

組合せ最適化セミナー 演習問題

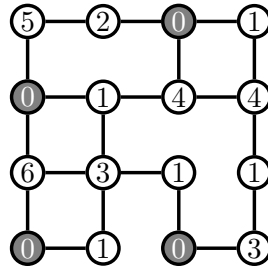
福永 拓郎

2022 年 7 月 26 日

問題 1. $a(1), \dots, a(k), b(1), \dots, b(k)$ をすべて正の実数とする. 以下の不等式が成り立つことを証明しなさい.

$$\frac{a(1) + \dots + a(k)}{b(1) + \dots + b(k)} \geq \min_{j=1, \dots, k} \frac{a(j)}{b(j)}$$

問題 2. 次の頂点重みグラフの弱スパイダーの最小密度はいくらになるか答えなさい. 図中では, 頂点内に書かれている数字がその頂点の重みを表すとし, 灰色で塗られている重み 0 の頂点が端点とする.



問題 3. シュタイナー木のスパイダー分解定理を証明しなさい.

問題 4. $\mathcal{V} \subseteq 2^V$ を uncrossable 集合族, S を V 上の辺集合とする. $\mathcal{V}_S := \{X \in \mathcal{V} : \delta(X) \cap S = \emptyset\}$ が uncrossable であることを証明しなさい.

問題 5. $\mathcal{V} \subseteq 2^V$ を uncrossable 集合族, S を $\mathcal{V}$ に対するスパイダーの辺集合とする. また, スパイダー S が被覆する極小コアの数を k とする. このとき, ある定数 $C > 0$ が存在し, $\mathcal{V}_S$ の極小コアの数が $\mathcal{V}$ の極小コアの数から Ck 以上少ないことを示しなさい.

問題 6. 二段階コスト問題の最適解 (各端点ペアを結ぶパスを結合したもの) において, 次数 3 以上の頂点の数が高々 k^2 であることを示しなさい.

問題 7. 二段階コスト問題の単一始点ケースを考える. ここでは記述の簡潔さのため, 頂点 $s_1 = \dots = s_k$ を t_0 と書き, $d_0 = +\infty$ と定義する. $t_0, t_1, \dots, t_k$ を端点と呼び, 端点 t_i の要求量を d_i とする.

スパイダーを, 頂点重みシュタイナー木のときと同様に, 根 r と端点 $t_{i_1}, \dots, t_{i_h}$ を結ぶパス $P_1, \dots, P_h$ の結合と定義する (ここではパスが点素かどうかはあまり問題にならないので気にしない). スパイダーのコストを $\sum_{e \in \bigcup_{j=1}^h P_j} f_e + \sum_{j=1}^h d_j \sum_{e \in P_j} l_e$ と定義し, 密度を「コスト / 端点数」と定義する.

密度が LP 緩和の最適値 / k 以下であるようなスパイダー S が存在し, そのようなスパイダーを多項式時間で見つけることが出来るとする. このスパイダー S を構成する端点は $t_{i_1}, \dots, t_{i_h}$ であると, これらの要求量の総和 $\sum_{j=1}^h d_{i_j}$ を D と書く.

(1) 端点 $t_{i_1}, \dots, t_{i_h}$ から d_{i_j} に比例する確率で端点 t_{i_j} を 1 つ選ぶ. 選ばれた端点 t_{i_j} の要求量を D に変更し, それ以外のスパイダー内の端点の要求量を 0 とする. このとき, 変更後の問題例に対する LP 緩和の最適値の期待値は, 変更前の LP 緩和の最適値を超えないことを示しなさい.

(2) 単一始点ケースに対する $O(\log k)$ 近似アルゴリズムを与えなさい.

問題 8. 次のように定義される辺重みシュタイナー木問題を考える.

辺重みシュタイナー木問題

入力: 無向グラフ $G = (V, E)$, 端点集合 $T \subseteq V$, 辺重み $w(e) \geq 0$ ($e \in E$)

出力: 辺重み $\sum_{e \in F} w(e)$ を最小化するシュタイナー木 $F \subseteq E$

端点の任意の順列 $t_1, \dots, t_k$ から, 次のようにシュタイナー木を計算するアルゴリズムを考える.

アルゴリズム

1. $i = 2$ から k まで, 次を繰り返す: t_i から $t_1, \dots, t_{i-1}$ のいずれかまでのパスの中で最短のものの P_i を計算する (ただし, このとき辺重みを長さで見なす).
2. $\bigcup_{i=2}^k P_i$ をシュタイナー木として出力する.

このアルゴリズムが辺重みシュタイナー木問題について $O(\log k)$ 近似である (つまり, 出力されるシュタイナー木の辺重みが, 最適なシュタイナー木の $O(\log k)$ 倍である) ことを証明しなさい.

問題 9. 次のように定義される頂点被覆重みシュタイナー木問題を考える.

頂点被覆重みシュタイナー木問題

入力: 無向グラフ $G = (V, E)$, 端点集合 $T \subseteq V$, 頂点重み $w(v) \geq 0$ ($v \in V$)

出力: シュタイナー木 $F \subseteq E$ と, F の頂点被覆 $U \subseteq V_F$ で, $\sum_{v \in U} w(v)$ を最小化するもの

(1) 集合被覆問題から頂点被覆重みシュタイナー木問題への, 近似比を保存する帰着が存在することを示しなさい.

(2) 頂点被覆重みシュタイナー木問題に対する $O(\log k)$ 近似アルゴリズムを与えなさい.