

ネットワーク設計における貪欲法

3. ジャンクション木

福永 拓郎

fukunaga@ise.chuo-u.ac.jp

Buy-at-Bulk ネットワーク設計問題

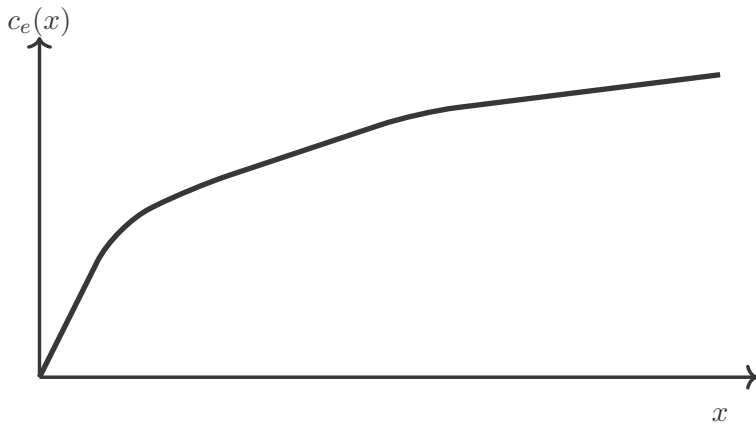
入力:

- 無向グラフ $G = (V, E)$
- 端点ペア $s_1t_1, \dots, s_kt_k \in \binom{V}{2}$
- 要求量 $d_1, \dots, d_k \geq 0$
- コスト関数 $c_e: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$
(単調非減少, 劣加法, $c_e(0) = 0$)

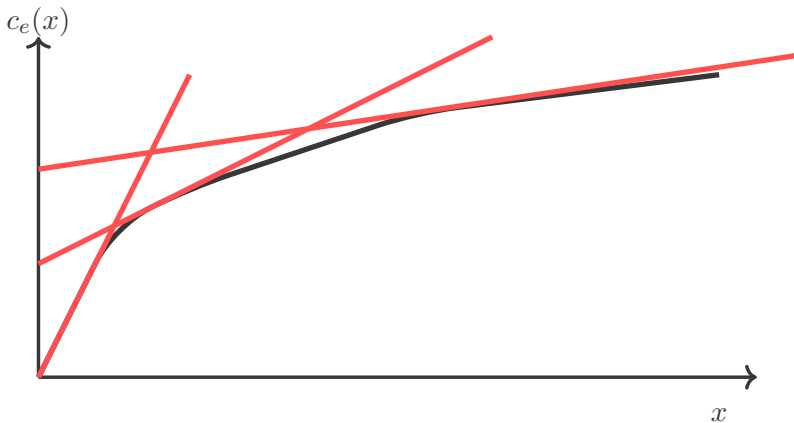
出力: s_it_i パス P_i ($i = 1, \dots, k$)

目的関数: 輸送コスト $\sum_{e \in E} c_e(\sum_{i: e \in P_i} d_i)$ の最小化

コスト関数の近似

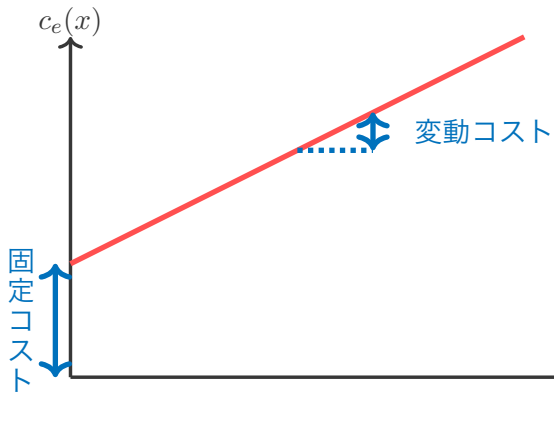


コスト関数の近似



c_e を線形関数で近似する

コスト関数の近似



二段階コスト問題

入力:

- 無向グラフ $G = (V, E)$
- 端点ペア $s_1t_1, \dots, s_kt_k \in \binom{V}{2}$
- 要求量 $d_1, \dots, d_k \geq 0$
- 固定コスト $f_e \geq 0 (e \in E)$
- 変動コスト $l_e \geq 0 (e \in E)$

出力: s_it_i パス $P_i (i = 1, \dots, k)$

目的関数: 固定コスト + 変動コストの最小化

- 固定コスト $\sum_{e \in \bigcup_i P_i} f(e)$ 1本の辺を共有できる
- 変動コスト $\sum_{i=1}^k d_i \sum_{e \in P_i} l(e)$ パスごとに独立

アルゴリズム: 単一起点の場合

$s_1 = s_2 = \dots = s_k$ の場合を単一起点ケースと呼ぶ.

$\mathcal{P}_i$ を $s_i t_i$ パスの集合とする.

LP 緩和

$$\begin{array}{ll}\min & \sum_{e \in E} f(e)x(e) + \sum_{i=1}^k d_i \sum_{P \in \mathcal{P}_i} l(P)y(P) \\ \text{s.t.} & \sum_{P \in \mathcal{P}_i} y(P) \geq 1 \quad \forall i = 1, \dots, k, \\ & x(e) \geq \sum_{P \in \mathcal{P}_i: e \in P} y(P) \quad \forall e \in E, \forall i = 1, \dots, k, \\ & x(e) \geq 0, \quad \forall e \in E, \\ & y(P) \geq 0, \quad \forall P \in \bigcup_i \mathcal{P}_i.\end{array}$$

アルゴリズム: 単一始点の場合

単一始点ケースはスパイダー被覆アルゴリズムの亜種で近似できる.

定理 [Chekuri, Khanna, Naor 01]

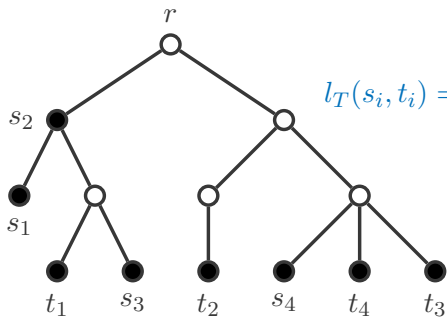
単一始点ケースでは, $\text{コスト} \leq \text{LP 緩和} \times O(\log k)$ の解を計算するアルゴリズムが存在.

以降は, これを前提に一般のケースを考える.

ジャンクション木

定義: ジャンクション木 (T, P_T)

- 根付き木 T (根を r とする)
- T に割り当てられた端点ペア集合 $P_T \subseteq \{s_1t_1, \dots, s_kt_k\}$
ただし, $s_i, t_i \in V_T$ ($\forall s_it_i \in P_T$)



$$l_T(s_i, t_i) = \sum_{e \in T \text{ 上の } s_it_i \text{ パス}} l(e)$$

ジャンクション木のコスト・密度

$$\text{コスト} = \sum_{e \in T} f_e + \sum_{s_i t_i \in P_T} d_i(l_T(r, s_i) + l_T(r, t_i))$$

$$\text{density}(T, P_T) = \frac{\text{コスト}}{|P(T)|}$$

貪欲アルゴリズム

存在性

$$\text{density}(T, P_T) = O(\log k) \cdot \frac{\text{OPT}}{k}$$

であるようなジャンクション木 (T, P_T) が存在.

→ 分解定理

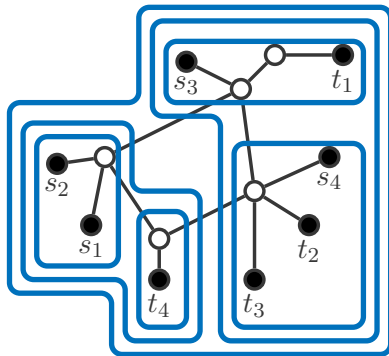
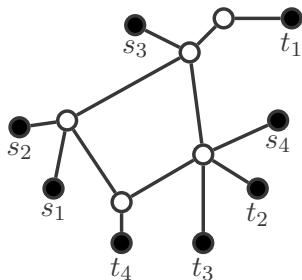
アルゴリズム

最小密度ジャンクション木を求める $O((\log k)^2)$ 近似アルゴリズムが存在.

→ 単一始点ケースに帰着

→ 二段階コスト問題: $O((\log k)^4)$ 近似 [Chekuri et al. 2010]

存在性の証明



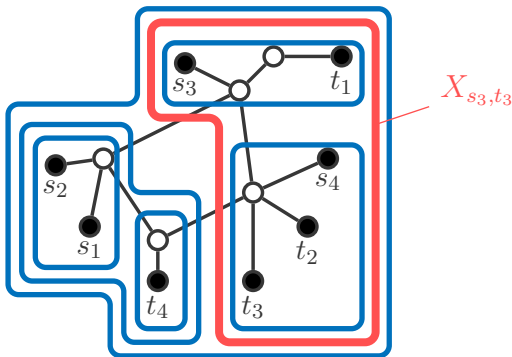
1. 最適解 G^* を考える.
(次数 3 以上の頂点数 $\leq k^2$)

2. G^* の頂点集合 V^* を階層分割
3. 階層分割から複数のジャンク
ション木を構築

階層分割

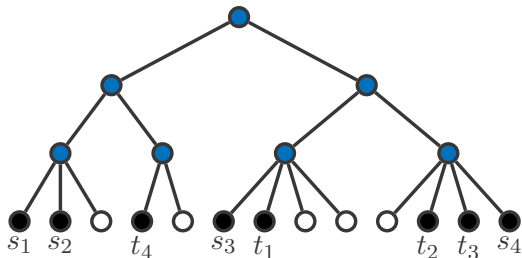
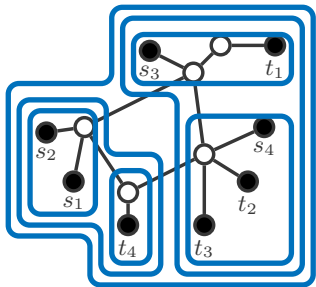
V^* 上のラミナー集合 $\mathcal{L} \subseteq 2^{V^*}$

- s_i, t_i を両方含む極小集合を $X_{s_i, t_i} \in \mathcal{L}$ とする.
- $G^*[X_{s_i, t_i}]$ の直径が $O(\log k) \cdot l_{G^*}(s_i, t_i)$ となっているペア $s_i t_i$ が $\Omega(k)$ 個存在する (良いペアと呼ぶ)



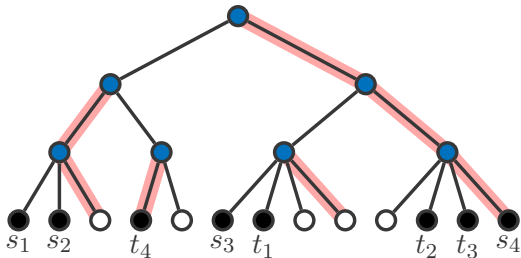
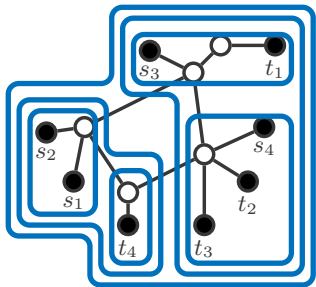
階層分割のパス分解

- $\mathcal{L}$ を, V^* を葉とする木で表現する.
- 各内点から, G^* において次数 3 以上の頂点に対応する葉の数が多い子供をたどっていくことで, 木をパス $P_1, \dots, P_h$ に分解する.



階層分割のパス分解

- $\mathcal{L}$ を, V^* を葉とする木で表現する.
- 各内点から, G^* において次数 3 以上の頂点に対応する葉の数が多い子供をたどっていくことで, 木をパス $P_1, \dots, P_h$ に分解する.

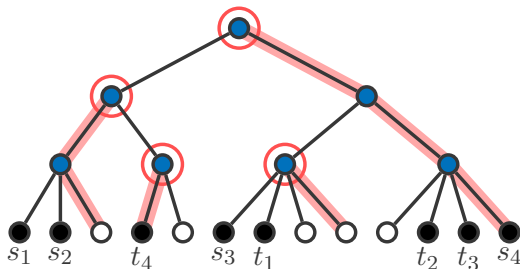
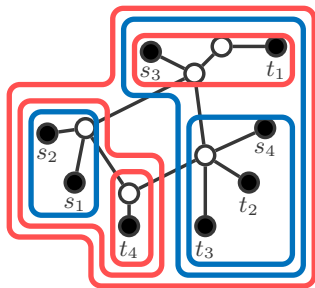


各葉から根へのパスには最大 $O(\log k)$ 本のパスが存在

パス分解からジャンクション木を構築

パス P_i からジャンクション木 T_i を定義

- P_i の始点を $X_i \in \mathcal{L}$, X_i の任意の頂点を r_i とする.
- $T_i := G^*[X_i]$ 上の r_i を根とする最短路木.
- $s_j t_j$ が良いペア, かつ $X_{s_j t_j}$ を P_i が通る
 $\Rightarrow s_j t_j$ を T_i に割り当てる.



ジャンクション木の密度

- 最適解の各頂点・各辺は高々 $O(\log k)$ 本のジャンクション木に含まれる $\rightarrow \sum_j f(T_j) \leq O(\log k) \times \text{最適解の固定コスト}$
- 良いペア $s_i t_i$ が割り当てられたグラフは直径が高々 $O(\log k) \cdot l_{G^*}(s_i, t_i)$
 $\rightarrow l_{T_j}(r, s_i) \leq O(\log k) l_{G^*}(s_i, t_i),$
 $l_{T_j}(r, t_i) \leq O(\log k) l_{G^*}(s_i, t_i)$

$$\sum_j \text{ジャンクション木 } T_j \text{ のコスト} \leq O(\log k) \cdot \text{OPT}$$

$$\sum_j |P(T_j)| \geq \Omega(k)$$

$\Rightarrow \text{density}(T_j) \leq O(\log k) \cdot \frac{\text{OPT}}{k}$ のジャンクション木 T_j が存在.

最小密度ジャンクション木の計算

根 r は分かっているとし, $\mathcal{P}'_i$ を r を経由する $s_i t_i$ パスの集合とする.

LP 緩和

$$\min \quad \sum_{e \in E} f(e)x(e) + \sum_{i=1}^k d_i \sum_{P \in \mathcal{P}'_i} l(P)y(P)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^k z(i) = 1,$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}'_i} y(P) \geq z(i) \quad \forall i = 1, \dots, k,$$

$$x(e) \geq \sum_{P \in \mathcal{P}'_i: e \in P} y(P) \quad \forall e \in E, \forall i = 1, \dots, k,$$

$$x(e) \geq 0, \quad \forall e \in E,$$

$$y(P) \geq 0, \quad \forall P \in \mathcal{P}'_1 \cup \dots \cup \mathcal{P}'_k,$$

$$z(i) \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

ジャンクション木の計算

1. LP 緩和の最適解を (x^*, y^*, z^*) 計算.
2. $p := 1 + \lceil \lg k \rceil$.
3. 端点を $S_0, \dots, S_{p-1}$ に分類.

$$S_j := \{s_i, t_i : 1/2^{j+1} \leq z(i) \leq 1/2^j\} \quad (\forall j = 0, \dots, p-1)$$

4. $\sum_{i \in S_q} z(i) \geq \frac{1}{2^p}$ であるような q が存在. S_q を端点として単一始点ケースを解く.

ジャンクション木の計算

$\sum_{i \in S_q} z(i) \geq \frac{1}{2^p} (\Rightarrow |S_q|/2^{q+1} \geq 1/2^p)$ であるような q が存在.

- $\sum_{i=1}^k z(i) = 1$
- $1/2^p = 1/(2k)$ なので, $S_0, \dots, S_{p-1}$ に入らないペアの $z(i)$ の和は高々 $1/2$.

出力解の密度 = $O((\log k)^2) \times$ 最小密度

- 単一始点の LP $\leq$ 密度最小化の LP $\times 2^{q+1}$
- 出力解のコスト $\leq (\log k) \times$ 単一始点の LP

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{出力解の密度} &\leq \frac{(\log k) \times 2^{q+1}}{|S_q|} \times \text{密度最小化の LP} \\ &\leq 2p(\log k) \times \text{密度最小化の LP} \end{aligned}$$

参考文献

1. C. Chekuri, M.T. Hajiaghayi, G. Kortsarz, M.R. Salavatipour. Approximation algorithms for nonuniform buy-at-bulk network design. SIAM Journal on Computing 39(5), 1772–1798, 2010.
2. C. Chekuri, S. Khanna, J. Naor. A deterministic algorithm for the cost-distance problem. SODA 2001: 232–233.