

ネットワーク設計における貪欲法

2. スパイダー被覆の拡張

福永 拓郎

fukunaga@ise.chuo-u.ac.jp

シュタイナー木問題の拡張

- シュタイナー森問題
- 辺連結度ネットワーク設計問題
- 点連結度ネットワーク設計問題
- T ジョイン

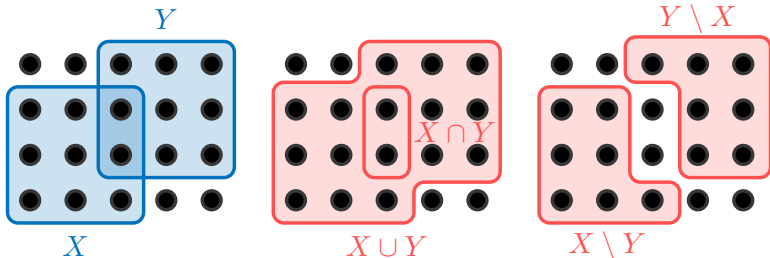
➔ 多くのネットワーク設計問題が **uncrossable 集合族被覆問題** (もしくはその類似問題) に帰着できる.

Uncrossable 集合族

定義

有限集合 V の集合族 $\mathcal{V} \subseteq 2^V$ が **uncrossable**

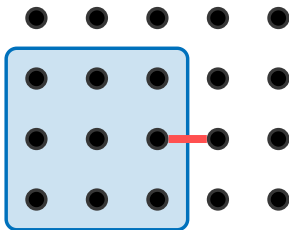
$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall X, Y \in \mathcal{V}: X \cap Y, X \cup Y \in \mathcal{V} \text{ or } X \setminus Y, Y \setminus X \in \mathcal{V}$$



頂点集合の辺による被覆

辺 uv が頂点集合 $X \subseteq V$ を被覆

$\stackrel{\text{def}}{\iff} u \in X \text{ かつ } v \notin X, \text{ もしくは } u \notin X \text{ かつ } v \in X$



X を被覆する辺の集合を $\delta(X)$ と書く

問題

uncrossable 集合族被覆問題

- 無向グラフ $G = (V, E)$
- 頂点重み $w(v) \geq 0$ ($\forall v \in V$)
- uncrossable 集合族 $\mathcal{V} \subseteq 2^V$

$\mathcal{V}$ 内の全ての集合を被覆する重み最小辺集合を求めよ

uncrossable 集合族の性質

- 集合族 $\mathcal{V}$ の（包含関係において）極小な要素を極小コアと呼ぶ.
- 極小コアを 1 つのみ含む要素をコアと呼ぶ.
- 極小コア M を含むコアからなる集合族を $\mathcal{C}(M)$ と書く.

性質

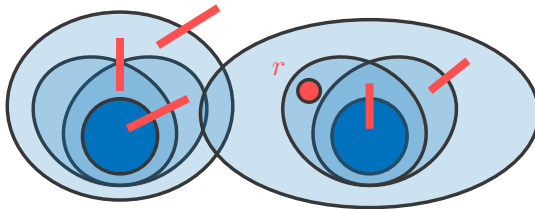
- M と M' は異なる極小コア
 $\Rightarrow C \in \mathcal{C}(M)$ と極小コア M' は互いに素
(特に M と M' は素).
- $\mathcal{C}(M)$ は $\cap, \cup$ に閉じている.
- $\mathcal{V}$ は uncrossable
 $\Rightarrow \mathcal{V}_S := \{X \in \mathcal{V} : \delta(X) \cap F = \emptyset\}$ は uncrossable (演習問題)

uncrossable 集合族に対するスパイダー

スパイダー [Nutov '10]

根 $r \in V$, 極小コア $M_1, \dots, M_k$, 辺集合 $S_1, \dots, S_k$ の組で以下の条件を満たすもの

- $\forall i : S_i$ は $\mathcal{C}(M_i, r) := \{C \in \mathcal{C}(M_i), r \notin C\}$ を被覆
- $k = 1 \Rightarrow S$ は M_1 を含む全てのコアを被覆
- $\forall i \neq j : \{r\} \supseteq V(S_i) \cap V(S_j)$



スパイダーの重み

$$\text{スパイダーの重み} := \sum_{v \in \bigcup_{i=1}^k V(S_i)} w(v)$$

根 r の重みは 1 度しかカウントされない.

弱スパイダー: $S_1, \dots, S_k$ は r 以外の頂点も共有してよい. ただし, 重みは r 以外は複数回カウントする.

スパイダーの密度

ポテンシャル $\phi(\mathcal{V}) :=$ 極小コアの数

$$\text{density}(\text{スパイダー}) := \frac{w(\text{スパイダー})}{\text{スパイダー内の極小コアの数 } k}$$

極小コアの数が k のスパイダーを縮約

- $k = 1 \Rightarrow$ ポテンシャルは **1** 以上減少
- $k \geq 2 \Rightarrow$ ポテンシャルは $\Omega(k)$ 以上減少 (演習問題)

スパイダー被覆アルゴリズム

OPT を uncrossable 集合族被覆問題の最適解の頂点重みとする.

定理

密度 $= O(1) \cdot \frac{\text{OPT}}{\phi(\mathcal{V})}$ であるようなスパイダーが存在.

かつ, そのようなスパイダーを多項式時間で計算できる.

そのようなスパイダーの選択を繰り返すことで近似比
 $O(\log \phi(\mathcal{V})) = O(\log n)$ を達成.

定理の証明

前ページの定理を証明するには、2通りのアプローチがある。

分解定理によるアプローチ (Nutov 2010)

- 最適解をスパイダーに分解できることを示す
→ 存在性 (証明が複雑)
- 密度が小さい (弱) スパイダーを計算できることを示す
→ 計算可能性

LP 緩和によるアプローチ

- OPT の下界を与える LP 緩和を定義
- 密度が LP 緩和の最適値 $/\phi(V)$ の定数倍以下となるようなスパイダーを計算するアルゴリズムを与える。
→ 存在性と計算可能性を同時に証明

LP 緩和によるアプローチを用いた研究

- Guha et al. (1999): 頂点重みシュタイナー木に対する LP 緩和によるアプローチ
- Chekuri, Ene, Vakilian (2012): uncrossable 集合族被覆問題（ただし，本スライドとは若干問題の細部が違う）に対する LP 緩和によるアプローチ
- Fukunaga (2017): uncrossable 集合族被覆問題より広い問題に対する LP 緩和によるアプローチ

まとめ

- uncrossable 集合被覆問題に対するスパイダーの定義
- 密度最小のスパイダーを近似する主双対アルゴリズム

参考文献

1. Z. Nutov. Approximating Steiner network with node-weights. SIAM Journal on Computing 39(7), 3001–3022, 2010.
2. S. Guha, A. Moss, J. Naor, B. Schieber. Efficient recovery from power outage. In Proceedings of the Thirty-First Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 574–582, 1999.
3. C. Chekuri, A. Ene, A. Vakilian. Prize-collecting survivable network design in node-weighted graphs. In APPROX-RANDOM, volume 7408 of Lecture Notes in Computer Science, 98–109, 2012.
4. T. Fukunaga. Spider Covers for Prize-Collecting Network Activation Problem. ACM Transactions on Algorithms 13(4), 49:1–49:31, 2017.