

演習問題

演習 1 : GSアルゴリズムのD側最適性

問. 一対一のマッチングモデルにおいて, D 側プロポーズGale–Shapleyアルゴリズムの出力 M が D 側最適な安定マッチングであることを示せ.
(i.e., 任意の安定マッチング N に対し $\forall d \in D: M(d) \succeq_d N(d)$ が成り立つことを示せ.)

ヒント: 証明の出だし.

仮に $D' := \{d \in D \mid N(d) \succ_d M(d)\} \neq \emptyset$ となる N があったとする.

D' の中で, アルゴリズム中で $N(d)$ に最初にリジェクトされた人を d^* とする.

演習 2 : Cloningと Rural Hospitals Theorem

任意の多対一インスタンス $I = (D, H, \{>_d\}_{d \in D}, \{>_h, q_h\}_{h \in H})$ に対し,
以下のような一対一インスタンス I' が存在する: I の安定マッチング集合
と I' の安定マッチング集合との間に全単射 (1対1対応) がある.

このような I から I' への変換は cloningと呼ばれている.

問(1). I' の具体的構成方法を与え, 安定マッチングの1対1対応を示せ.

次のページへつづく.

演習 2 : Cloningと Rural Hospitals Theorem

任意の多対一インスタンス $I = (D, H, \{>_d\}_{d \in D}, \{>_h, q_h\}_{h \in H})$ に対して,
以下が成り立つ [Gale-Sotomayor 1985], [Roth 1984, 1986].

Rural Hospitals Theorem 任意の二つの安定マッチング M, N に対し

- $\forall d \in D: M(d) = \emptyset \Leftrightarrow N(d) = \emptyset,$
- $\forall h \in H: |M(h)| = |N(h)|,$
- $\forall h \in H: |M(h)| < q_h$ ならば $M(h) = N(h).$

問(2). 問(1)の答えを利用して, 上記の定理を示せ.

演習 3：病院の戦略的操作

多対一マッチングにおける, H 側プロポーズGale-Shapleyアルゴリズムでは, 病院は リストの操作 や 容量の過少申告 によってアルゴリズムの出力を改善できることがある (i.e., 耐戦略的でない).

問(1). 病院が容量を操作することで得をする例を与えよ.
(具体的インスタンス I および選好の操作方法)

問(2). 病院が選好リストを操作することで得をする例を与えよ.

演習 4: マトロイドの例

問. 層マトロイド, 横断マトロイド, グラフ的マトロイド
がそれぞれマトロイドの公理を満たしていることを示せ.

演習 5 : 安定branching

有向グラフ $G = (V, A)$ の辺集合 $B \subseteq A$ が **branching** であるとは, グラフ (V, B) がサイクルを含まず, 各頂点に入る辺が高々 1 つであることをいう.

$>_v$: 頂点 v に入る辺集合上の全順序 (for each $v \in V$)

$>_G$: 辺集合 A 全体の上の全順序

が与えられたとき, branching B が安定であるとは, 以下の条件で定義される**ブロッキング辺** $a = \overrightarrow{uv} \in A \setminus B$ が存在しないことをいう:

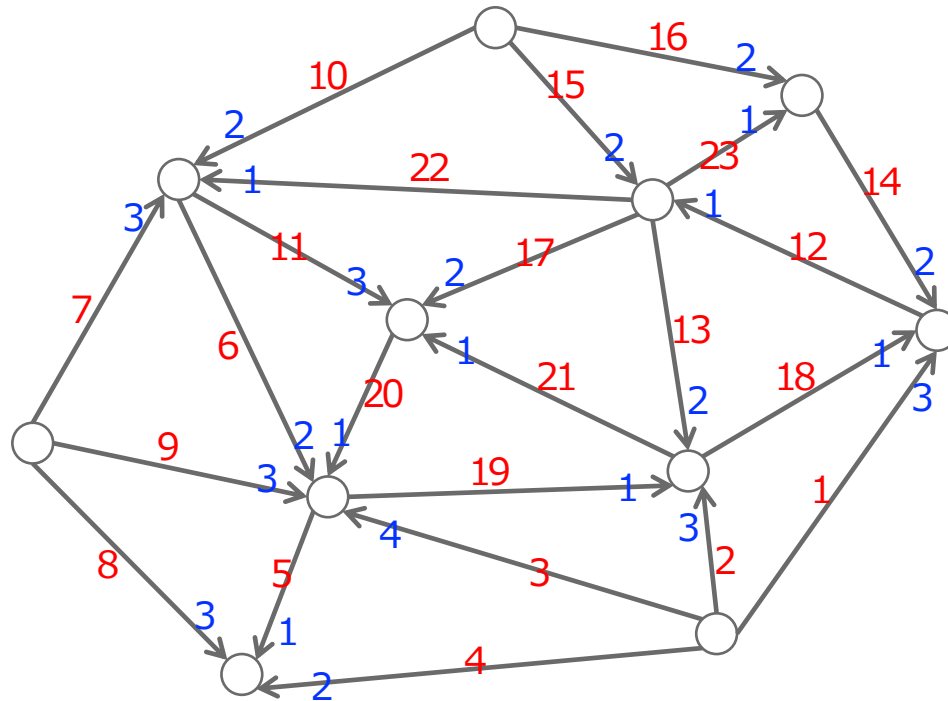
- B は v に入る辺を含まないもしくは $>_v$ の意味で a より悪い辺を含む
- $B \cup \{a\}$ は(無向グラフの意味での)サイクルをもたない or サイクルをもつならその中に $>_G$ の意味で a より悪い辺がある

次頁へつづく

演習 5 : 安定branching

問. 以下のインスタンスの安定 branching を求めよ.

青字は $\{>_v\}_{v \in V}$, 赤字は $>_G$ の順位を表す (数字が小さいほど良い要素).



発展編: $>_G$ 側最適な安定 branching を求めよ.

※ プロポーズ側が制約をもつ場合のGSアルゴリズムは講義内で説明していないので推測する必要がある.
制約のためにプロポーズできない辺と, リジェクトされた辺とを区別して扱う必要があることに注意.

演習 6: マトロイドの性質

2 限で紹介したマトロイドの性質を示してみよう.

簡単のため要素の重みは全て異なると仮定する ($e \neq e' \Rightarrow w(e) \neq w(e')$).

また, Greedy Algorithm の正当性は認めて使って良い.

問(1). p. 53 の定理 (最適性条件) を示せ.

問(2). p. 59 の Greedy Algorithm 2 の正当性を示せ.

演習 7: 選好順序の変換

問. カップルを含む安定マッチングインスタンスに対し, p. 86 のように行列 A , ベクトル b を定め, 各 $i \in D^1 \cup C$ については $\succ_i$ に従って $\{e \in E \mid a_{ie} > 0\}$ 上の順序を決める. Scarf の補題から得られる支配端点解が整数ベクトルだった場合はそれが p.80 の定義での安定マッチングとなるように, 各 $h \in H$ の $\{e \in E \mid a_{he} > 0\}$ 上の順序を適切に設定せよ.