか？
- Dadush,Huiberts,Natura,Veghのアルゴリズム
- マトロイド理論の援用

(余談:Vegh氏が2018年に来日し土谷を1日訪問したことが研究のきっかけとなった:-). 超短期間の訪問が新展開に繋がることもある例.)



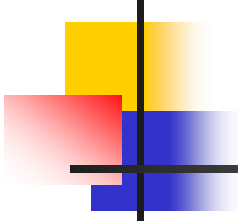
代数幾何とトロピカル幾何



代数幾何

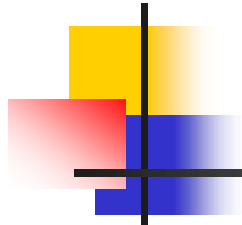
Jesús A. Loera, Bernd Sturmfels, Cynthia Vinzant:
The Central Curve in Linear Programming
Foundations of Computational Mathematics (2012)

- 中心曲線を代数曲線の一部としてみる.
(Zaliski 閉包)
- 主(あるいは双対)中心曲線のガウス曲率の積分を推定(概ね次元の関数)
- 道具は強力なのでいろいろなことがいえる.
- 計算複雑度との厳密な関係は確立されていない.



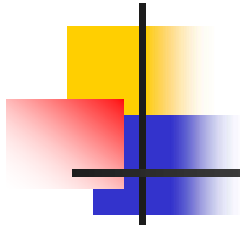
トロピカル幾何

- 代数幾何の一種の極限をとると表れる.
- $(+, \times)$ から $(\max, +)$ へ.
- 非線形可積分系の超離散化
- ダイクストラアルゴリズムと高速自動微分
- いろいろと面白い対応が ...



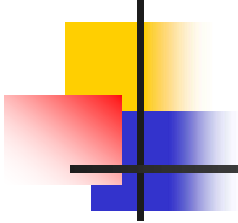
トロピカル幾何

Xavier Allamigeon, Pascal Benchimol, Stéphane Gaubert,
and Michael Joswig:
What Tropical Geometry Tells Us about the Complexity of
Linear Programming
SIAM Rev., 63(1), 123–164.



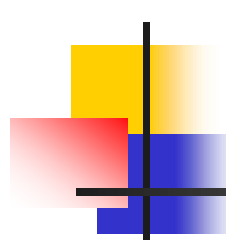
トロピカル幾何

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + t^3 x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & tx_1 \leq 1 + t^2 x_2 \\ & tx_2 \leq 1 + t^3 x_1 \\ & x_1 \leq t^2 x_2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$



悪条件な例題 (ABGJ例題)

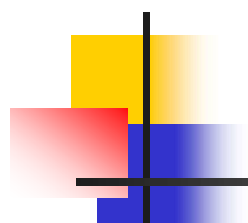
$$\begin{array}{ll} \min & x_1 \\ \text{s.t.} & x_1 \leq t^2 \\ & x_2 \leq t \\ & \vdots \\ & x_{2j+1} \leq tx_{2j-1}, \quad x_{2j-1} \leq tx_{2j} \\ & x_{2j+2} \leq t^{1-1/2^j} (x_{2j-1} + x_{2j}) \\ & \vdots \\ & x_{2r-1} \geq 0, \quad x_{2r} \geq 0. \end{array} \quad \begin{array}{l} 2r \text{変数, } 3r+4 \text{制約} \\ \\ \\ \\ (1 \leq j < r) \end{array}$$



$$r=3, t=10^{40}$$

$$A = \begin{matrix} \downarrow & 1.0 & 0.0 & -1.0e40 & -1.0e20 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \downarrow \\ & 0.0 & 1.0 & 0.0 & -1.0e20 & 0.0 & 0.0 & -1.0e40 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \downarrow \\ & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & -1.0e40 & -1.0e30 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \downarrow \\ & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & -1.0e30 & 0.0 & -1.0e40 & 0.0 & 0.0 \downarrow \\ & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & -1.0 & 0.0 \downarrow \\ & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 \downarrow \end{matrix}$$

$$\text{基底} = \begin{matrix} \downarrow & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0e40 & 1.0e80 & -1.0e80 & -1.0e70 \downarrow \\ & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0e40 & -1.0e60 & 0.0 & -1.0e50 \downarrow \\ & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 1.0e40 & -1.0e40 & -1.0e30 \downarrow \\ & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0e40 & 0.0 & -1.0e30 \downarrow \\ & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & -1.0 & 0.0 \downarrow \\ & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 \downarrow \end{matrix}$$



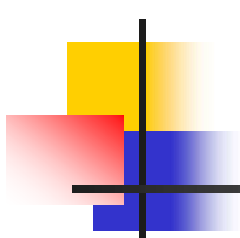
$$r=4, t=10^{40}$$

A=

↓	1.0	0.0	-1.0e40	-1.0e20	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0↓
	0.0	1.0	0.0	-1.0e20	0.0	0.0	0.0	0.0	-1.0e40	0.0	0.0	0.0	0.0↓
	0.0	0.0	1.0	0.0	-1.0e40	-1.0e30	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0↓
	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	-1.0e30	0.0	0.0	0.0	-1.0e40	0.0	0.0	0.0↓
	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	-1.0e40	-1.0e35	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0↓
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	-1.0e35	0.0	0.0	-1.0e40	0.0	0.0↓
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	1.0	-1.0	0.0↓
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-1.0↓

基底=

↓	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0e40	1.0e80	1.0e120	-1.0e120	-1.0e115↓
	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-1.0e40	-1.0e60	-1.0e90	0.0	-1.0e85↓
	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	1.0e40	1.0e80	-1.0e80	-1.0e75↓
	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-1.0e40	-1.0e70	0.0	-1.0e65↓
	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	1.0	1.0e40	-1.0e40	-1.0e35↓
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	-1.0e40	0.0	-1.0e35↓
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	1.0	-1.0	0.0↓
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	-1.0↓



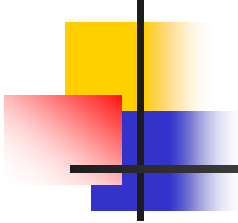
$$r=5, t=10^{40}$$

A=

↓	1.0	0.0	-1.0e40	-1.0e20	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0↓
	0.0	1.0	0.0	-1.0e20	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-1.0e40	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0↓
	0.0	0.0	1.0	0.0	-1.0e40	-1.0e30	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0↓
	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	-1.0e30	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-1.0e40	0.0	0.0	0.0	0.0↓
	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	-1.0e40	-1.0e35	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0↓
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	-1.0e35	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-1.0e40	0.0	0.0	0.0↓
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	-1.0e40	-3.16228e37	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0↓
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	-3.16228e37	0.0	0.0	0.0	-1.0e40	0.0	0.0	0.0↓
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	-1.0	0.0↓
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-1.0↓
↓	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0e40	1.0e80	1.0e120	1.0e160	-1.0e160	-3.16231e157↓		
	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-1.0e40	-1.0e60	-1.0e90	-1.0e125	0.0	-3.16228e122↓		
	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	1.0e40	1.0e80	1.0e120	-1.0e120	-3.16231e117↓		
	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-1.0e40	-1.0e70	-1.0e105	0.0	-3.16228e102↓		
	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	1.0e40	1.0e80	-1.0e80	-3.16231e77↓		
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-1.0e40	-1.0e75	0.0	-3.16228e72↓		
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	1.0e40	-1.0e40	-3.16228e37↓		
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-1.0e40	0.0	-3.16228e37↓		
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	1.0	-1.0	0.0↓		
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-1.0↓		
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-1.0↓		

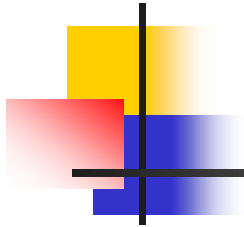
基底=

↓	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0e40	1.0e80	1.0e120	1.0e160	-1.0e160	-3.16231e157↓
	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-1.0e40	-1.0e60	-1.0e90	-1.0e125	0.0	-3.16228e122↓
	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	1.0e40	1.0e80	1.0e120	-1.0e120	-3.16231e117↓
	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-1.0e40	-1.0e70	-1.0e105	0.0	-3.16228e102↓
	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	1.0e40	1.0e80	-1.0e80	-3.16231e77↓
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-1.0e40	-1.0e75	0.0	-3.16228e72↓
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	1.0e40	-1.0e40	-3.16228e37↓
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-1.0e40	0.0	-3.16228e37↓
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	-1.0	0.0↓
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-1.0	0.0↓
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-1.0↓

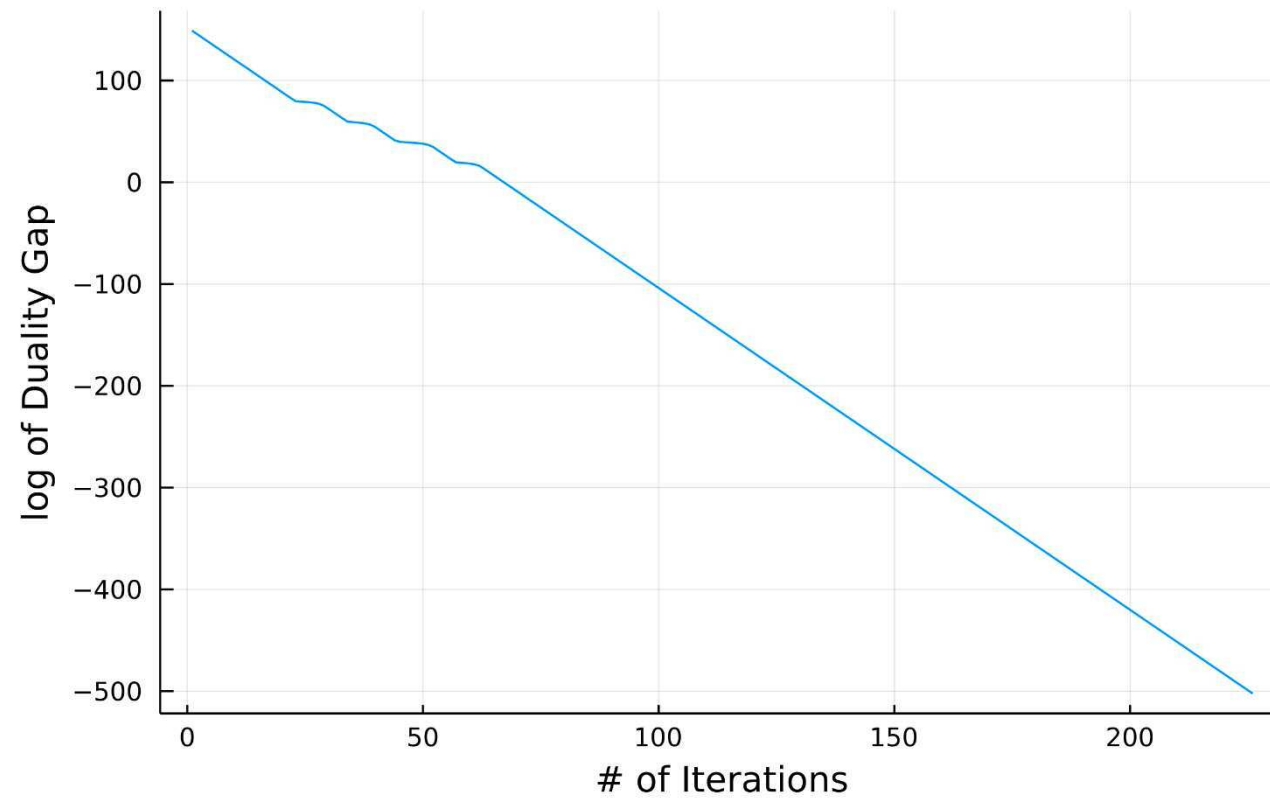


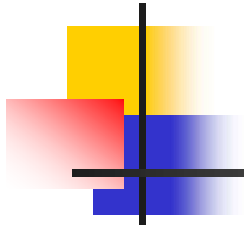
解いてみた結果

- Julia を使用: 有効数字1000桁で計算 (by 柿原聡氏)

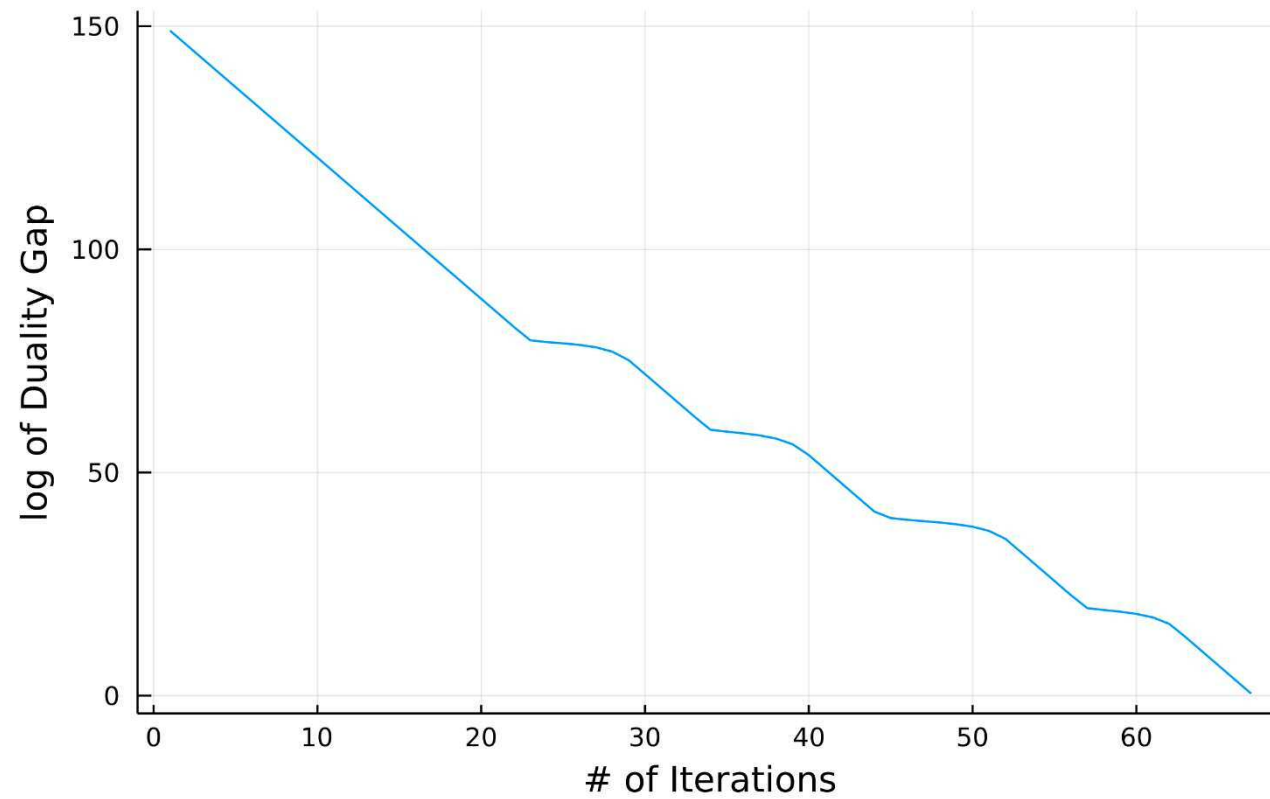


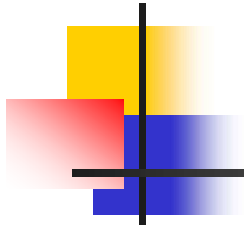
Log Plot of Duality Gap in LWr(t) with $r=3$, $t=10^{40}$



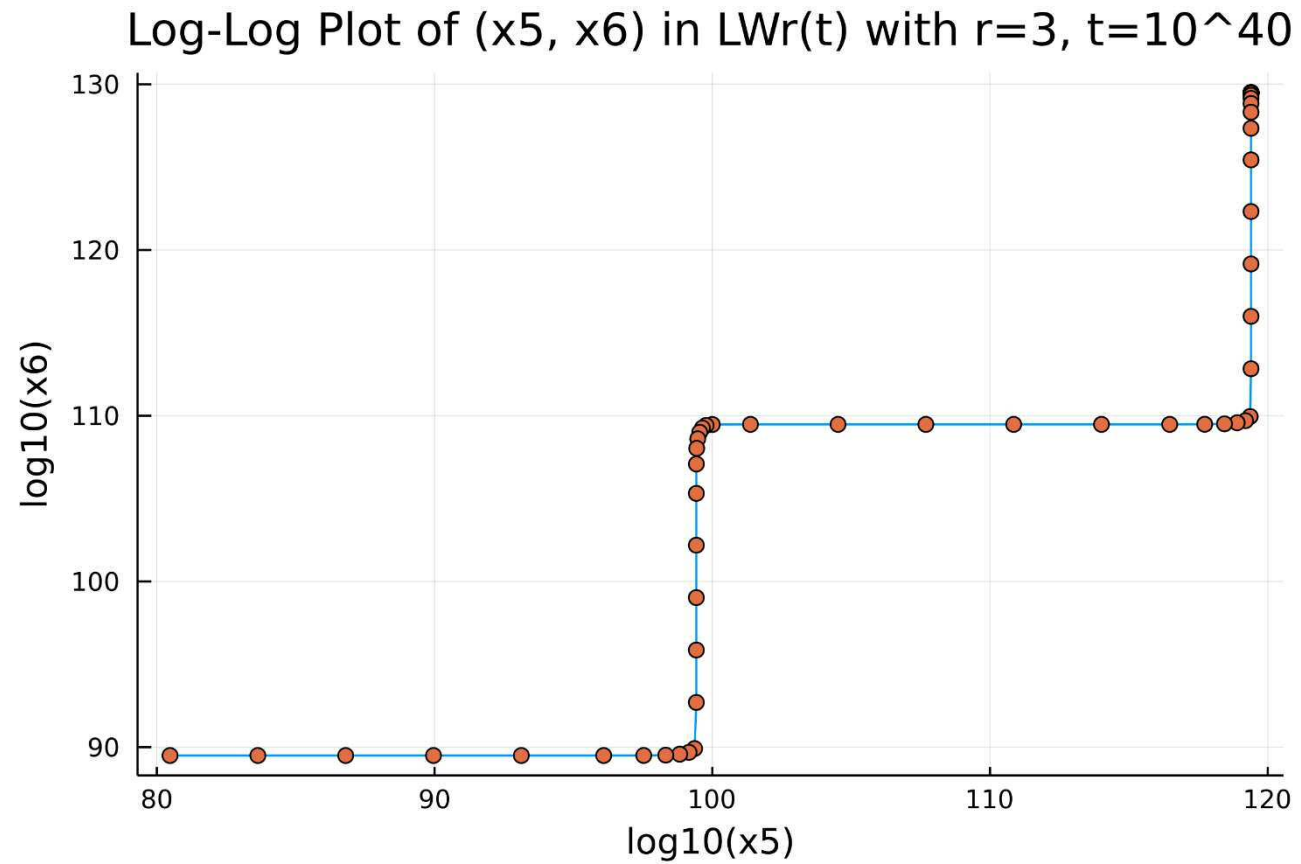


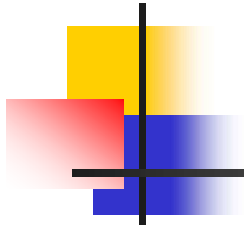
Log Plot of Duality Gap in LWr(t) with $r=3$, $t=10^{40}$



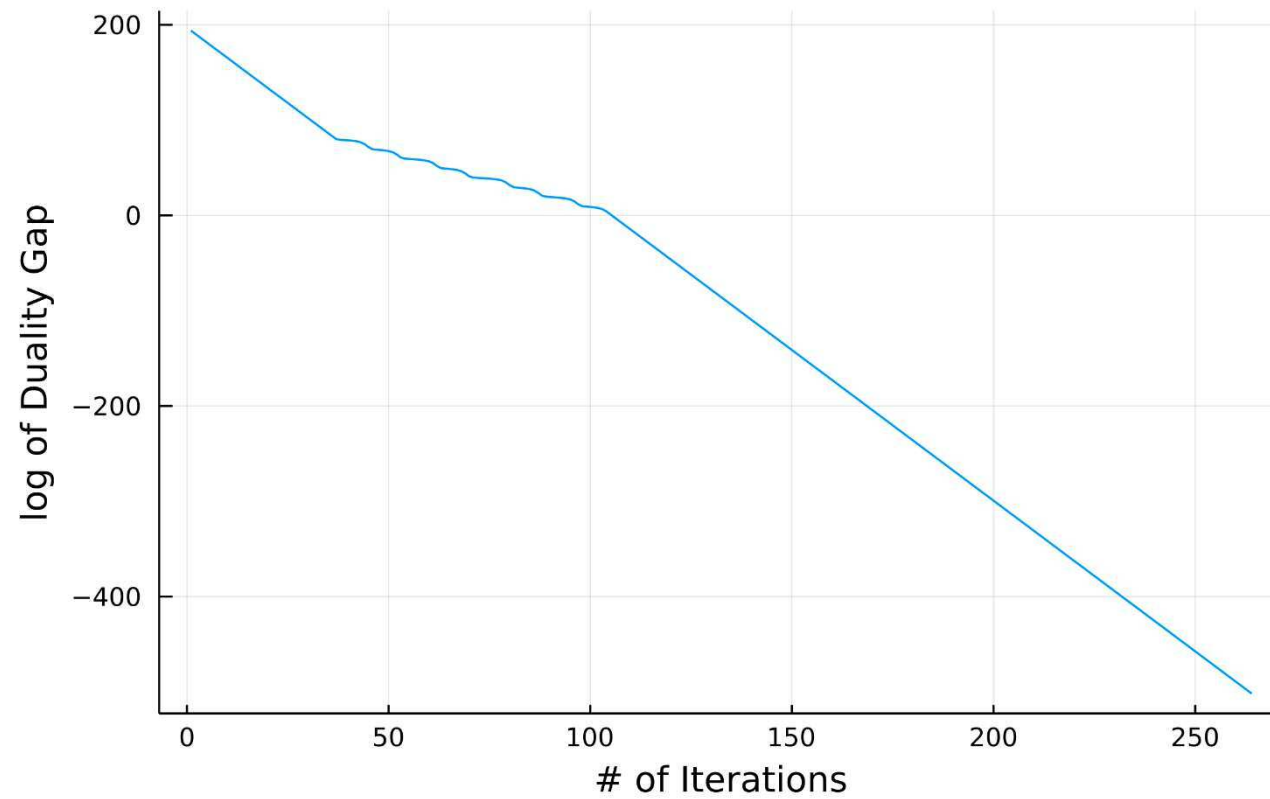


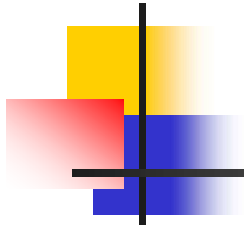
オレンジの
丸は双対ギャップ
がギザギザ減少
しているところの
各反復に対応.



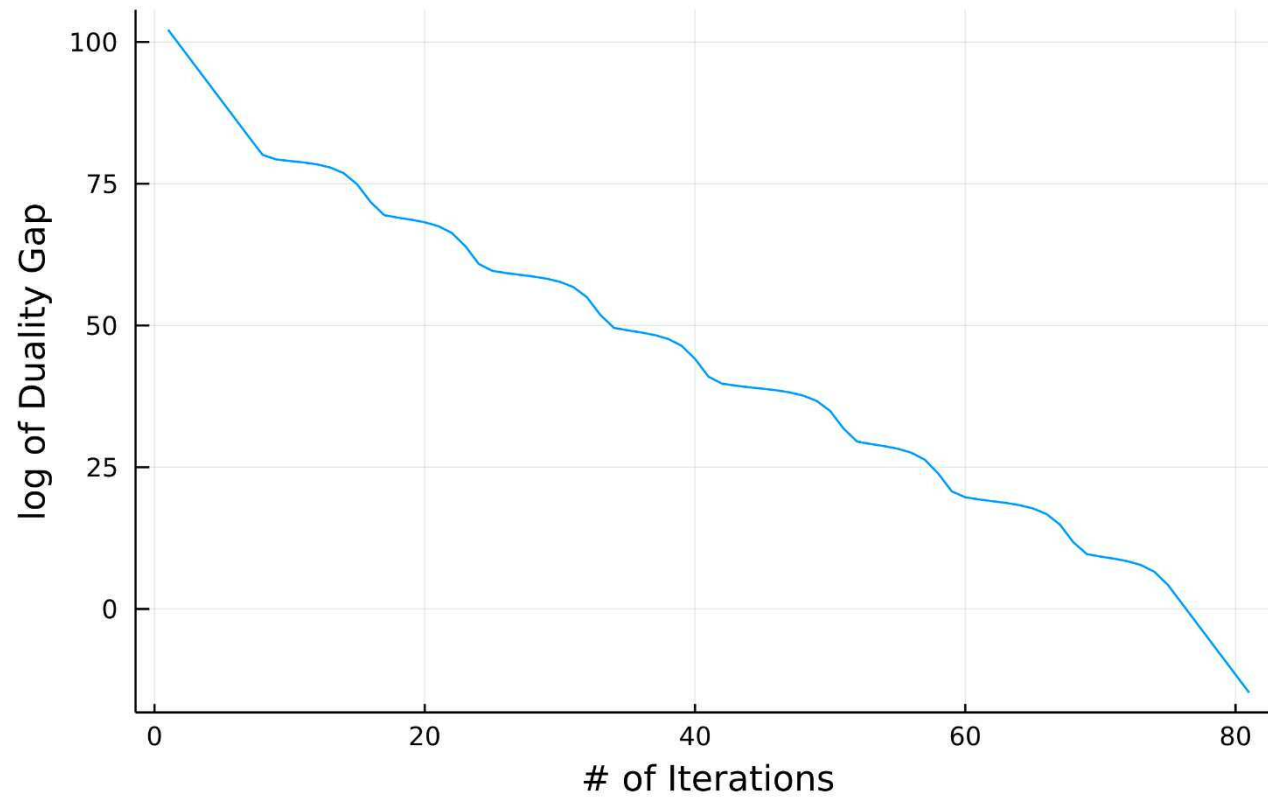


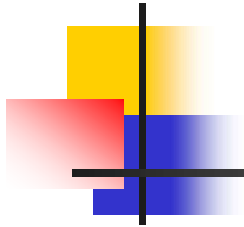
Log Plot of Duality Gap in LWr(t) with $r=4$, $t=10^{40}$



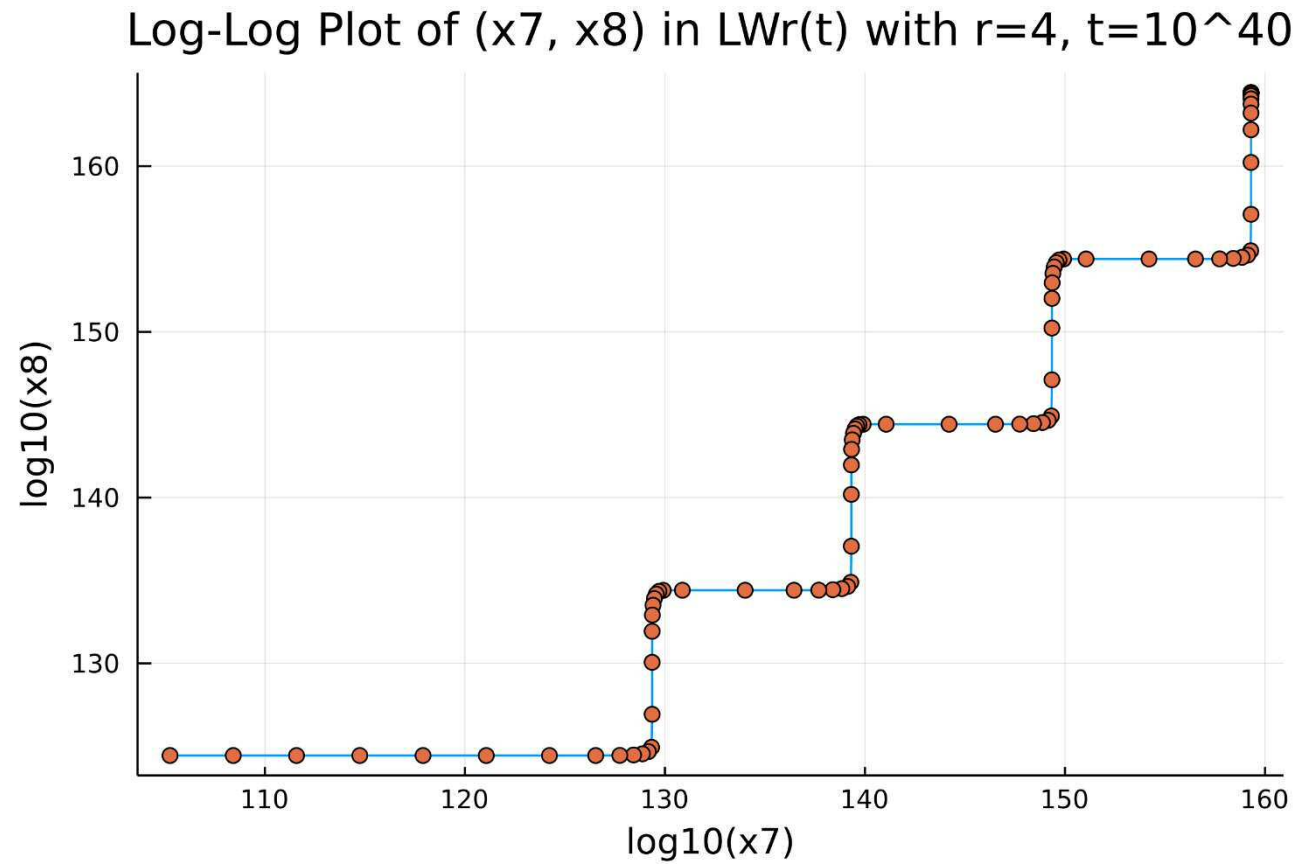


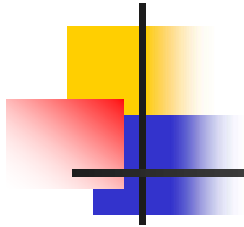
Log Plot of Duality Gap in LWr(t) with $r=4$, $t=10^{40}$



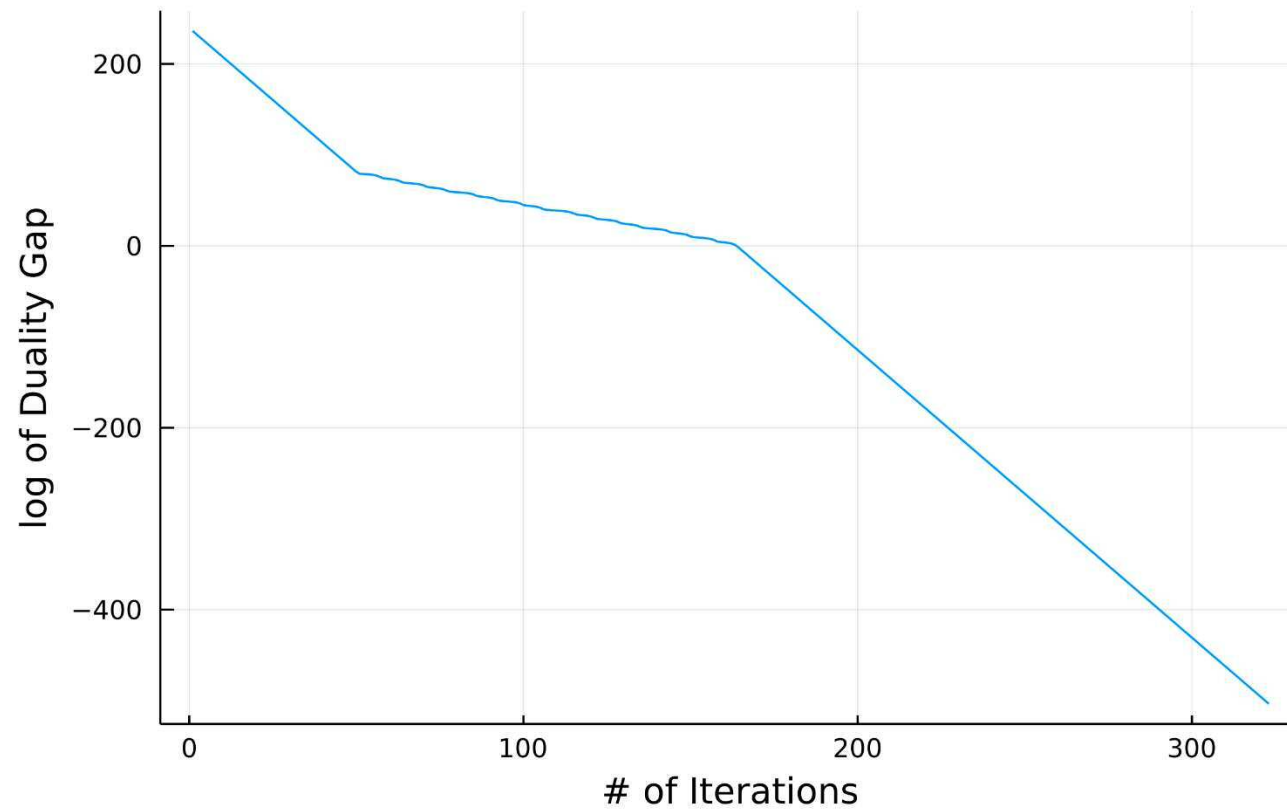


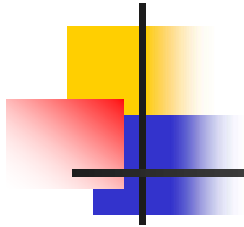
オレンジの
丸は双対ギャップ
がギザギザ減少
しているところの
各反復に対応.



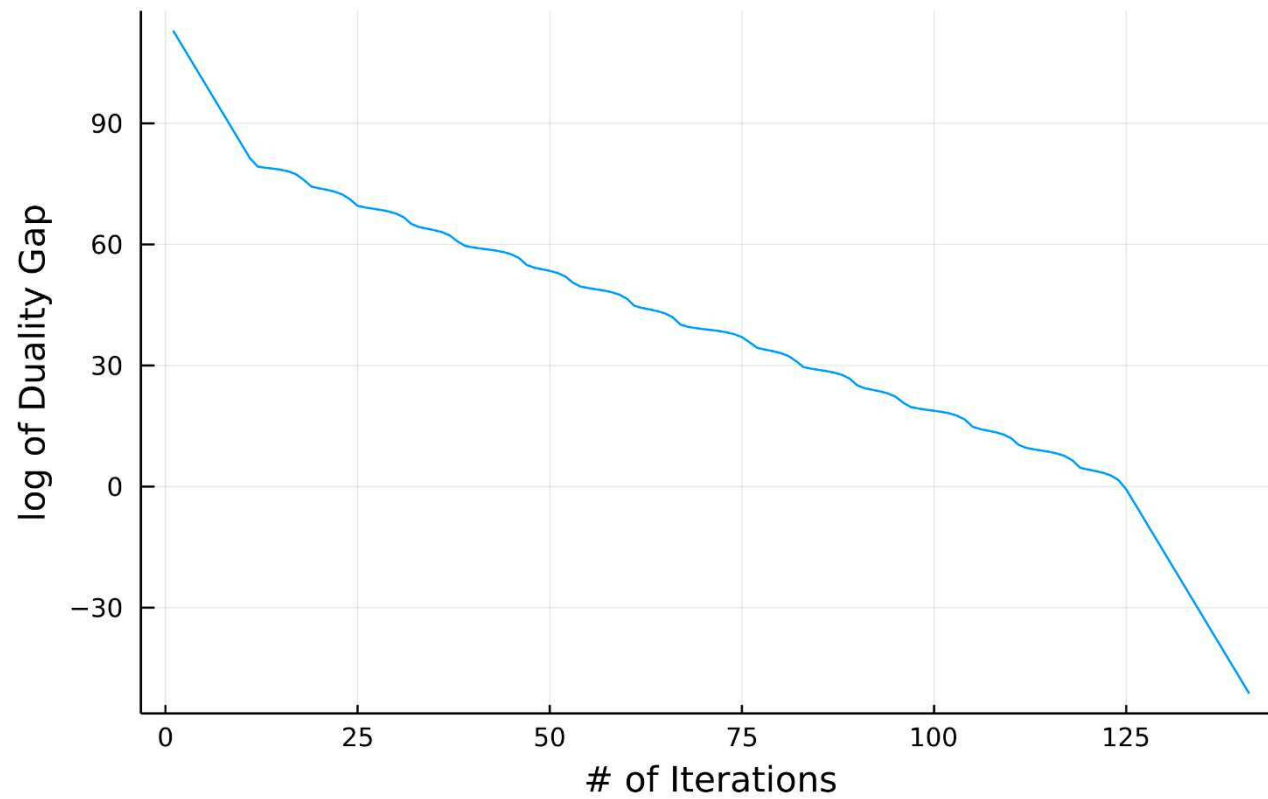


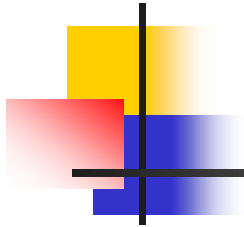
Log Plot of Duality Gap in LWr(t) with $r=5$, $t=10^{40}$





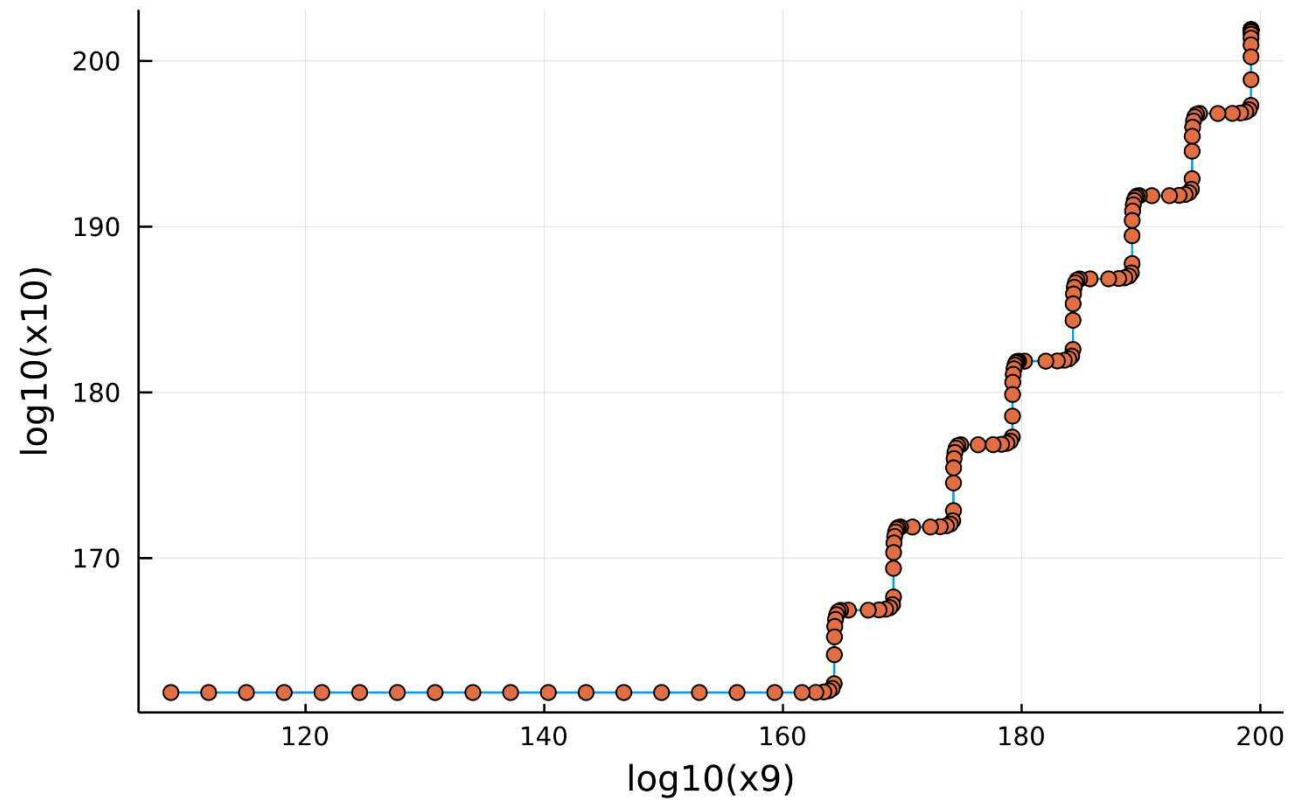
Log Plot of Duality Gap in LWr(t) with $r=5$, $t=10^{40}$

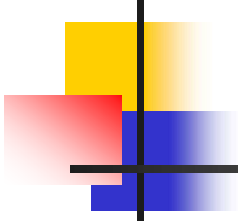




Log-Log Plot of (x9, x10) in LWr(t) with $r=5$, $t=10^{40}$

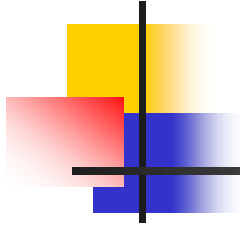
オレンジの丸は双対ギャップがギザギザ減少しているところの各反復に対応.





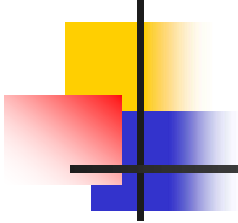
悪条件な例題

- トロピカル幾何の方でギザギザの「中心曲線」を作成.
- Puiseux 級数を使った対応で実際のLPに戻す.
- t が非常に大きいと, 角(急カーブ)の数が r の指数関数のオーダーになる. (中心曲線のGauss曲率の積分が r の指数関数的に増加)



トロピカル幾何

$$\begin{array}{ll}\min & \max(x_1, 3 + x_2) \\ \text{s.t.} & \max(x_1, x_2) \leq 0 \\ & 1 + x_1 \leq \max(0, 2 + x_2) \\ & 1 + x_2 \leq \max(0, 3 + x_1) \\ & x_1 \leq 2 + x_2\end{array}$$



Real Puiseux Series

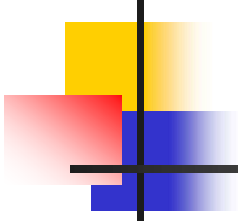
$$f(t) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} t^{\alpha} \quad (\text{finite term}),$$

有限項数, α は実数でも良い

Valuation(付値):最大次数

0の付値: $-\infty$

このような多項式の集合をK**と書く**

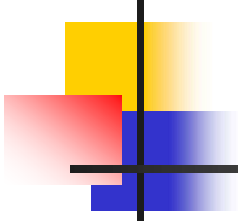


順序と Puiseux Polyhedron

- 辞書式順序 (次数が高い方が強い, 同じ次数であれば大きな係数の勝ち)
- 以下の集合を Puiseux Polyhedron という

$$\mathcal{P} = \{x \in K^d \mid Ax \leq b\}$$

A も b も各要素が Puiseux Polynomial の行列とベクトル



順序と Puiseux Polyhedron

- 以下のように定義:

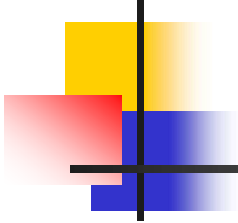
$$\mathcal{P}(t) = \{x \in R^d \mid A(t)x \leq b(t)\}$$

- 次の関係式が成立:

$$x \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \{x(t) \in R^d \mid A(t)x(t) \leq b(t) \text{ for } t \text{ large enough}\}$$

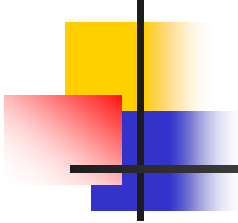
$$\text{val}(\mathcal{P}) \sim \log_t(\mathcal{P}(t)) \quad \mathcal{P} \subset K_+^d \quad \text{であれば } \text{val}(\mathcal{P}) \text{ は}$$

トロピカル多面体



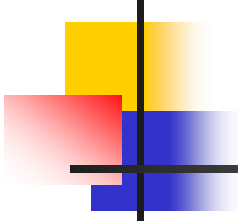
内点法の反復回数との関係

- (ガウス)曲率の大きい悪条件の中心曲線を持つ問題をトロピカル幾何の方で作って実数の世界に戻す.
- 主双対内点法(スケーリング不変)の反復回数が r の指数関数オーダーとなることを厳密に示している.
- 情報幾何的な全曲率との関係: t を非常に大きくとるために, $\bar{\chi}_A$ が e^{e^r} となっている?
- 中心曲線に角が指数オーダーで存在することとクロスオーバーイベントの関係
- いろいろと興味深い疑問が湧く.



第2部: 半正定値計画法

- 主問題・双対問題が共に内点実行可能解を持っている問題(正則な問題)に対する解法しかない.
- 多項式最適化や組み合わせ緩和問題などではしばしば上の状況は満たされない.
- 非ゼロ双対ギャップがある問題や最適値が漸近的にしかみられない問題等, 悪条件な状況が存在する.
- これらを含む任意の半正定値計画問題を解くには?

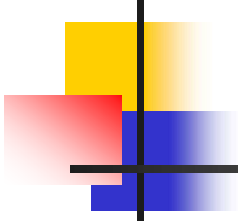


1. 面縮小法と内点法オラクル

- 内点法を理想化した内点法オラクルを導入. 次元の多項式時間回このオラクルを呼ぶことで, 任意のSDPをきちんと解けることを紹介する.

Bruno F. Lourenco, M. Muramatsu and T. Tsuchiya:
A structural geometrical analysis of weakly infeasible SDPs.
JORSJ, Vol.59 (2017).

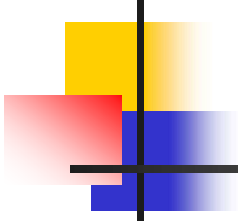
Bruno F. Lourenco, M. Muramatsu and T. Tsuchiya:
Solving SDP completely with an interior-point oracle.
Optimization Methods and Software, Vol.36 (2021).



2. 非正則SDP問題に対する摂動法の解析

- 非正則問題に摂動を加えて正則化した時に性質がどのように変わるか？摂動を十分に小さくするようなことが、近似解法として正当化できるのか？（素朴な疑問）

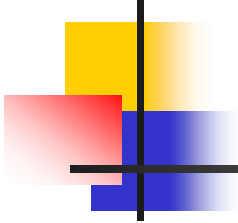
T.Tsuchiya, Bruno F. Lourenco, M. Muramatsu and T. Okuno:
A limiting analysis on regularization of singular SDP and its
implication to infeasible interior-point algorithms.
ArXiv:1912.09696, Dec. 2019, Revised: May 2021.



3. 非正則なSDPに対する内点法の収束解析

- 2の応用として、内点法は、有限の双対ギャップがあるような問題も含め、どんな問題に対してもそれなりにきちんと意味のある答えを出す「想定されていた以上の最強のアルゴリズム」であることを示す.

T.Tsuchiya, Bruno F. Lourenco, M. Muramatsu and T. Okuno:
A limiting analysis on regularization of singular SDP and its
implication to infeasible interior-point algorithms.
ArXiv:1912.09696, Dec. 2019, Revised: May 2021.

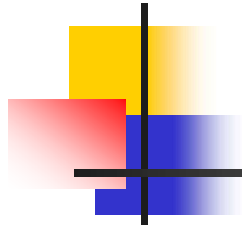


1. 面縮小法と内点法オラクル

- 内点法を理想化した内点法オラクルを導入. 次元の多項式時間回このオラクルを呼んで面縮小法を実行することで, 任意のSDPをきちんと解けることを紹介する.

Bruno F. Lourenco, M. Muramatsu and T. Tsuchiya:
A structural geometrical analysis of weakly infeasible SDPs.
JORSJ, Vol.59 (2017).

Bruno F. Lourenco, M. Muramatsu and T. Tsuchiya:
Solving SDP completely with an interior-point oracle.
Optimization Methods and Software, Vol.36 (2021).



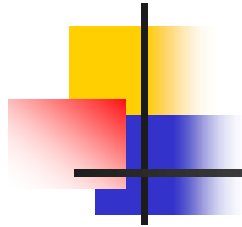
Bruno F. Lourenco, Masakazu Muramatsu and Takashi Tsuchiya:
Facial reduction and partial polyhedrality.
SIAM Journal on Optimization, Vol. 28(2018), pp.2304-2326.

その他面縮小法の文献

H.Waki, M. Muramatsu:

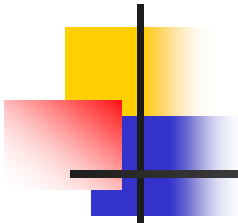
Facial reduction algorithms for conic optimization Problems
Journal of Optimization Theory and Applications, vol.158(2013),
pp.188–215.

この2つ
が最初
に面縮小
法を提案
Jonathan M. Borwein and Henry Wolkowicz:
Facial reduction for a cone-convex programming problem.
J. Aust. Math. Soc., 30:369–380, 1981.
Jonathan M. Borwein and Henry Wolkowicz:
Regularizing the abstract convex program.
J. Math. Anal. App., 83:495–530, 1981.



Motakuri V. Ramana:
An exact duality theory for semidefinite programming and its
complexity implications.
Math. Program. Ser. B, Vol. 77(1997), pp.129–162.

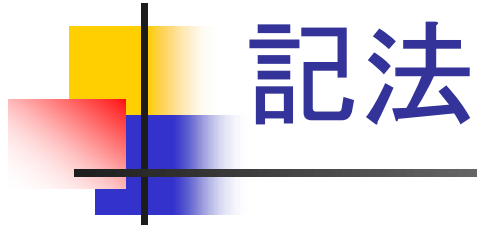
その他 Gabor Pataki, Jos Sturm, Shuzhong Zhang, Z-Q. Luo 等



半正定値計画問題

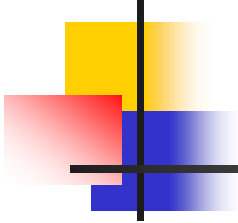
$$\begin{array}{ll} \text{(P)} & \text{minimize} \quad C \bullet X \\ & \text{subject to} \quad A_i \bullet X = b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad X \succeq 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(D)} & \text{maximize} \quad \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ & \text{subject to} \quad S = C - \sum_{i=1}^m A_i y_i, \quad S \succeq 0. \end{array}$$



記法

1. $A_i, i = 1, \dots, m, C$:
 $n \times n$ real symmetric matrices.
2. $b_i, i = 1, \dots, m$: scalar.
3. $U \bullet V = \text{Tr}(UV^T) = \sum_{i,j} U_{ij} V_{ij}$
4. $U \succeq 0$: U is symmetric positive semidefinite.



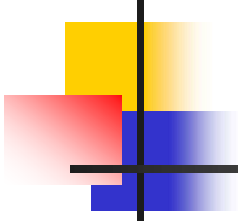
実行可能性の4類型

- Strongly feasible (正定値実行可能解が存在)
- Weakly feasible (実行可能だが正定値解はない)
- Weakly infeasible (実行不能であるが, いくらでも半正定値に近い解が存在する.)

$$\sup \lambda_{\min}(C - \sum_i A_i y_i) = 0, \quad \text{ex.} \quad \begin{pmatrix} x_{11} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \succeq 0$$

- Strongly infeasible (「厳密に」実行不能)

$$\sup \lambda_{\min}(C - \sum_i A_i y_i) < 0$$



半正定値計画法

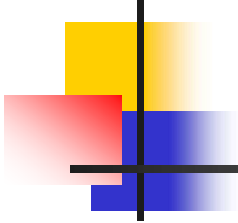
- これから使う基本的ないくつかの命題

- 命題1

$$0 \neq X \succeq 0, \quad Y \succ 0 \Rightarrow X \bullet Y > 0.$$

- 命題2

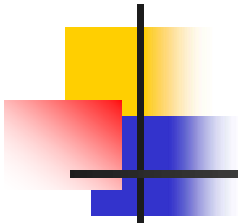
$$X = \begin{pmatrix} 0 & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{pmatrix} \succeq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix}$$



Schur 補行列

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{pmatrix} \succ 0 \Leftrightarrow X \succ 0, \quad Z - Y^T X^{-1} Y \succ 0.$$

$$X \succ 0, \begin{pmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{pmatrix} \succeq 0 \Leftrightarrow X \succ 0, \quad Z - Y^T X^{-1} Y \succeq 0.$$

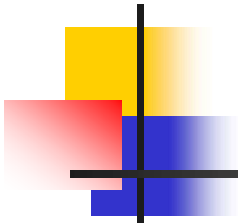


Gordan の補題

次のどちらかが必ず満たされる.

$$(1) \exists y \text{ s.t. } \sum_i A_i y_i \succ 0$$

$$(2) \exists X \neq 0, \forall i \ A_i \bullet X = 0, \ X \succeq 0.$$

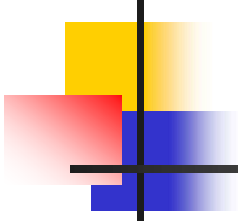


Gordan の補題

次は等価である.

$$(1) \exists y \text{ s.t. } \sum_i A_i y_i \succ 0$$

$$(2) \forall i \ A_i \bullet X = 0, \ X \succeq 0 \Rightarrow X = 0.$$



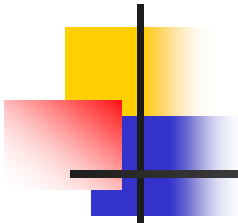
Logdet 関数の性質

正定値対称行列 X の行列式の対数を
 $\log\det(X)$

と定義する. この時 $-\log\det(X)$ は滑らかな
凸関数(ヘッセ行列が正定値)で

$$\frac{\partial}{\partial x_{ij}} -\log\det(X) = -X^{-1}.$$

が成立する.



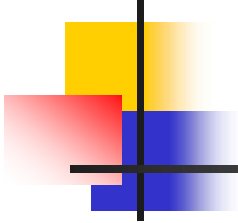
問題のスケーリング

Uを直交行列とする. 変換

$$X' = U^T X U, \quad S' = U^T S U$$

をスケーリングという. スケーリングで内積や行列の正定値性は不変に保たれる.

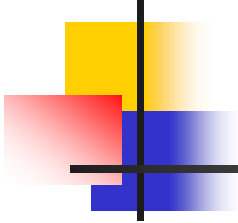
$$X' \bullet S' = \text{Tr}(U^T X U U^T S U) = \text{Tr}(X S) = X \bullet S$$



半正定値計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{(P)} & \text{minimize} \quad C \bullet X \\ & \text{subject to} \quad A_i \bullet X = b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad X \succeq 0. \end{array}$$

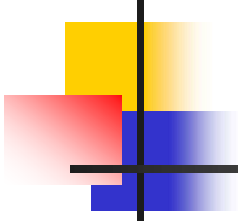
$$\begin{array}{ll} \text{(D)} & \text{maximize} \quad \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ & \text{subject to} \quad S = C - \sum_{i=1}^m A_i y_i, \quad S \succeq 0. \end{array}$$



半正定値計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{(P')} & \text{minimize} \quad C' \bullet X' \\ & \text{subject to} \quad A'_i \bullet X' = b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad X' \succeq 0. \end{array}$$

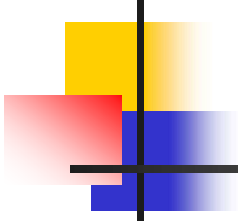
$$\begin{array}{ll} \text{(D')} & \text{maximize} \quad \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ & \text{subject to} \quad S' = C' - \sum_{i=1}^m A'_i y_i, \quad S' \succeq 0. \end{array}$$



問題の基底変換

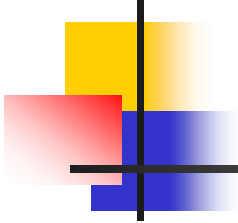
$(A_1, \dots, A_m)$ をベクトル空間の基底とみなして別の基底
 $(B_1, \dots, B_m)$ に変更する

$$-\sum A_i y_i = -\sum B_i u_i$$



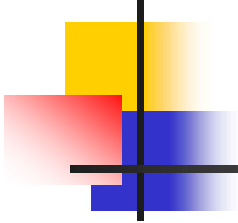
変換に対する不変性

- スケーリング, 基底変換を行っても問題の本質は変わらない. (実行可能性の状態や最適値など.)
- 問題が見やすくなるような座標変換を行っている, とみることが出来る.



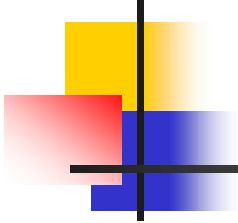
標準的な双対定理とその帰結

- (P)と(D)が強実行可能であれば, 両問題に最適解が存在し, 最適値は一致する.
- (P)と(D)が強実行可能なSDPを正則なSDPということにする.
- 強実行可能 + 等高実行可能集合有界 + 目的関数有界なSDP = 正則SDP が成立.



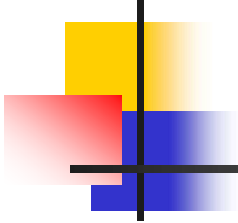
半正定値計画法を完全に解く

- 与えられた任意の問題を完全に解くとは？
 - どのような実行可能性の状態にあるか判定する.
 - 最適解が存在する場合には最適解を求める.
 - 漸近的にしか最適値が達成できない場合には, 任意の精度の近似最適解を求める.
 - 弱実行不能の場合には, 任意の精度で実行可能に近い解を求める.



ややこしい例

- 双対ギャップが0でない
- 最適値が漸近的にしか達成されない
- 目的関数無限大だが無限方向がない



Ramana の例 (非ゼロ双対ギャップ)

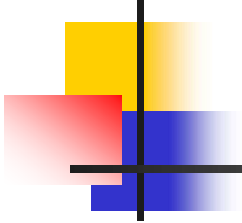
■ (D)

maximize y_0 (Optimal Value: 0)

subject to
$$\begin{pmatrix} y_1 & 0 & -y_0 \\ 0 & \mathbf{1} - y_0 & 0 \\ -y_0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \succeq 0$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 0$$



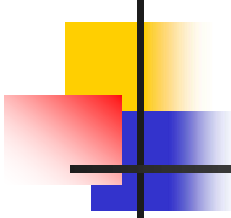
■ (P)

minimize x_{22} (Optimal Value: **1**)

subject to $x_{11} = 0,$

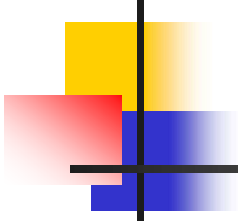
$$x_{22} + 2x_{13} = 1 \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & x_{23} \\ 0 & x_{23} & x_{33} \end{pmatrix},$$
$$X \succeq 0.$$

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 0$$
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



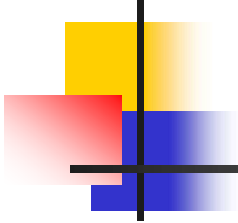
ゲームのルール

- 内点法では正則な問題は解ける.
- 内点法を理想化した「内点法オラクル」を考える.
 - 正則な問題に対しては最適解の一つを与えてくれる.
- このようなオラクルを用いて一般のSDPを「完全」に解くことができるか？



面縮小法 (Facial Reduction)

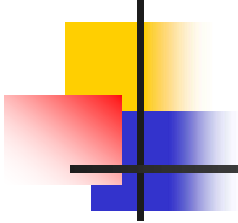
- (正則な)補助問題を解くことを繰り返して実行可能領域を保存しつつ, より次元の低い等価なSDPに書き換える. 最後は内点のあるSDPが得られるか, あるいは実行不能であることがわかる.
- 次の3つのパターンがある.
 - 等価で次元の下がったSDPが得られる :-).
 - 元の問題と等価な内点を持つSDPが得られる. ◎
 - 元の問題が実行不能であることがわかる. △
- 1番目の場合には, 次元の下がったSDPに対してさらにこれを繰り返す.



面縮小法のイメージ

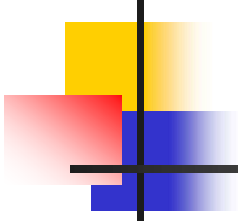
$$U^T S U = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S'_{22} \end{pmatrix} \succeq 0 \Leftrightarrow S'_{22} \succeq 0$$

内点実行可能解あり



(D)に対する面縮小法 (Facial Reduction)

- 面縮小方向 D を求める。(主問題改善無限方向)
 $C \bullet D \leq 0, A_i \bullet D = 0 \ \forall i, D \succeq 0.$
- (A) $C \bullet D < 0$ なる D が存在するならば (D) は強実行不能.
- (B) $C \bullet D = 0, D \neq 0$ なる D が存在するならば、問題を縮小可能なので縮小する.
- (C) $D=0$ しか存在しないならば (D) は強実行可能



場合(A)

対称行列 X が半正定値



すべての半正定値対称行列 Y に
対して $X \cdot Y \geq 0$

$C \bullet D < 0$ ならば、任意の $(C - \sum A_i y_i)$ に対して

$$C \bullet D = (C - \sum A_i y_i) \bullet D < 0$$

となるので、 $(C - \sum A_i y_i)$ は半正定値には
ならない。

$(C - \sum A_i y_i)$ の作るアフィン集合と半正定値対称錐の厳
密な分離超平面が作れるので、(D)は強実行不能。

半正定値対称行列 X が正定値対称行列 Z に対して $X \bullet Z = 0$ となる.

$\Updownarrow$
 $X=0$

場合(B)

$$C \bullet D = 0, \forall i \ A_i \bullet D = 0, 0 \neq D \succeq 0.$$

$$D' = U'^T D U = \begin{pmatrix} D'_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D'_{11} \succ 0 \quad \text{対角化すると考えてよい}$$

$$C' - \sum_i A'_i y \succeq 0 \Leftrightarrow C - \sum_i A_i y \succeq 0. \quad \text{が成立する.}$$

$$(C - \sum A_i y_i) \bullet D = (C' - \sum A'_i y_i) \bullet D' = 0$$

$$(C'_{11} - \sum_i A'_{i11} y) \bullet D'_{11} = 0.$$

$$C'_{11} - \sum_i A'_{i11} y = 0.$$

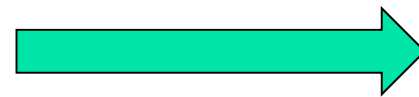
場合(B)(続)

$$\begin{pmatrix} 0 & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{pmatrix} \succeq 0$$



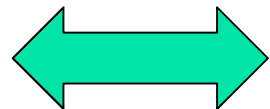
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_{22} \end{pmatrix} \succeq 0$$

$$C' - \sum_i A'_i y \succeq 0, \quad C'_{11} - \sum_i A'_{i11} y = 0.$$



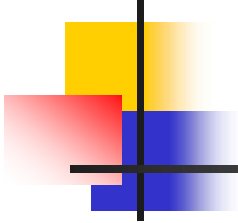
$$C'_{12} - \sum_i A'_{i12} y_i = 0$$

$$C' - \sum_i A'_i y \succeq 0$$



$$\begin{aligned} C'_{22} - \sum_i A'_{i22} y &\succeq 0, \\ C'_{12} - \sum_i A'_{i12} y_i &= 0 \\ C'_{11} - \sum_i A'_{i11} y &= 0. \end{aligned}$$

問題の縮小



場合(C)

Gordan の補題より, 以下を満たす t, y が存在する.

$$tC - \sum A_i y_i \succ 0 \quad (1)$$

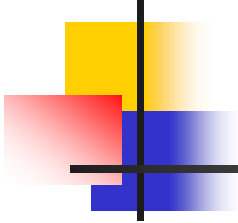
$t=1, t=0, t=-1$ の解が存在する場合に分けられる.

以下, $t=-1$ の解しかないとするすると矛盾することを示す. (「 $t=-1$ のみしかない場合」がありえないことさえ示せばよい.)

$$\forall_i A_i \bullet D = 0, \quad D \succeq 0$$

は0ではない解を持つ (Gordan の補題から, そうでないと (1) は $t=1, t=0$ の解もある). すると,

$$(tC - \sum_i A_i y_i) \bullet D = tC \bullet D > 0$$

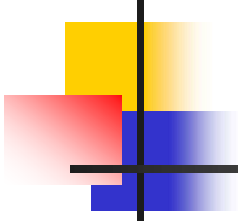


場合(C)

ゆえに,

$$C \bullet D < 0, \forall_i A_i \bullet D = 0, D \succeq 0$$

が0でない解Dを持つことになり, $D=0$ しか解を持たないことと矛盾.



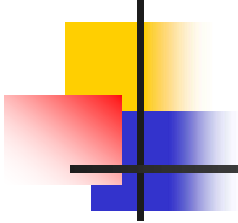
面縮小法の方方向Dを求めるための正則 SDP問題

$$\begin{array}{ll} \min & t \\ \text{s.t.} & -C \bullet (X - tI) + t - w = 0, \\ & I \bullet X + w = 1, \\ & A_i \bullet (X - tI) = 0, \\ & X \succeq 0, \quad t \geq 0, \quad w \geq 0. \end{array}$$

最適値が0の場合D=Xは(A)か(B)を満たす.
最適値が正の場合には(C)となり, 双対問題の最適解から
内点実行可能解が求められる.

ダブル面縮小法 (Double Facial Reduction)

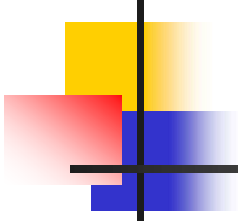
- (D)に対する面縮小法では、(D)の制約条件を整理して、行列のサイズの落ちた、等価な強実行可能な問題(D1)を得る。(あるいは、実行不能であると判定される。)
- (D1)は強実行可能であっても、その双対側は強実行可能とは限らない。
- したがって、まだ(D1)に対して内点法オラクルを用いることはできない。
- そこで、第二フェーズに入る。



強実行可能問題(D1)

$$\begin{array}{ll}\text{maximize} & \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \text{subject to} & S = C - \sum_{i=1}^m A_i y_i, \quad S \succeq 0.\end{array}$$

一般性を失うことなく、目的関数を一つの変数にし、さらに、 A を、後述の正準形に直した以下の問題を扱う。(正準形への変換は、後述のようにスケーリングと基底変換で可能元の問題との等価性は失われない。)

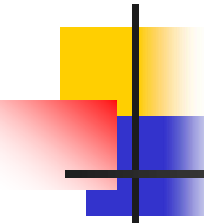


半正定値計画問題

$$\begin{aligned} \text{(P1) minimize} \quad & C \bullet X \\ \text{subject to} \quad & A_0 \bullet X = 1, \\ & A_i \bullet X = 0, \quad i = 1, \dots, m-1, \quad X \succeq 0. \end{aligned}$$

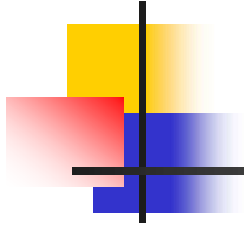
$$\begin{aligned} \text{(D1) maximize} \quad & y_0 \\ \text{subject to} \quad & S = C - A_0 y_0 - \sum_{i=1}^{m-1} A_i y_i, \quad S \succeq 0. \end{aligned}$$

同次系SDPに関する一つの正準形


$$T(y) = - \sum_{i=1}^m A^i y_i \succeq 0$$

0. $A_1, \dots, A_m$ は一次独立.
1. $A^1, \dots, A^l$ ($l \leq m$) は下記の性質を持つ
 $l \times l$ ブロック行列.
 1. $A_{ii}^i \succ 0$ ($i = 1, \dots, l - 1$)
 2. $A_{jk}^i = 0$ ($j > i$ or $k > i$).
2. 右下に対応するSDPは0しか解を持たない.

$$- \sum_{i=1}^m A_{ll}^i y_i = - \sum_{i=l+1}^m A_{ll}^i y_i \succeq 0$$

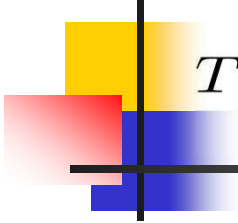


Example $m=5, l=3$

$$A^1 = \begin{pmatrix} A_{11}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{11}^1 \succ 0.$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} A_{11}^2 & A_{12}^2 & A_{13}^2 & A_{14}^2 & A_{15}^2 \\ (A_{12}^2)^T & A_{22}^2 & 0 & 0 & 0 \\ (A_{13}^2)^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (A_{14}^2)^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (A_{15}^2)^T & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{22}^2 \succ 0.$$

A Canonical Representation of Homogeneous SDP Feasibility System

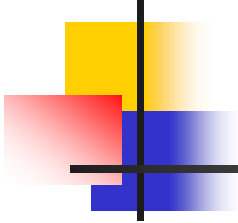


$$T(y) = - \sum_{i=1}^m A^i y_i \succeq 0$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} A_{11}^3 & A_{12}^3 & A_{13}^3 & A_{14}^3 & A_{15}^3 \\ (A_{12}^3)^T & A_{22}^3 & A_{23}^2 & A_{24}^2 & A_{25}^2 \\ (A_{13}^3)^T & (A_{23}^3)^T & A_{33}^3 & 0 & 0 \\ (A_{14}^3)^T & (A_{24}^3)^T & 0 & 0 & 0 \\ (A_{15}^3)^T & (A_{25}^3)^T & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{33}^3 \succ 0.$$

$$\begin{pmatrix} T_{44}(y) & T_{45}(y) \\ T_{45}(y)^T & T_{55}(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{44}^4 & A_{45}^4 \\ (A_{45}^4)^T & A_{55}^4 \end{pmatrix} y_4 + \begin{pmatrix} A_{44}^5 & A_{45}^5 \\ (A_{45}^5)^T & A_{55}^5 \end{pmatrix} y_5 \succeq 0$$

これは0しか解がない.



ご利益

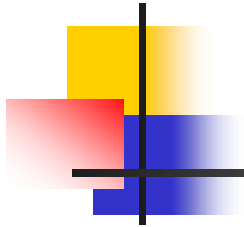
■ 元の問題

$$W - \sum_i A^i y_i \succeq 0$$

とボトムブロック

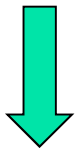
$$W_{ll} - \sum_i A_{ll}^i y_i \succeq 0$$

の強実行可能性は一致.



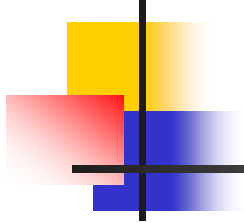
$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & L_{44} & L_{45} \\ * & * & * & L_{45}^T & L_{55} \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} A_{11}^3 & A_{12}^3 & A_{13}^3 & A_{14}^3 & A_{15}^3 \\ (A_{12}^3)^T & A_{22}^3 & A_{23}^3 & A_{24}^3 & A_{25}^3 \\ (A_{13}^3)^T & (A_{23}^3)^T & A_{33}^3 & 0 & 0 \\ (A_{14}^3)^T & (A_{24}^3)^T & 0 & 0 & 0 \\ (A_{15}^3)^T & (A_{25}^3)^T & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} L_{44} & L_{45} \\ L_{45}^T & L_{55} \end{pmatrix} \succ 0 \quad + \alpha_2 \begin{pmatrix} A_{11}^2 & A_{12}^2 & A_{13}^2 & A_{14}^2 & A_{15}^2 \\ (A_{12}^2)^T & A_{22}^2 & 0 & 0 & 0 \\ (A_{13}^2)^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (A_{14}^2)^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (A_{15}^2)^T & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

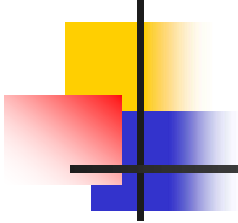


$\alpha_1 \gg \alpha_2 \gg \alpha_3 \gg 0$
 とすると全体が必ず
 正定値にできる！

$$+ \alpha_1 \begin{pmatrix} A_{11}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



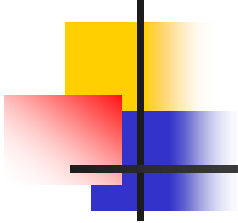
$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & L_{44} & L_{45} \\ * & * & * & L_{45}^T & L_{55} \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} A_{11}^3 & A_{12}^3 & A_{13}^3 & A_{14}^3 & A_{15}^3 \\ (A_{12}^3)^T & A_{22}^3 & A_{23}^2 & A_{24}^2 & A_{25}^2 \\ (A_{13}^3)^T & (A_{23}^3)^T & A_{33}^3 & 0 & 0 \\ (A_{14}^3)^T & (A_{24}^3)^T & 0 & 0 & 0 \\ (A_{15}^3)^T & (A_{25}^3)^T & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 + \alpha_2 \begin{pmatrix} A_{11}^2 & A_{12}^2 & A_{13}^2 & A_{14}^2 & A_{15}^2 \\ (A_{12}^2)^T & A_{22}^2 & 0 & 0 & 0 \\ (A_{13}^2)^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (A_{14}^2)^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (A_{15}^2)^T & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 + \alpha_1 \begin{pmatrix} A_{11}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



半正定値計画問題

(P) minimize $C \bullet X$
subject to $A_0 \bullet X = 1,$
 $A_i \bullet X = 0, \quad i = 1, \dots, m-1, \quad X \succeq 0.$

(D) maximize y_0
subject to $S = \underbrace{C - A_0 y_0}_W - \sum_{i=1}^{m-1} A_i y_i, \quad S \succeq 0.$

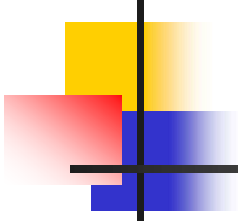


(D),(D1)と等価な等高実行可能集合が
有界なSDPが得られた！(D2)

$$\max y_0 \text{ s.t. } C - A^0 y_0 - \sum_i A^i y_i \succeq 0$$

$$\max y_0 \text{ s.t. } C_{ll} - A_{ll}^0 y_0 - \sum_i A_{ll}^i y_i \succeq 0$$

内点実行可能解あり、実行可能領域の目的関数の一定値集合が有界



(D2)の双対問題(P2)

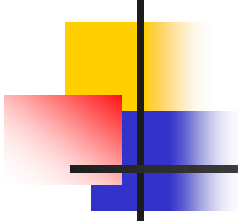
$$\min C_{ll} \bullet X_{ll}$$

$$\text{s.t. } A_{0ll} \bullet X_{ll} = 1, \quad A_{ill} \bullet X_{ll} = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad X_{ll} \succeq 0.$$

実行可能かどうかを面縮小法で判定

(P2)が実行可能な場合: 弱双対性から(D2)の目的関数の有界性がわかる. したがって, (P2), (D2) は (D)と最適値が同じ正則問題. 内点法オラクルで解ける.

(P2)が実行不能な場合: (D2)の目的関数是有界でない. もし, 有界とすると, (P2)と(D2)は正則問題となり, (P2)の実行不能性に矛盾する.

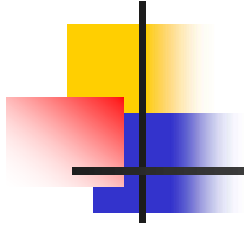


実は, (P2)=(P1) である.

$$A^1 \bullet X = 0 \Leftrightarrow A_{11}^1 \bullet X_{11} = 0 \Leftrightarrow X_{11} = 0 \quad (A_{11}^1 \succ 0)$$

X の 第1行, 第1列ブロックはすべて0. 以下同様に,
 X_{ll} ブロック以外はすべて0.

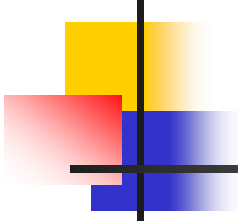
(P2)には最適解があったので, (P1)にも最適解がある!
(D1)と(D2)の関係はもう少し複雑である. (D2)には
最適解があるが, (D1)には最適解はないかもしれない.
(がいくらでも最適値に近い(D1)の近似最適解は, (D2)
の近似最適解さえあれば, 正準形より容易に作ることができる.)



$$A^1 \bullet X = 0, \dots, A^5 \bullet X = 0, \quad X \succeq 0$$

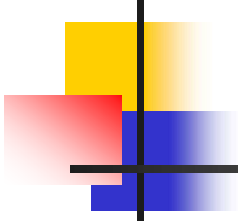
$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X_{44} & X_{45} \\ 0 & 0 & 0 & X_{45}^T & X_{55} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X_{44} & X_{45} \\ X_{45}^T & X_{55} \end{pmatrix} \succeq 0.$$

$$\begin{pmatrix} X_{44} & X_{45} \\ X_{45}^T & X_{55} \end{pmatrix} \succ 0 \text{ is ensured to exist (Gordan's Lemma)}$$



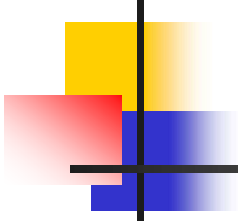
まとめ

- (P) , (D) を解きたい.
- (D) に面縮小法を適用して, 等価で内点のある問題 $(D1)$ を作る.
- $(D1)$ を正準形に変形した上で (D) の最適値と一致する問題 $(D2)$ とその双対問題 $(P2)$ を作る. $(D2)$ は等高実行可能集合が有界な問題.
- $(P2)$ の実行可能性を確認. 実行不能であれば (D) の目的関数は非有界. 実行可能であれば, $(P2)$ と $(D2)$ を解くと最適値が求められる.
- 各ステップでは正則な問題しか解かない.



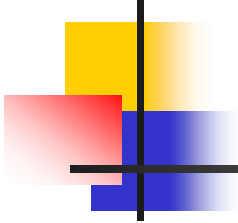
まとめ

- (P)に面縮小法を適用するバージョンもある. 考え方は同様である.



(P1)と(D1)についての考察から得られた双対定理

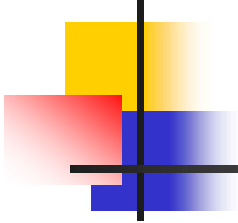
あるSDPが強実行可能であれば、双対ギャップは0(最適値が±無限大も含む)で、最適値が有限の場合、その双対問題は、最適解を持つ。



2. 非正則SDP問題に対する摂動法の解析

- 非正則問題に摂動を加えて正則化した時に性質がどのように変わるか？摂動を十分に小さくするようなことが、近似解法として正当化できるのか？（素朴な疑問）

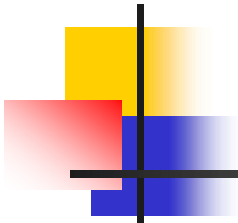
T.Tsuchiya, Bruno F. Lourenco, M. Muramatsu and T. Okuno:
A limiting analysis on regularization of singular SDP and its
implication to infeasible interior-point algorithms.
ArXiv:1912.09696, Dec. 2019, Revised: May 2021.



3. 非正則なSDPに対する内点法の収束解析

- 2の応用として、内点法は、有限の双対ギャップがあるような問題も含め、どんな問題に対してもそれなりにきちんと意味のある答えを出す「想定されていた以上の最強のアルゴリズム」であることを示す.

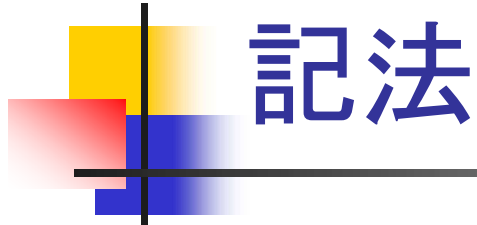
T.Tsuchiya, Bruno F. Lourenco, M. Muramatsu and T. Okuno:
A limiting analysis on regularization of singular SDP and its
implication to infeasible interior-point algorithms.
ArXiv:1912.09696, Dec. 2019, Revised: May 2021.



半正定値計画問題

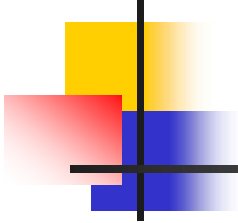
$$\begin{array}{ll} \text{(P)} & \text{minimize} \quad C \bullet X \\ & \text{subject to} \quad A_i \bullet X = b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad X \succeq 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(D)} & \text{maximize} \quad \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ & \text{subject to} \quad S = C - \sum_{i=1}^m A_i y_i, \quad S \succeq 0. \end{array}$$



記法

1. $A_i, i = 1, \dots, m, C$:
 $n \times n$ real symmetric matrices.
2. $b_i, i = 1, \dots, m$: scalar.
3. $U \bullet V = \text{Tr}(UV^T) = \sum_{i,j} U_{ij} V_{ij}$
4. $U \succeq 0$: U is symmetric positive semidefinite.



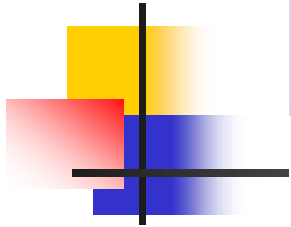
実行可能性の4類型

- 強実行可能 (正定値実行可能解が存在)
- 弱実行可能 (実行可能だが正定値解はない)
- 弱実行不能 (実行不能であるが, いくらでも半正定値に近い解が存在する.)

$$\sup \lambda_{\min}(C - \sum_i A_i y_i) = 0, \quad \text{ex.} \quad \begin{pmatrix} x_{11} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \succeq 0$$

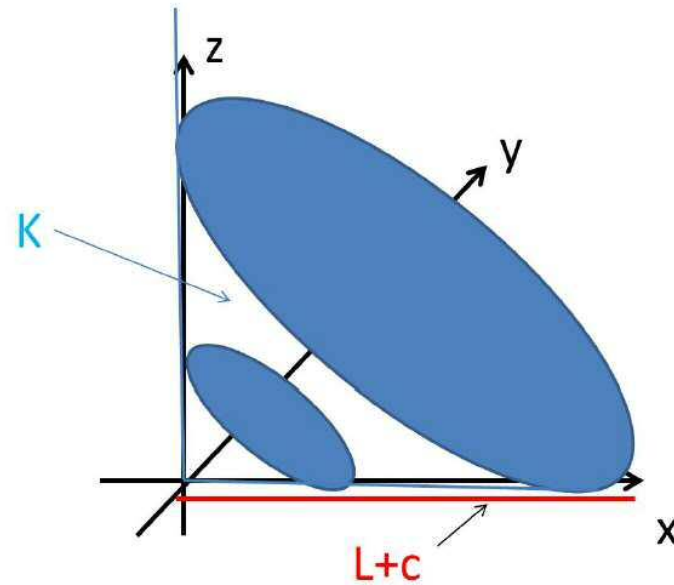
- 強実行不能 (「厳密に」実行不能)

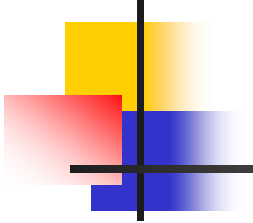
$$\sup \lambda_{\min}(C - \sum_i A_i y_i) < 0$$



Basic example of weakly infeasible problem

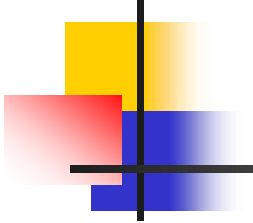
$$L + c = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad K = (2 \times 2 \text{ PSD cone})$$





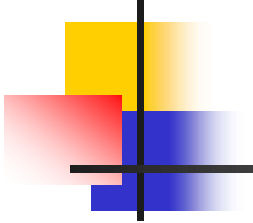
双対性(標準的仮定)

- (P) と (D) が強実行可能であれば, 両問題の最適値は一致し, 両問題に最適解が存在する.
- 主双対強実行可能性は, 半正定値計画問題のアルゴリズムや理論的解析における標準的仮定.
- 主双対問題が両方とも強実行可能でない場合の内点法の解析はほとんどなされていない.



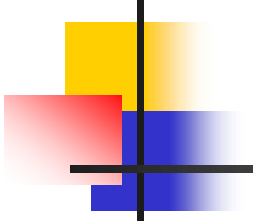
Slater 強双対性

- もし (P) が強実行可能ならば, 両問題の最適値は一致する.
- この時, (D) が実行可能ならば (D) は最適解を持つ. しかし, 主問題の最適値は, 漸近的にしか達成されないこともある.
- 同様の結果が (D) の強実行可能性を仮定しても成立.



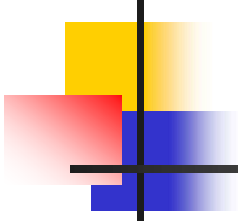
漸近実行可能性

- 問題が実行可能あるいは弱実行不能であることを、漸近実行可能であるという.
- 漸近実行可能であれば、無限小の摂動で強実行可能とできる.
- 主問題と双対問題が共に漸近実行可能であることを主双対漸近実行可能という.
- 任意の問題は、(1)主双対漸近実行可能あるいは(2)どちらかの問題が強実行不能のいずれかである.



漸近実行可能性

- 主双対漸近実行可能問題は有限の双対ギャップを持つ問題や無限大の双対ギャップを持つ問題を含む.



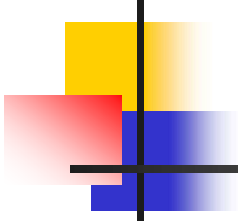
漸近強双対定理 (Duffin 1957)

$$\text{a-val}(\mathbf{D}) \equiv \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{\|\Delta C\| < \varepsilon} \sup \{b^T y \mid C + \Delta C - \sum_i A_i y_i \succeq 0\}$$

- (D)が漸近実行可能とする. この時,

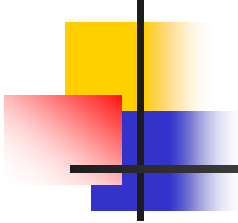
$$\text{a-val}(\mathbf{D}) = \text{Opt.value of (P)}$$

(Opt. value of (P) $\neq$ Opt.value of (D) でも上の
等式は成立.)



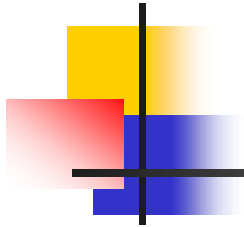
この発表の目標

- 漸近的強双対定理の拡張.
- 非ゼロ双対ギャップがあるような問題に対して主問題・双対問題両方を摂動した時の摂動解析.
- 問題に対する仮定を一切おかない非実行可能点列内点法の収束解析.



主問題と双対問題の最適値が 違う例 (Ramana)

- 主問題と双対問題が弱実行可能.



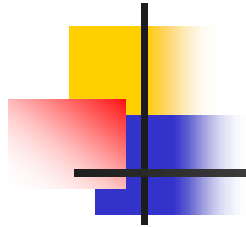
■ (D)

maximize y_0 (Optimal Value: 0)

subject to
$$\begin{pmatrix} y_1 & 0 & -y_0 \\ 0 & \alpha - y_0 & 0 \\ -y_0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \succeq 0$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 0$$



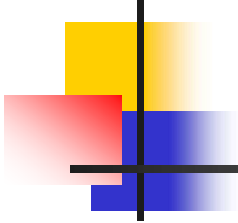
■ (P)

minimize αx_{22} (Optimal Value: α)

subject to $x_{11} = 0,$

$$x_{22} + 2x_{13} = 1 \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & x_{23} \\ 0 & x_{23} & x_{33} \end{pmatrix},$$
$$X \succeq 0.$$

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 0$$
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



(D)の摂動による正則化

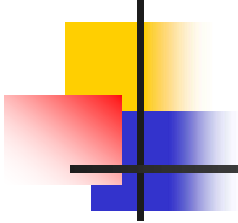
■ (Perturbed D) ($C \rightarrow C + \varepsilon I$)

maximize y_0 (Optimal Value: $\alpha + \varepsilon$)

subject to
$$\begin{pmatrix} y_1 + \varepsilon & 0 & -y_0 \\ 0 & \alpha - y_0 + \varepsilon & 0 \\ -y_0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \succeq 0$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 0$$



(P)の摂動による正則化

■ (Perturbed P)

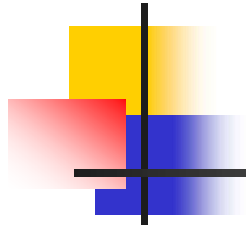
minimize αx_{22} (Optimal Value: $-\alpha\varepsilon$)

subject to $x_{11} = 0,$

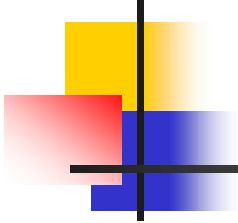
$$x_{22} + 2x_{13} = 1$$

$$X \succeq -\varepsilon I.$$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} + \varepsilon & 0 & (1 - x_{22})/2 \\ 0 & x_{22} + \varepsilon & x_{23} \\ (1 - x_{22})/2 & x_{23} & x_{33} + \varepsilon \end{pmatrix} \succeq 0,$$

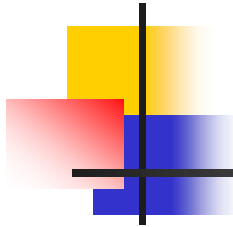


- Observations:
 - Opt value of (Perturbed D)
 - ➔ Opt value of (P)
 - Opt value of (Perturbed P)
 - ➔ Opt value of (D)



仮定

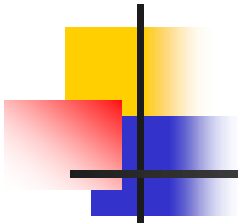
- (D) は漸近の実行可能である.
- この仮定の下で, (D)は, 無限小の摂動で強実行可能とできる.



(D)の正則化

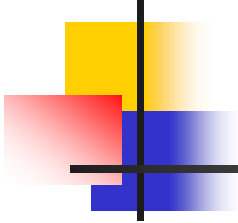
$$\begin{array}{ll} (P(\varepsilon)) & \text{minimize} \quad (C + \varepsilon I) \bullet X \\ & \text{subject to} \quad A_i \bullet X = b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad X \succeq 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (D(\varepsilon)) & \text{maximize} \quad \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ & \text{subject to} \quad S = (C + \varepsilon I) - \sum_{i=1}^m A_i y_i, \quad S \succeq 0. \end{array}$$



(D)の正則化と「簡潔漸近的強双対定理」

- 仮定の下で, 任意の $\varepsilon > 0$ で, $(D(\varepsilon))$ は強実行可能で, 摂動された問題の主問題と双対問題の最適値は一致する.
- $(D(\varepsilon))$ の最適値は, $\varepsilon \rightarrow 0$ で (P) の最適値に近づく.
- $(D(\varepsilon))$ の最適値は漸近的にしか達成されないこともある.



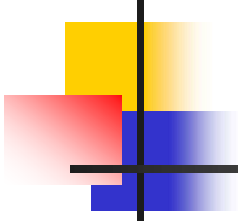
漸近的強双対定理 (Duffin 1957)

$$\text{a-val}(\mathbf{D}) \equiv \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{\|\Delta C\| < \varepsilon} \sup \{b^T y \mid C + \Delta C - \sum_i A_i y_i \succeq 0\}$$

- (D)が漸近実行可能とする. この時,

$$\text{a-val}(\mathbf{D}) = \text{Opt.value of (P)}$$

(Opt. value of (P) $\neq$ Opt.value of (D) でも上の
等式は成立.)



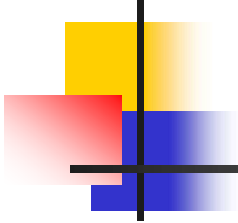
簡潔漸近的強双対定理(我々)

$$v_a(D) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup \{ b^T y \mid C + \varepsilon I - \sum A_i y_i \succeq 0 \}$$

- (D)が漸近実行可能とする. この時,

$$v_a(D) = \text{Opt.value of (P)}$$

(Opt. value of (P) $\neq$ Opt.value of (D) でも上の
等式は成立.)



証明

(P)の実行可能領域 = (P(ε))の実行可能領域

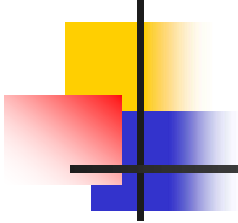
(P)が実行可能な場合を考える. (P)の最適値を C^* と記す.
(D(ε))は内点実行可能解を持つのでその双対問題(P(ε))は最適解を持つ. それを $X(\varepsilon)$ と記す. D(ε)とP(ε)の共通の最適値を $v(\varepsilon)$ と書く. $v(\varepsilon)$ は ε の単調減少関数である.

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} v(\varepsilon) = v^*$$

と置くと, $X(\varepsilon)$ は(P)の実行可能解でもあるので, 任意の ε に対して

$$v(\varepsilon) = C \bullet X(\varepsilon) + \varepsilon I \bullet X(\varepsilon) \geq v^* \geq C^*$$

が成立する. ある定数 $\delta > 0$ が存在し, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して
 $v(\varepsilon) = C \bullet X(\varepsilon) + \varepsilon I \bullet X(\varepsilon) \geq C^* + \delta$ となるとする.



証明

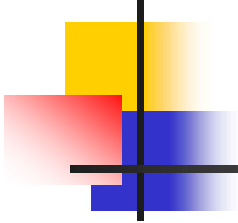
(P)の実行可能領域 = (P(ε))の実行可能領域

$C \bullet X^k \rightarrow C^*$ となる(P)の(そして(P(ε))の)実行可能解の列 X^k を考える. すると, 0 に収束する正の点列 ε^k をとって,

$$C \bullet X^k + \varepsilon^k I \bullet X^k \rightarrow C^*$$

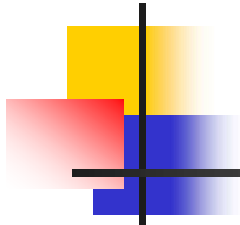
とできる. 一方, X^k は(P(ε))の実行可能解でもあるから
各kについて,

$C \bullet X^k + \varepsilon^k I \bullet X^k \geq C \bullet X(\varepsilon^k) + \varepsilon^k I \bullet X(\varepsilon^k) \geq v^* > C^*$
が成立する. 左辺は C^* に収束するので, これは矛盾である.



仮定

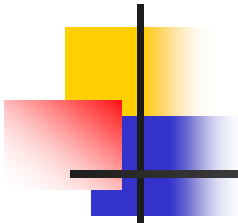
- (P) は漸近的执行可能.
- この仮定の下で, (P)は, 無限小の摂動で strongly feasible とできる.



(P)の正則化

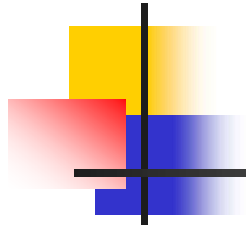
$$\begin{aligned} (P(\eta)) \quad & \text{minimize} && C \bullet X \\ & \text{subject to} && A_i \bullet X = b_i + \eta A_i \bullet I, \quad i = 1, \dots, m, \\ & && X \succeq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (D(\eta)) \quad & \text{maximize} && \sum_{i=1}^m (b_i + \eta A_i \bullet I) y_i \\ & \text{subject to} && S = C - \sum_{i=1}^m A_i y_i, \quad S \succeq 0. \end{aligned}$$

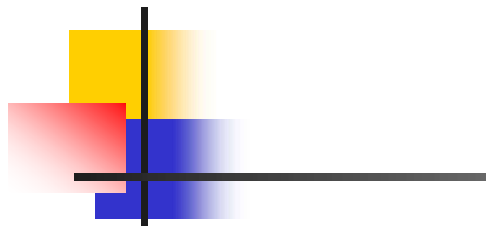


(P)の正則化と「簡潔漸近的強双対定理」

- $(P(\eta))$ は強実行可能であり, 主問題と双対問題の最適値は一致する.
- X が元の問題の実行可能解であれば,
 $X + \eta I$ は $(P(\eta))$ の正定値実行可能解.
- $(P(\eta))$ の最適値は $\eta \rightarrow 0$ で (D) の最適値に収束する.



- Observations:
 - Opt value of $(D(\varepsilon))$
 - ➔ Opt value of (P)
 - Opt value of $(P(\eta))$
 - ➔ Opt value of (D)



目 次

序	小柳 賢一	I
・ オ 2 回数学計画シンポジウム		
趣 意 書		III
開 催 要 領		IV
組 織 委 員 ・ 報 告 者 ・ 参 加 者 名 簿		VI
双対定理について.....	竹内 啓	1
1 LPにおける双対性		1
2 LPの双対条件の拡張		4
3 目的関数が線型でない場合		6
4 制約条件が線型でない場合		8
5 双対問題の意味		9
6 条件が凸でない場合		11
7 無限次元の場合		13
参 考 文 献		14
討 論		
竹内氏の報告に対する討論		16
双対定理について(紙上討論).....	小松彦三郎	26
あ と が き	森口 繁一	35

性”とは何であるかということに、明確な定義を下すことはできないのかもしれない。しかし、いろいろな場面から考えてみることは必要であろうと思う。
北川：淡中教授も招待いただきましたが多忙のため参加できなくて、まことに残念です。

古瀬：Fenchel のやり方で典型的 LP

$$\left. \begin{array}{l} \max \quad c'x \\ A_x \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \quad (I)$$

の dual を作ると、変数 u についての minimizing problem が出てくる (II')。

また (I) の典型的 dual

$$\left. \begin{array}{l} \min \quad b'u \\ A'u \geq c \\ u \geq 0 \end{array} \right\} \quad (II')$$

に対して Fenchel 法の dual を作ると、変数 y についての maximizing problem がでてくる (I')。

この (I') と (I) とは同じではない。しかし、(I') と (II') とは互いに dual の関係に立つ。

森口：1960 年ローマで開かれたシンポジウムでニューヨーク大学の Moser が、後藤英一さんが考案したエサキ・ダイオードを二つ使って、とても速い演算回路を作る方法の拡張にあたる話をしていましたが、これも双対原理の応用であるといえます。[Moser: Bistable systems of differential equations, PIOC Symposium Rome 1960-Differential and Integral Equations, Birkhäuser, 1960, 320-329.]

〔紙上討論〕 双対定理について

小松彦三郎

無限次元でやるのが一番やさしくろうといった私の発言を裏がきするため無限次元空間での双対定理の証明を与えました。本文中で証明が与えられていない部分のおきないにもなるうかと思ひます。本文に述べられたものよりすこし

一般になっています。デュビシェフ不等式の duality の証明には reflexivity が使えませんので、この形のほうが便利と思います。

なお、本文 3 頁に述べられている証明は、僕にはよく理解できません。特に 5 行目から 13 行目までが理解困難です。もしもう一版出されるのであれば、もう少しわかりやすくしていただければと思います。

僕の場合は有限次元をこの後で扱うつもりでしたが、なかなかむつかしく、うまい形にまとめることができませんでした。時間もありませんし、一応これだけにしておきたいと思っています。

数学者がこの種の問題を取り扱う場合どのような formulation と解法を与えるかを示す実例として、以下 linear problem の双対定理を述べる。

X および Y を局所凸線型位相空間、

X' および Y' をそれぞれ X および Y の共役空間、すなわち

X および Y 上の連続な一次汎関数全体の空間 とする。

X の元 x と X' の元 x' との内積を $\langle x, x' \rangle$ で表わす。

$\mathcal{C} \subset X$ が凸 cone であるとは、すべての $x_1, x_2 \in \mathcal{C}$ および $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ に対して $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in \mathcal{C}$ が成り立つことと定義する。このとき

$\mathcal{C}^+ = \{ x' \in X' ; \langle x, x' \rangle \geq 0 \text{ がすべての } x \in \mathcal{C} \text{ に対して成り立つ} \}$ を $\mathcal{C}$ と共役な凸 cone という。これは明らかに X' 中の凸 cone となる。

以上の準備の下で次に formulate する定理が目的の定理である。

定理 1

$A: X \rightarrow Y$ を連続な一次作用素

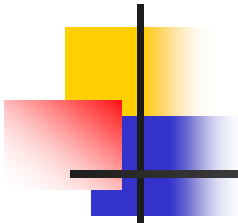
$\mathcal{C} \subset X$ を凸 cone

$\mathcal{K} \subset Y$ を内点が空でない凸 cone

$b \in Y, c' \in X'$ かつ

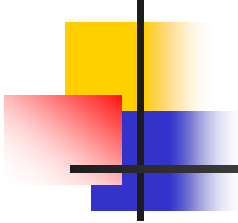
$b - Ax_0$ が $\mathcal{K}$ の内点になるような $x_0 \in \mathcal{C}$ が存在すると仮定する。このとき $\pm \infty$ も許して

$$(I) \quad \sup \{ \langle X, c' \rangle ; X \in \mathcal{C}, b - AX \in \mathcal{K} \} \\ = \inf \{ \langle b, y' \rangle ; y' \in \mathcal{K}^+, A'y' - c' \in \mathcal{C}^+ \}$$



主双对正則化

$$\begin{aligned} \text{(P)} \quad & \text{minimize} && (C + \varepsilon I) \bullet X \\ & \text{subject to} && A_i \bullet X = b_i + \eta A_i \bullet I, \quad i = 1, \dots, m, \\ & && X \succeq 0. \\ \text{(D)} \quad & \text{maximize} && \sum_{i=1}^m (b_i + \eta A_i \bullet I) y_i \\ & \text{subject to} && S = (C + \varepsilon I) - \sum_{i=1}^m A_i y_i, \quad S \succeq 0. \end{aligned}$$



仮定

以下，主双対漸近の実行可能性を仮定する.
両問題は実行可能か弱実行不能.

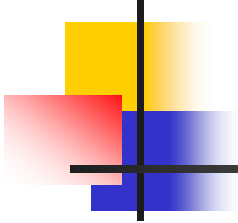
主双对正则化

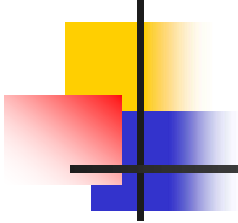
(P(ϵ, η))

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && (C + \epsilon I) \bullet X \\ & \text{subject to} && A_i \bullet X = b_i + \eta A_i \bullet I, \quad i = 1, \dots, m, \\ & && X \succeq 0. \end{aligned}$$

(D(ϵ, η))

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && \sum_{i=1}^m (b_i + \eta A_i \bullet I) y_i \\ & \text{subject to} && S = (C + \epsilon I) - \sum_{i=1}^m A_i y_i, \quad S \succeq 0. \end{aligned}$$

- 
- 両問題は, 任意の $\varepsilon > 0, \eta > 0$ で strongly feasible. ゆえに, 共通の最適値を持つ.
 - (P) と (D) の自然な正則化である.
 - 共通の最適値を $v(\varepsilon, \eta)$ と記す.
 - 以下の議論は, $(P(\varepsilon, \eta))$ と $(D(\varepsilon, \eta))$ の摂動行列 I (恒等行列) が任意の正定値対称行列でも成立する.

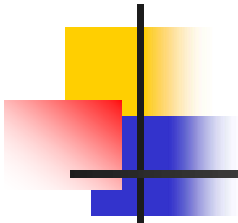
- 
- これまでの説明から下記が分かる

$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} v(\varepsilon, 0) = \text{Optimal value of (P).}$

$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} v(0, \eta) = \text{Optimal value of (D).}$

- A natural question: what is

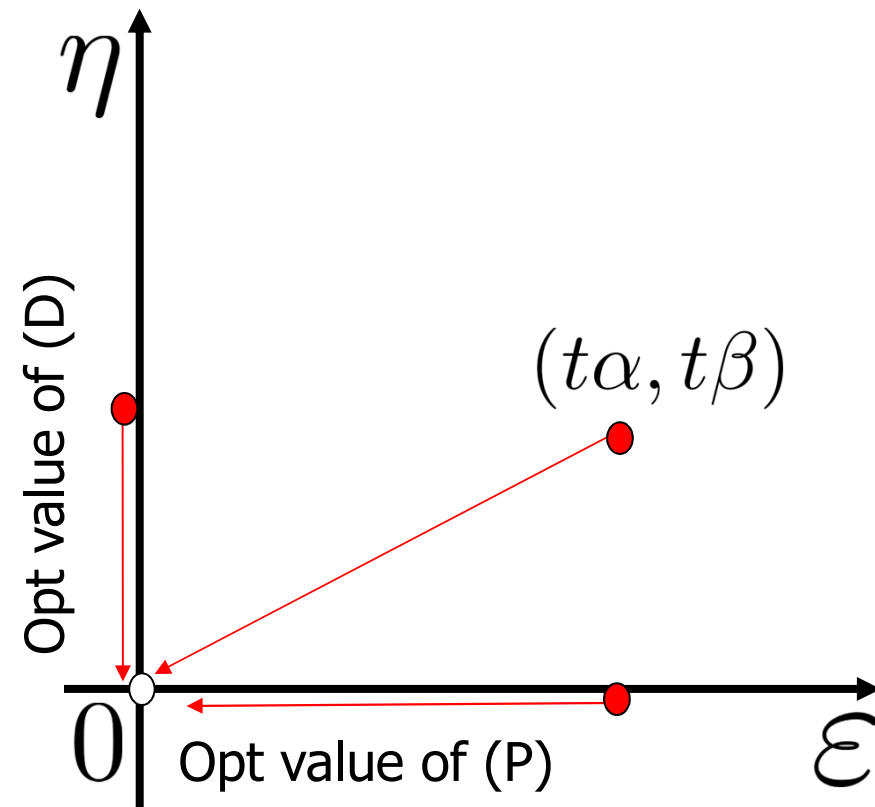
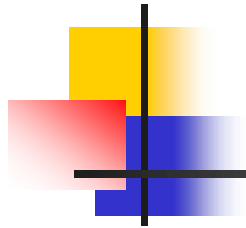
$\lim_{\varepsilon \downarrow 0, \eta \downarrow 0} v(\varepsilon, \eta)$? Does it exist?

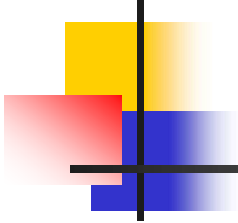


主双对正则化

$$\begin{array}{ll} \text{(Pt)} & \text{minimize} \quad (C + t\alpha I) \bullet X \\ & \text{subject to} \quad A_i \bullet X = b_i + t\beta A_i \bullet I, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \quad \quad \quad X \succeq 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(Dt)} & \text{maximize} \quad \sum_{i=1}^m (b_i + t\beta A_i \bullet I) y_i \\ & \text{subject to} \quad S = (C + t\alpha I) - \sum_{i=1}^m A_i y_i, \quad S \succeq 0. \end{array}$$





主結果 1

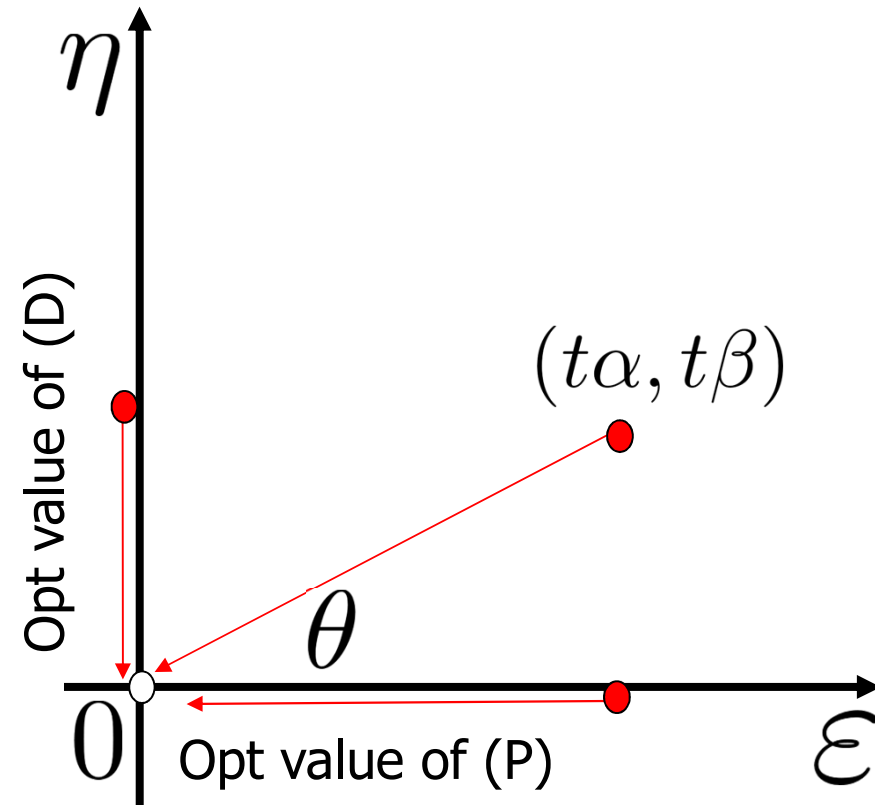
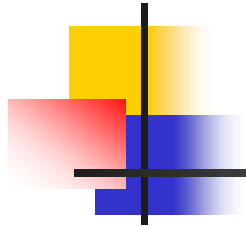
- もし $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$, で少なくとも片一方は0でないとする. すると $\lim_{t \downarrow 0} v(t\alpha, t\beta)$ が存在し,

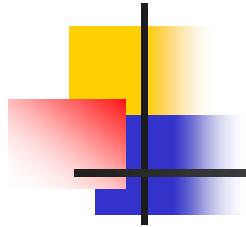
(Dual Optimal Value)

$$\leq \lim_{t \downarrow 0} v(t\alpha, t\beta) \leq (\text{Primal Optimal Value})$$

- 下記を定義する.

$$v_a(\theta) = \lim_{t \downarrow 0} v(t\alpha, t\beta), \quad \tan \theta = \beta/\alpha.$$

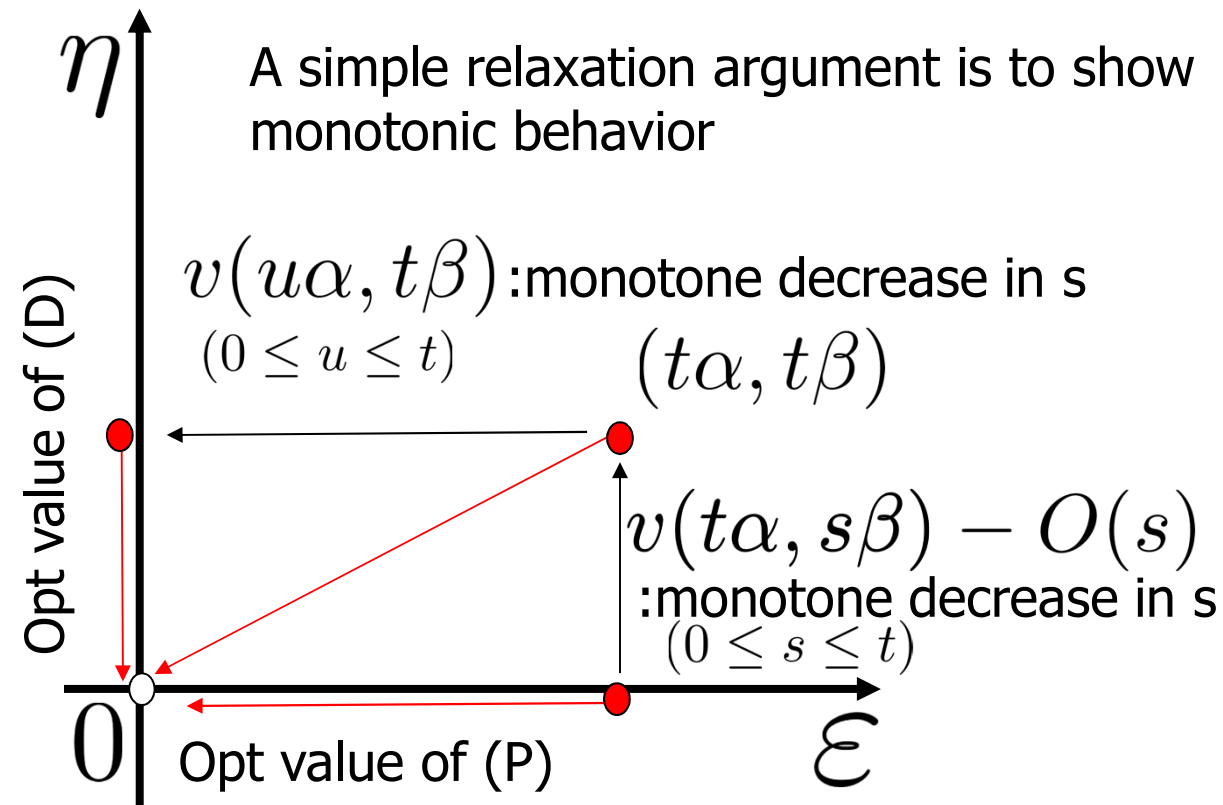




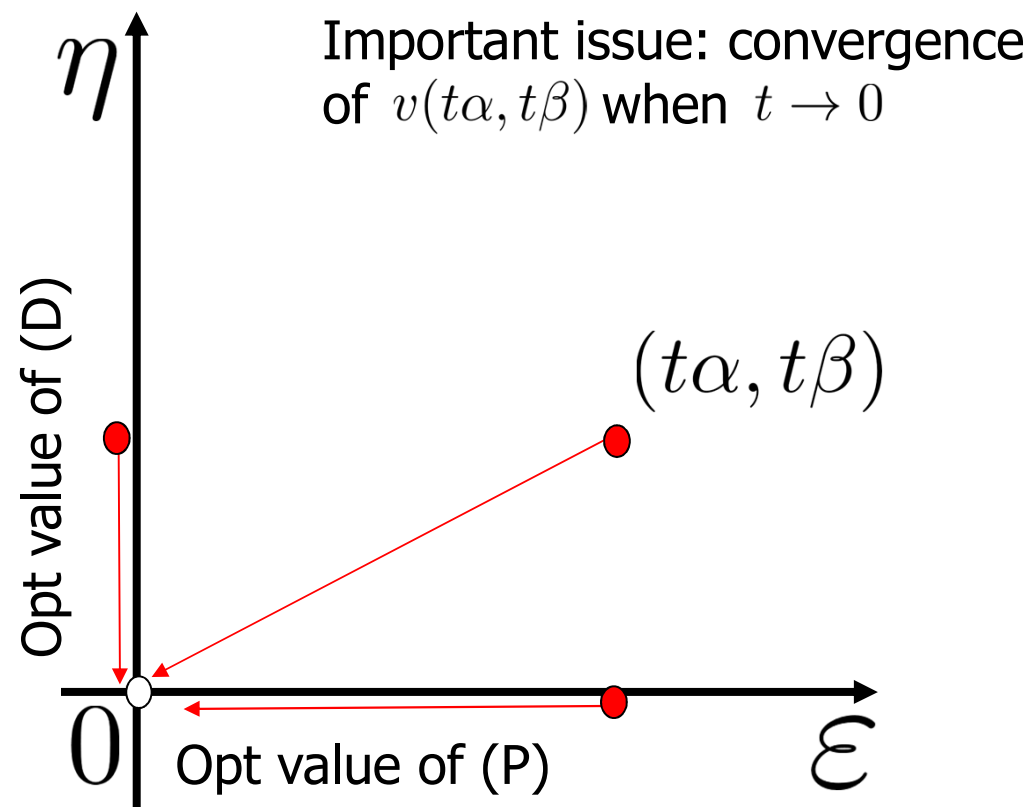
このとき,

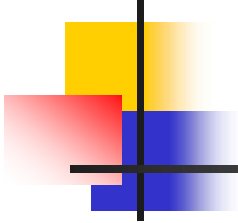
- $v_a(0) = (\text{Primal Optimal Value})$
- $v_a(\pi/2) = (\text{Dual Optimal Value})$
- $v_a(\theta)$ は $\theta \in (0, \pi/2)$ で連続単調減少関数.

証明の概要



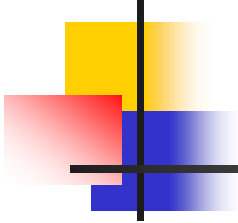
証明の概要





証明の概要

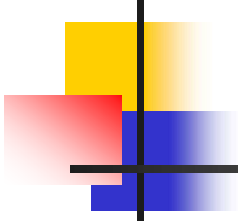
- $v(t\alpha, t\beta)$ の $t \rightarrow 0$ での収束性を下記の方針で証明した.
- 最適値自身を解析するのは難しいので, 最適値に近い中心曲線上の点を考え, そこでの目的関数値の $t \rightarrow 0$ での振る舞いを解析した.
- 実代数幾何のTarski-Seidenberg の定理を用いた比較的簡単な議論で収束性を示すことができる.



Tarski-Seidenberg の定理

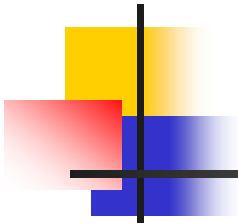
- 半代数的集合＝有限個の(実変数多変数多項式等式および厳密不等式系の解集合)の和集合.
- Tarski-Seidenberg の定理
T を $\mathbf{R}^n$ 上の半代数的集合とする. この時,
$$T_1 = \{(x_2, \dots, x_n) \mid (x_1, \dots, x_n) \in T\}$$

は $\mathbf{R}^{n-1}$ 上の半代数的集合である.



非実行可能点列主双対内点法の振る舞いの解析

- (非実行可能点列)主双対内点法 (Infeasible primal-dual interior-point algorithm) は半正定値計画問題を解く標準的手法であるが, 主双対問題が強実行可能でない場合に振る舞いは明らかではなかった.
- 我々の解析は下記のような結果を与える.



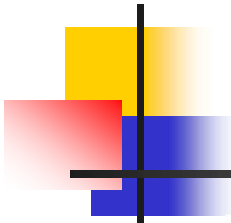
半正定値計画問題の最適性条件

$$XS = 0$$

$$A_i \bullet X = b_i, \quad i = \cdots m,$$

$$C - \sum A_i y_i = S,$$

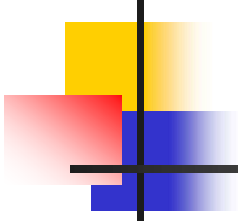
$$X \succeq 0, \quad S \succeq 0.$$



正則化された半正定値計画問題'

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & (C + t\beta I'_D) \bullet X \\ \text{(Pt) subject to} & A_i \bullet X = b_i + t\alpha A_i \bullet I'_P, \quad i = 1, \dots, m, \\ & X \succeq 0. \\ \text{maximize} & \sum_{i=1}^m (b_i + t\alpha A_i \bullet I'_P) y_i \\ \text{(Dt) subject to} & S = (C + t\beta I'_D) - \sum_{i=1}^m A_i y_i, \quad S \succeq 0. \\ & I'_P \succ 0, \quad I'_D \succ 0 \quad \text{適当な正定値対称行列} \end{array}$$

この場合もこれまで述べてきたものと同様の結果が成立.



多項式時間非実行可能点列内点法が追跡する 中心曲線 (パラメータ t)

$$XS = t\rho I$$

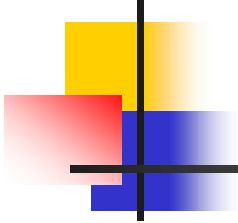
$$A_i \bullet X = b_i + tA_i \bullet I'_P, \quad i = \cdots m,$$

$$C + tI'_D - \sum A_i y_i = S,$$

$$X \succeq 0, \quad S \succeq 0.$$

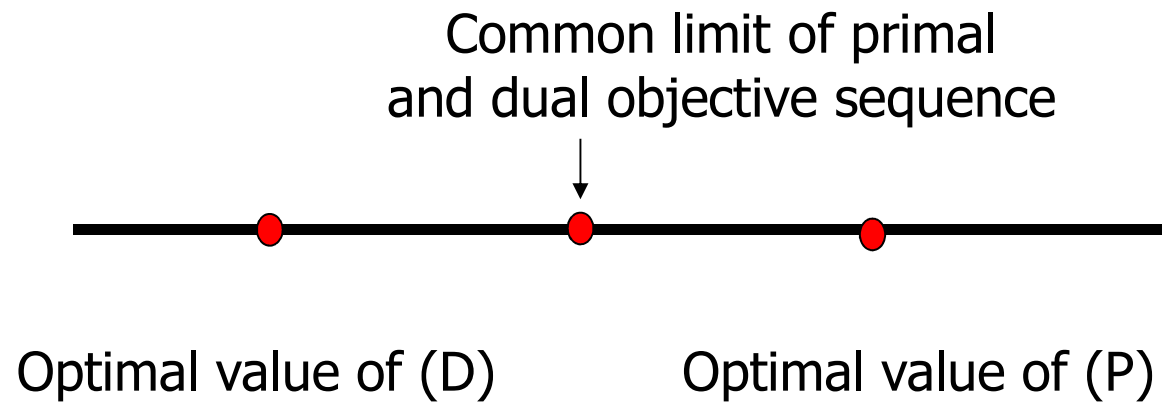
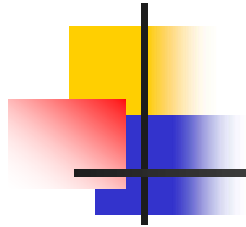
$\rho > 0$: sufficiently large

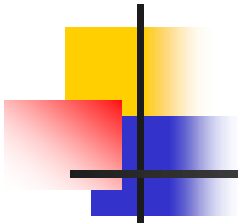
$I'_P \succ 0, \quad I'_D \succ 0$ 適当な正定値対称行列



主結果 2

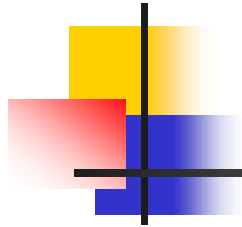
- 主双対内点法の生成する点列の双対ギャップが0に収束する場合, 問題は主双対問題漸近実行可能で生成される点列の(修正)目的関数値は主最適値と双対最適値の間のある値に収束する.
- 主双対内点法の生成する点列の双対ギャップが正の値に収束する場合, 主問題あるいは双対問題のどちらかは強実行不能である.



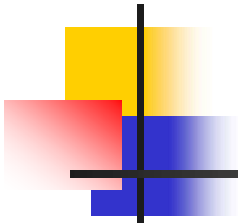


正則化された半正定値計画問題

$$\begin{aligned} \text{(Pt) minimize} \quad & (C + t\beta I'_D) \bullet X \\ \text{subject to} \quad & A_i \bullet X = b_i + t\alpha A_i \bullet I'_P, \quad i = 1, \dots, m, \\ & X \succeq 0. \\ \text{(Dt) maximize} \quad & \sum_{i=1}^m (b_i + t\alpha A_i \bullet I'_P) y_i \\ \text{subject to} \quad & S = (C + t\beta I'_D) - \sum_{i=1}^m A_i y_i, \quad S \succeq 0. \end{aligned}$$



- これは, 非実行可能点列主双対内点法が $t \rightarrow 0$ で (P_t) と (D_t) の双対ギャップが0に近づくような (P_t) と (D_t) の内点実行可能解の点列を生成するからである.
- これは, これまで行ってきた摂動解析が適用できる状況である.



主双対内点法の反復点が実行可能となる摂動半正定値計画問題

修正目的関数

$$\begin{aligned} \text{(Pt)} \quad & \text{minimize} && (C + tI'_D) \bullet X \\ & \text{subject to} && A_i \bullet X = b_i + tA_i \bullet I'_P, \quad i = 1, \dots, m, \\ & && X \succeq 0. \end{aligned}$$

修正目的関数

$$\begin{aligned} \text{(Dt)} \quad & \text{maximize} && \sum_{i=1}^m (b_i + tA_i \bullet I'_P) y_i \\ & \text{subject to} && S = (C + tI'_D) - \sum_{i=1}^m A_i y_i, \quad S \succeq 0. \end{aligned}$$