安定マッチングと組合せ最適化

2022年組合せ最適化セミナー (COSS)

横井 優 (NII) 2022/7/25

安定マッチング理論

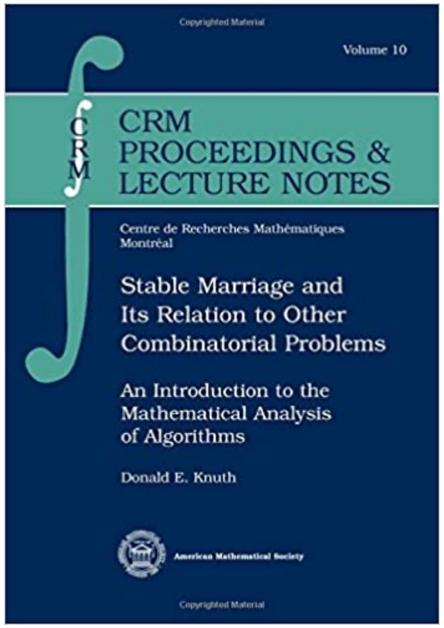
- 選好をもつ主体間での “安定性“ をみたすマッチングについての理論.
  Gale & Shapley の1962年の論文 “College admissions and the stability of marriage” が原点.

- 理論と応用 (研修医配属, 学校選択制度, etc.) ともに発展している.
  象徴的な出来事: Roth と Shapley の 2012年ノーベル経済学賞受賞.

- 数理的・アルゴリズム論的にも面白い.

Knuth の1976年の本 “Stable Marriage and its Relation to Other Combinatorial Problems” では，例を通じてアルゴリズム論を学ぶための題材として，安定マッチングを用いている.

Knuth の挙げた 12 の research problems は その後の分野の発展を促進した.



目次

今日の講義ではとくに組合せ最適化と関連する部分に重点をおく.

１限．一対一マッチング

安定マッチングの基本事項を学ぶ
（解集合の構造，Gale–Shapleyアルゴリズム，耐戦略性）

２限．制約付き多対一マッチング

安定マッチングを通じて **マトロイド** を学ぶ

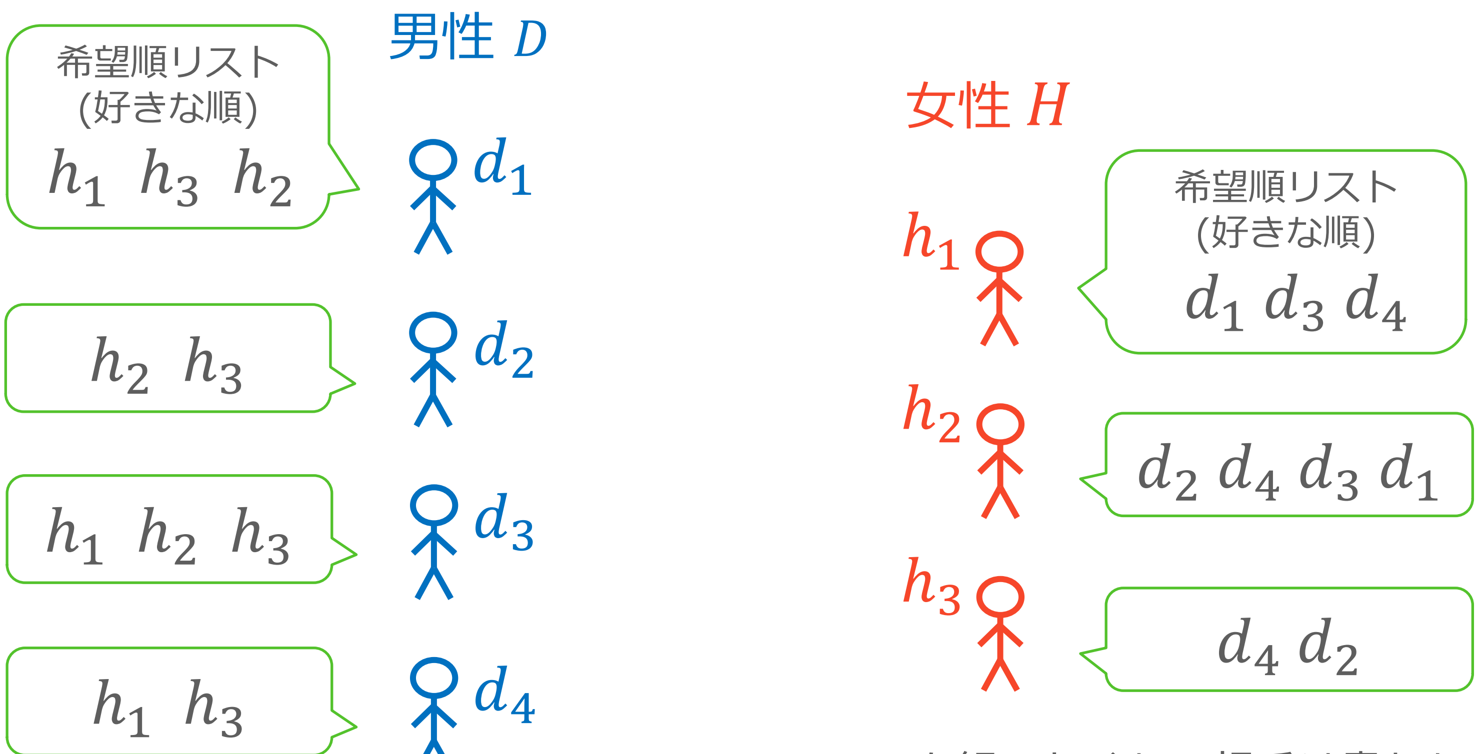
３限．カップルを含む多対一マッチング

安定マッチングを通じて **Scarfの補題** や **反復丸め法** に触れる

一対一マッチングモデル

モデル

とあるテニスサークルで混合ダブルスのペア決めをする．



※ペアを組みたくない相手は書かなくて良い

各メンバーがペアを組みたい相手を好きな順に並べたリストを申告したとき，どのようにペア (マッチング) を決めれば良いか．

モデル

インスタンス: $I = (D, H, \{\succ_d\}_{d\in D}, \{\succ_h\}_{h\in H})$

- D, H: 互いに素な主体集合, ここでは男性/女性集合
- $\succ_d$: 男性 d の選好. $H \cup \{\emptyset\}$ 上の全順序. $\emptyset$ より下位は許容不可な相手
- $\succ_h$: 女性 h の選好. $D \cup \{\emptyset\}$ 上の全順序. 〃

用語・記法

- $E \coloneqq \{\, (d, h) \mid d \succ_h \emptyset\,,\ \ h \succ_d \emptyset \,\}$: 互いに許容可能なペアの集合
- $M \subseteq D \times H$ が**マッチング** $\overset{\text{def.}}{\iff}$ $M \subseteq E$ でどの主体も高々一人とマッチ
- $M(d) \in H \cup \{\emptyset\}$: 男性 d の M でのマッチ相手. $\emptyset$ は未割当を表す
  $M(h) \in D \cup \{\emptyset\}$ も同様

※ [Gale–Shapley 1962] のオリジナルのモデルでは $|D| = |H|,\ E = D \times H$.
※ 条件 $M \subseteq E$ を個人合理性と呼び, マッチングの定義でなく安定性の定義に含めることもある.

安定性

- ペア $(d, h) \in E$ がマッチング $M \subseteq E$ の**ブロッキングペア**
  $\overset{\text{def.}}{\iff}$ $h \succ_d M(d)$ かつ $d \succ_h M(h)$

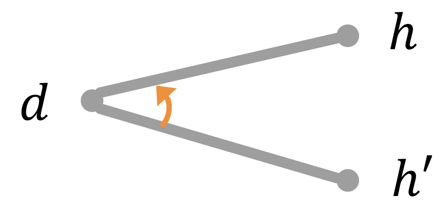
- マッチング M が**安定** $\overset{\text{def.}}{\iff}$ ブロッキングペアが存在しない

安定性

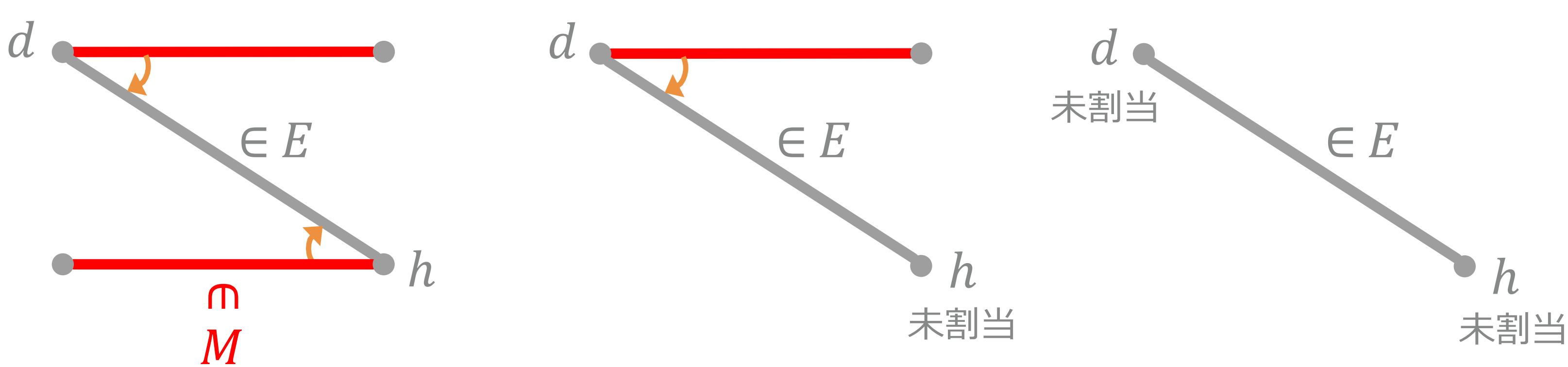
- ペア $(d,h)\in E$ がマッチング $M\subseteq E$ の**ブロッキングペア**
  $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $h \succ_d M(d)$ かつ $d \succ_h M(h)$

- マッチング M が**安定** $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ ブロッキングペアが存在しない

- 本スライドで使う表記法: $h \succ_d h' \quad \Leftrightarrow$



ブロッキングペア(禁止構造)



安定マッチング集合の構造

任意のインスタンスに対し，安定マッチングは必ず存在する. (後で示す)
その数は指数オーダーになり得る*1が，色々と良い構造的性質をもつ.

i. マッチしている主体集合は不変

ii. 片側 (D or H) の全主体にとって最適な安定マッチングが存在

iii. 多項式サイズの多面体表現が存在*2

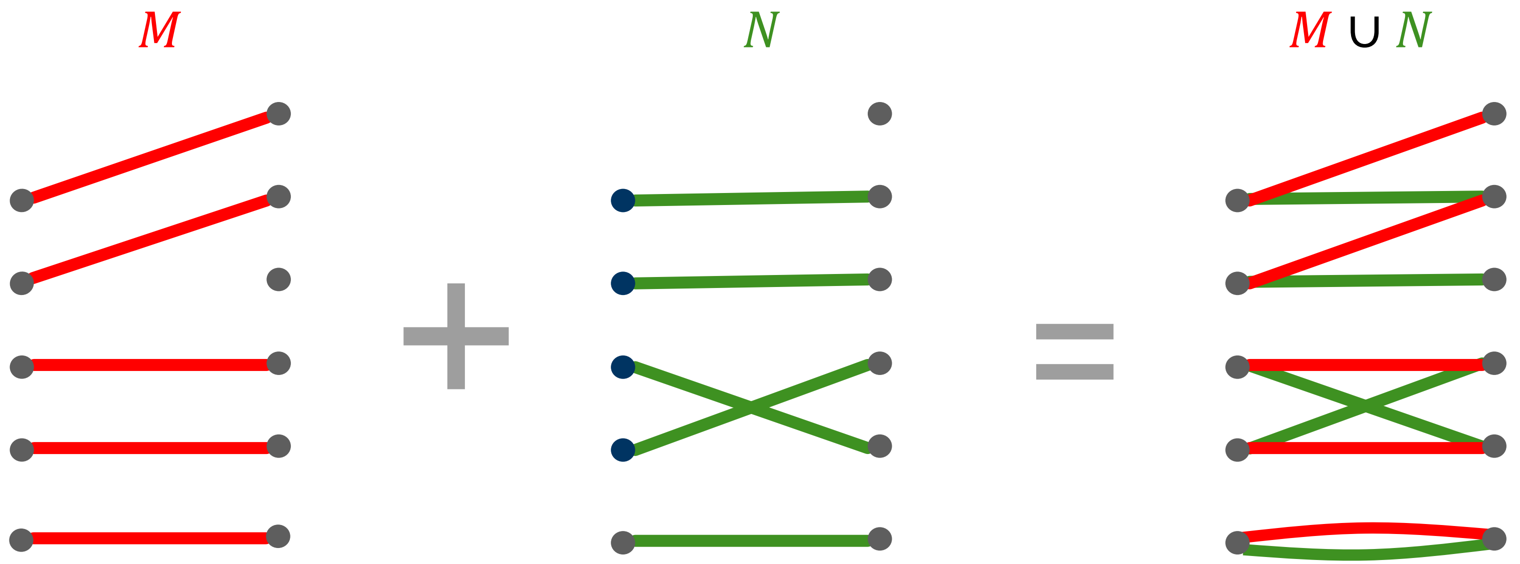
以降，i と ii を示していく.

*1 安定マッチングの数の上限は Knuth の research problem でも問われており，最近も進展が見られる. [Karlin–Gharan–Weber STOC2018], [Palmer–Pálvölgyi FOCS2021].
*2 今日は説明を割愛. See e.g., [Vande Vate 1989], [Teo–Sethuraman 1998] .

安定マッチング集合の構造

M, N：任意のふたつの安定マッチング

- 二部グラフ $(D, H; M \cup N)$ を考える.
- 各連結成分はパス or サイクルとなる.

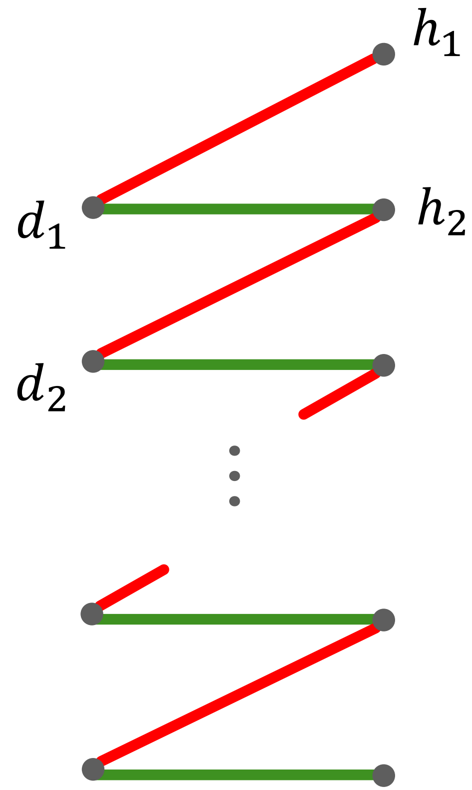


安定マッチング集合の構造

M, N：任意のふたつの安定マッチング

- 二部グラフ $(D, H; M \cup N)$ を考える.
- 各連結成分はパス or サイクルとなる.
- **が，実はパスはあり得ない.**

$\because$ 仮にパスがあったとすると...

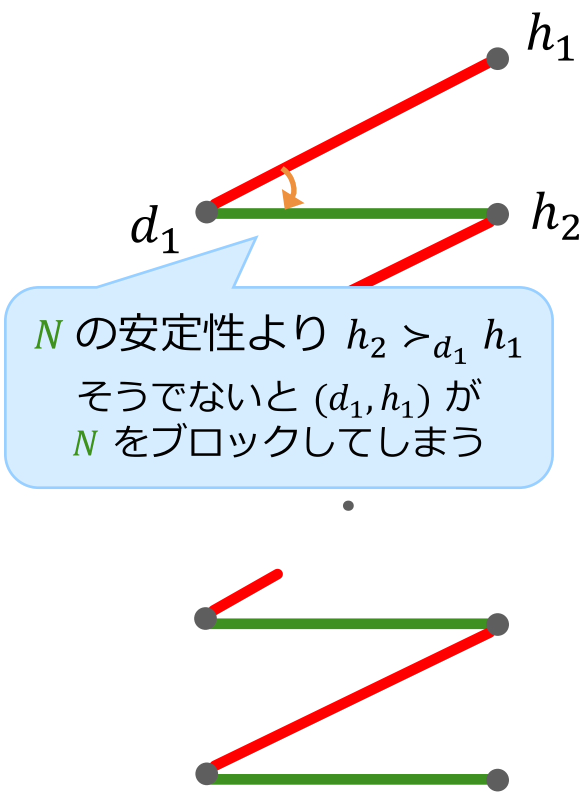


安定マッチング集合の構造

M, N：任意のふたつの安定マッチング

- 二部グラフ $(D, H; M \cup N)$ を考える.
- 各連結成分はパス or サイクルとなる.
- **が，実はパスはあり得ない.**

$\because$ 仮にパスがあったとすると…

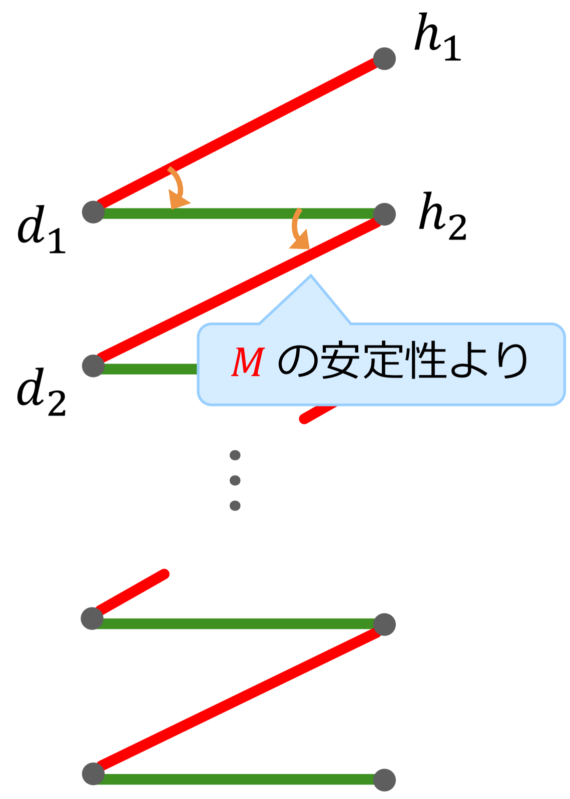


安定マッチング集合の構造

M, N：任意のふたつの安定マッチング

- 二部グラフ $(D, H; M \cup N)$ を考える.
- 各連結成分はパス or サイクルとなる.
- **が，実はパスはあり得ない.**

$\because$ 仮にパスがあったとすると…

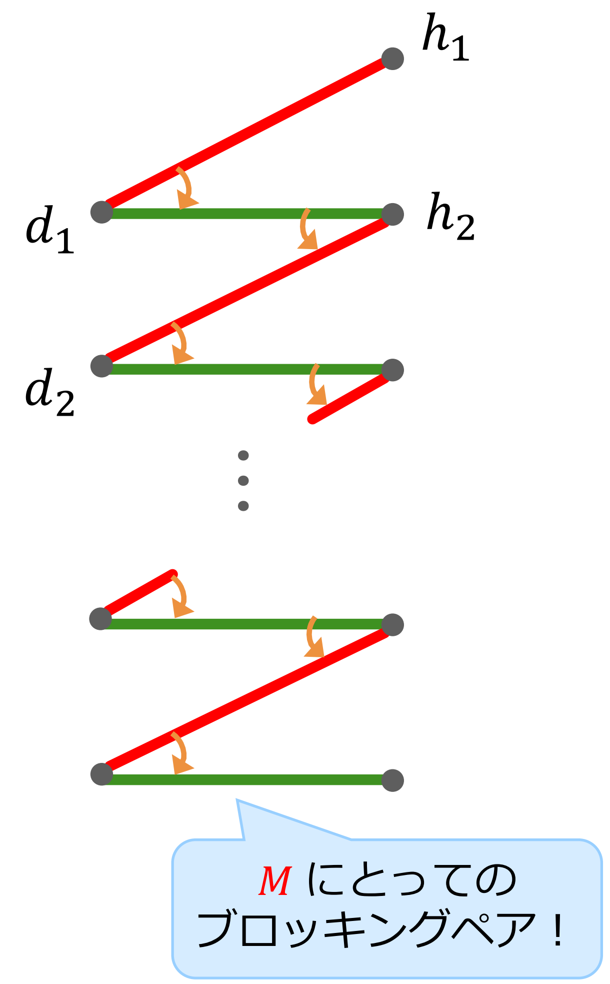


安定マッチング集合の構造

M, N：任意のふたつの安定マッチング

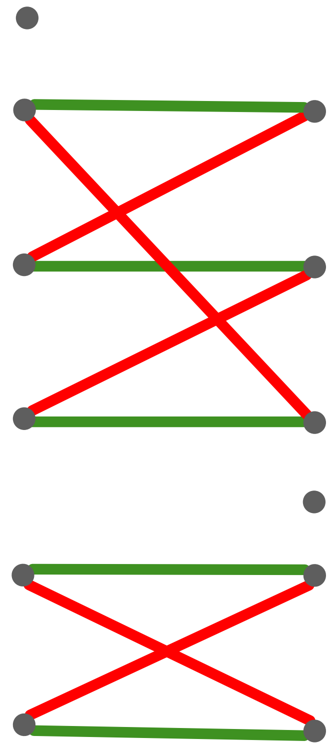
- 二部グラフ $(D, H; M \cup N)$ を考える.
- 各連結成分はパス or サイクルとなる.
- **が，実はパスはあり得ない.**

∵ 仮にパスがあったとすると
M, N どちらかの安定性に矛盾



安定マッチング集合の構造

$\color{red}{M}, \color{green}{N}$：任意のふたつの安定マッチング



- 二部グラフ $(D, H; M \cup N)$ を考える.
- 各連結成分はパス or サイクルとなる.
- が，実はパスはあり得ない.
- $\therefore$ $M \cup N$ はサイクルに分解できる.

定理 1 (マッチする主体の不変性)

どの安定マッチングでもマッチしている主体の集合は同じ.

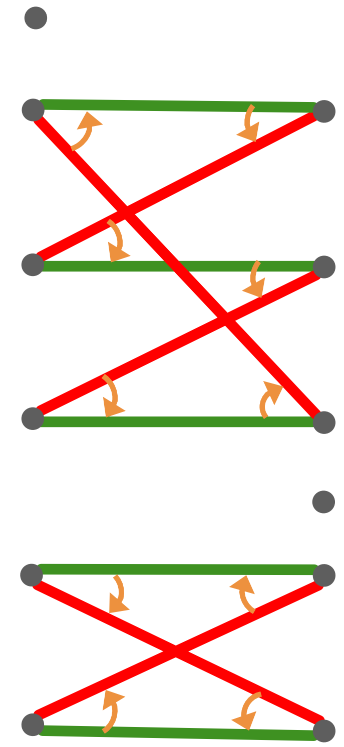
[Gale–Sotomayor 1985], [Roth 1984]

この定理の多対一拡張版は **Rural Hospitals Theorem** と呼ばれ [Roth 1986]
非二部拡張版 (ルームメイト問題版) は **Lone Wolfe Theorem** と呼ばれる (see e.g.,[Klaus–Klijn 2010])

安定マッチング集合の構造

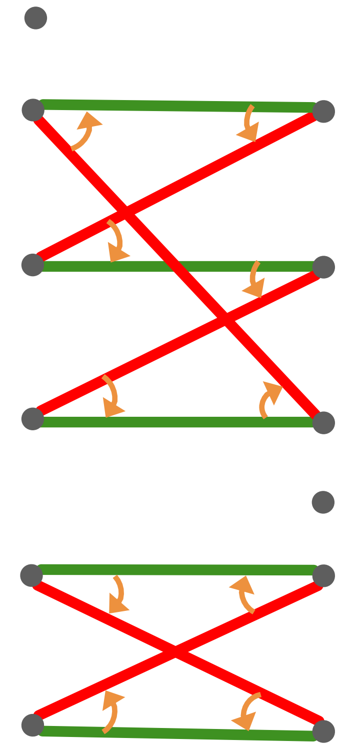
M, N：任意のふたつの安定マッチング

- (長さ≠2の) 各サイクル内では以下のどちらか
  - 全男性 M より N,
    全女性 N より M を好む
  - 全男性 N より M,
    全女性 M より N を好む



安定マッチング集合の構造

M, N：任意のふたつの安定マッチング



- (長さ≠2の) 各サイクル内では以下のどちらか
  - 全男性 M より N,
全女性 N より M を好む
  - 全男性 N より M,
全女性 M より N を好む

- $M \vee_D N :=\{(d,h) \mid d \in D,\ h$ は $M(d)$ と $N(d)$ のうち好ましい方$\}$

  $M \wedge_D N := \{(d,h) \mid$ 〃 好ましくない方$\}$

  とし, $\vee_H$, $\wedge_H$ も同様に定めると

  $M \vee_D N = M \wedge_H N$, $M \wedge_D N = M \vee_H N$ が成立．これらはマッチング.

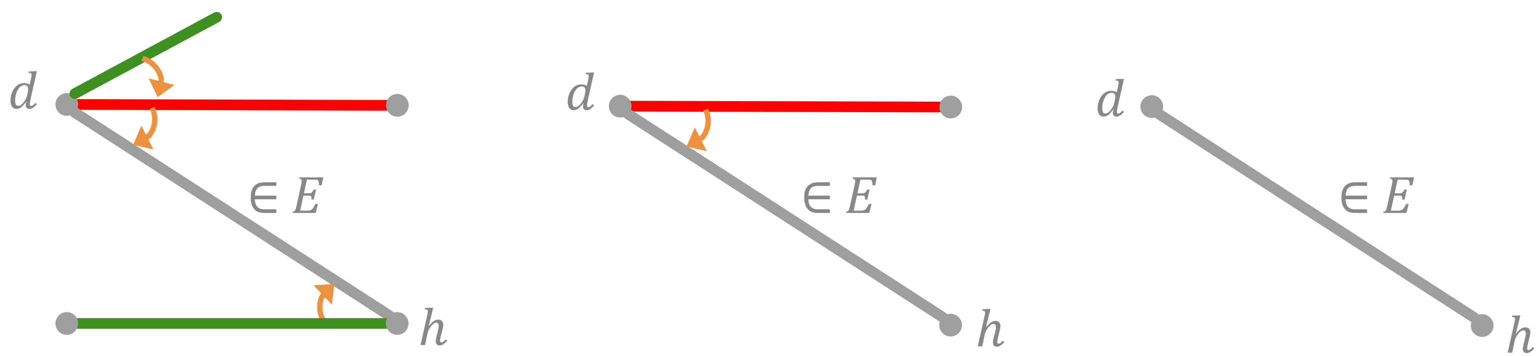
安定マッチング集合の構造

M, N：任意のふたつの安定マッチング

✓ $M \vee_D N = M \wedge_H N$ が成立．これはマッチング．

- さらに，これらは安定．

∵ $M \vee_D N$ がブロッキングペアをもつとすると M or N の安定性に矛盾



安定マッチング集合の構造

M, N：任意のふたつの安定マッチング

✓ $M \vee_D N = M \wedge_H N$ が成立．これは**安定**マッチング.

<u>定理 2 (D側最適安定マッチングの存在)</u>

以下を満たす安定マッチング M^*が存在する:

$\succ_d$ or $=$

任意の安定マッチング M に対して $\forall d \in D$: $M^*(d) \succcurlyeq_d M(d)$.

$\because$ 安定マッチング全体を $\{M_1, M_2, \ldots, M_k\}$ として

$$M^* \coloneqq \cdots((M_1 \vee_D M_2) \vee_D M_3) \vee_D \cdots \vee_D M_k$$ とすれば良い.

補足: $M \vee_D N = M \wedge_H N$ の関係より，M^*はH側最悪安定マッチング.

安定マッチング集合の構造

M, N：任意のふたつの安定マッチング

✓ $M \vee_D N = M \wedge_H N$ が成立．これは**安定**マッチング.

[Knuth 1976] attributes this result to Conway

定理 (分配束構造)

安定マッチング集合 $\mathcal{M}$ 上の半順序 $\succcurlyeq_D$ を

$$M \succcurlyeq_D N \Leftrightarrow \forall d \in D\colon M(d) \succcurlyeq_d N(d)$$

で定義すると，$(\mathcal{M}, \succcurlyeq_D)$ は $\vee_D$, $\wedge_D$ を結び, 交わり演算とした分配束.

「$M \vee_D N$, $M \wedge_D N$ が安定マッチングになる」が非自明な部分．これらの演算が結び，交わりを定めること，および分配律を満たすことは定義から従う.

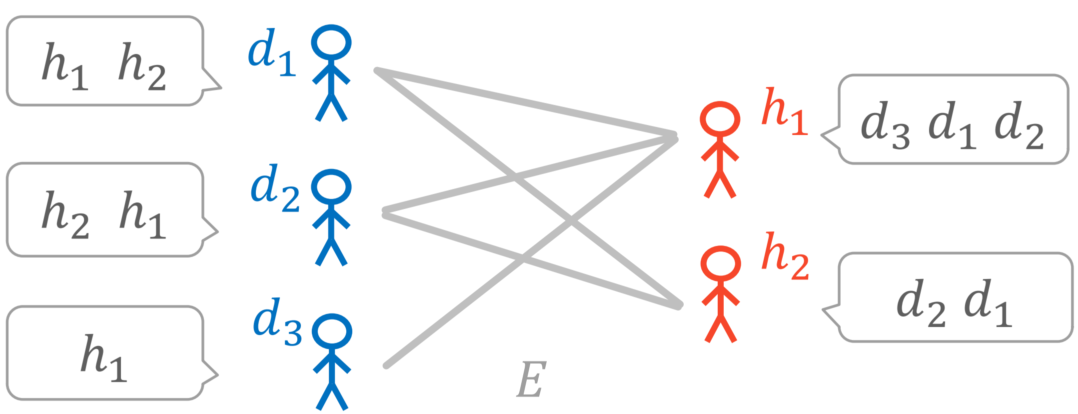
分配束に関するBirkhoff–Iriの表現定理より，安定マッチング集合の多項式サイズの表現が存在.
rotation poset と呼ばれ，安定マッチング集合上での最適化に活用されている［Gusfield–Irving 1989].

Gale-Shapleyアルゴリズム (受入保留アルゴリズムとも)

D側最適安定マッチングを線形時間で計算するアルゴリズム.

[前処理] Eの要素(許容可能なペア)以外は各主体のリストから削除しておく

1. $M \leftarrow \emptyset$
2. "未割当＆リストが非空" な男性がいる限りそのような d を任意にとり:
   - $h \leftarrow d$ のリスト先頭の女性.
   - $M(h) = \emptyset$ なら $M \leftarrow M + (d, h)$.
   - $M(h) \in D$ なら $M(h)$ と d のうち $\succ_h$ で下位のものを d' とし, $M \leftarrow M + (d, h) - (d', h)$. さらに d' のリストから h を削除.

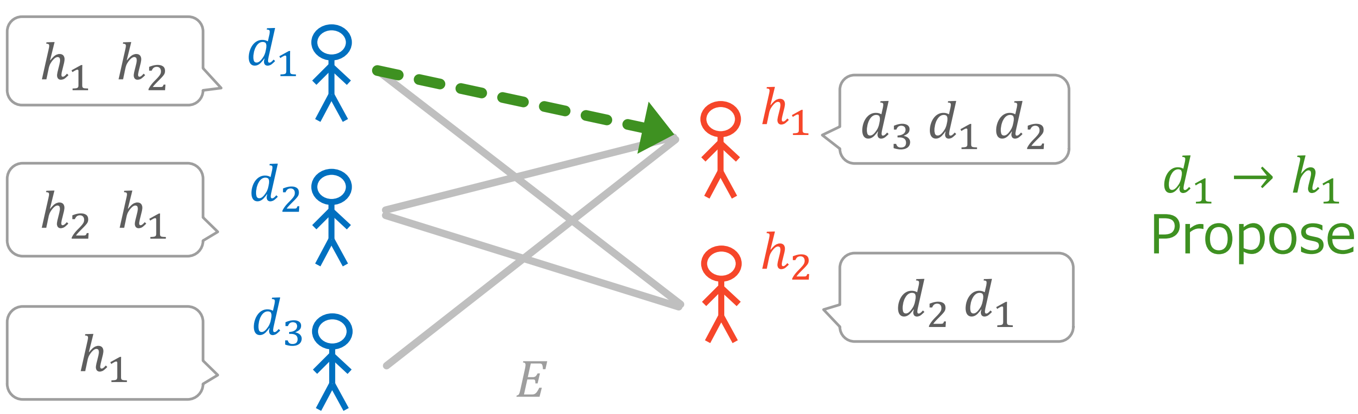


Gale-Shapleyアルゴリズム (受入保留アルゴリズムとも)

D側最適安定マッチングを線形時間で計算するアルゴリズム.

[前処理] Eの要素(許容可能なペア)以外は各主体のリストから削除しておく

1. $M \leftarrow \emptyset$
2. “未割当＆リストが非空” な男性がいる限りそのような d を任意にとり:
   - $h \leftarrow d$ のリスト先頭の女性.
   - $M(h) = \emptyset$ なら $M \leftarrow M + (d, h)$.
   - $M(h) \in D$ なら $M(h)$ と d のうち $\succ_h$ で下位のものを d' とし, $M \leftarrow M + (d, h) - (d', h)$. さらに d' のリストから h を削除.

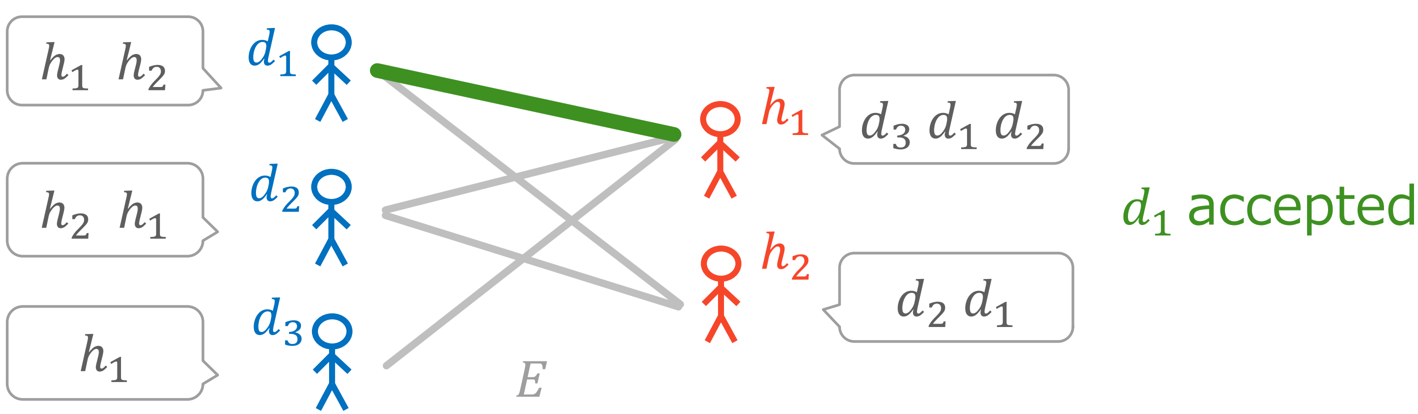


Gale-Shapleyアルゴリズム (受入保留アルゴリズムとも)

D側最適安定マッチングを線形時間で計算するアルゴリズム.

[前処理] Eの要素(許容可能なペア)以外は各主体のリストから削除しておく

1. $M \leftarrow \emptyset$
2. “未割当＆リストが非空” な男性がいる限りそのような d を任意にとり:
   - $h \leftarrow d$ のリスト先頭の女性.
   - $M(h) = \emptyset$ なら　$M \leftarrow M + (d, h)$.
   - $M(h) \in D$ なら $M(h)$ と d のうち $\succ_h$ で下位のものを d' とし, $M \leftarrow M + (d, h) - (d', h)$．さらに d' のリストから h を削除.

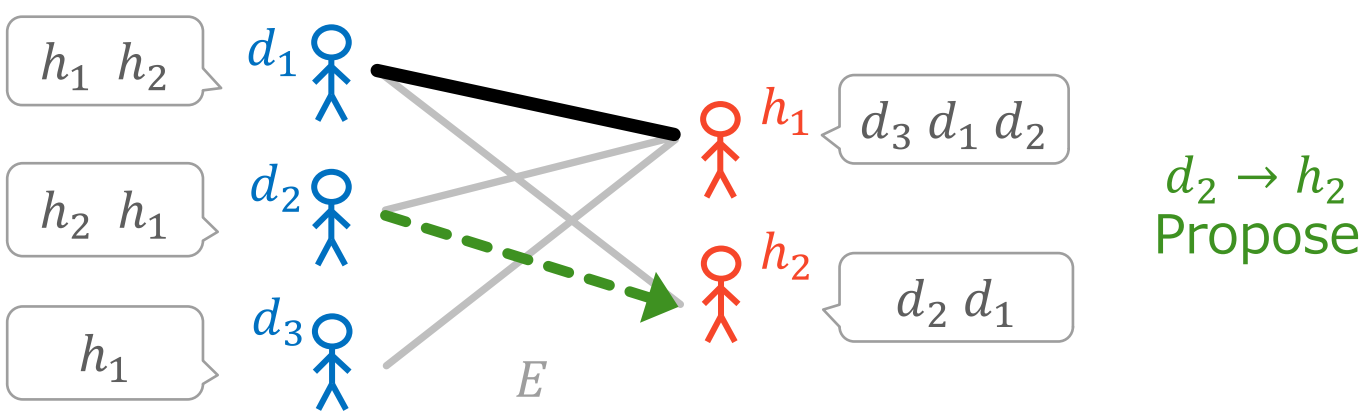


Gale-Shapleyアルゴリズム (受入保留アルゴリズムとも)

D側最適安定マッチングを線形時間で計算するアルゴリズム.

[前処理] Eの要素(許容可能なペア)以外は各主体のリストから削除しておく

1. $M \leftarrow \emptyset$
2. “未割当＆リストが非空” な男性がいる限りそのような d を任意にとり:
   - $h \leftarrow d$ のリスト先頭の女性.
   - $M(h) = \emptyset$ なら $M \leftarrow M + (d, h)$.
   - $M(h) \in D$ なら $M(h)$ と d のうち $\succ_h$ で下位のものを d' とし, $M \leftarrow M + (d, h) - (d', h)$. さらに d' のリストから h を削除.

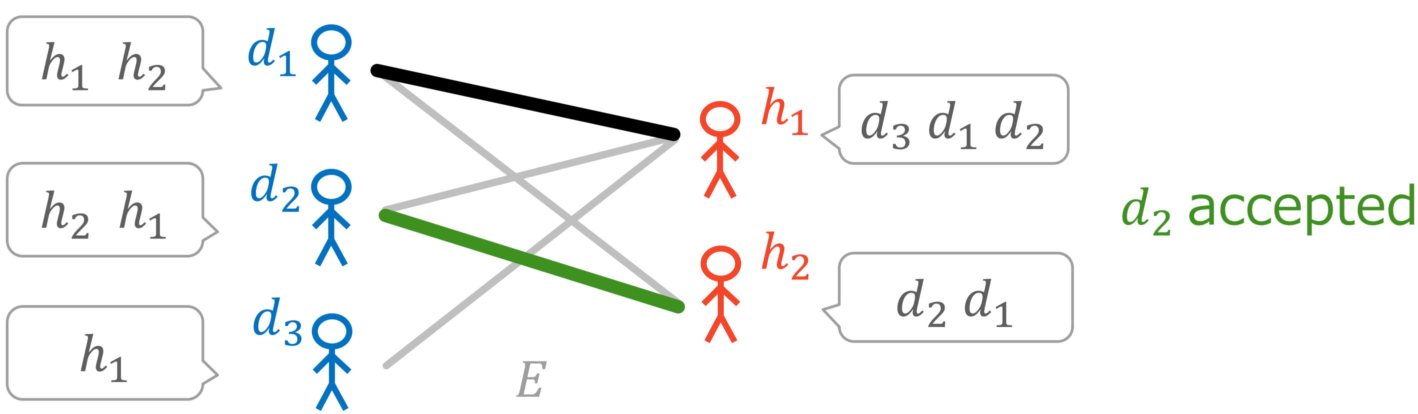


Gale-Shapleyアルゴリズム (受入保留アルゴリズムとも)

D側最適安定マッチングを線形時間で計算するアルゴリズム.

[前処理] Eの要素(許容可能なペア)以外は各主体のリストから削除しておく

1. $M \leftarrow \emptyset$
2. “未割当＆リストが非空” な男性がいる限りそのような d を任意にとり:
   - $h \leftarrow d$ のリスト先頭の女性.
   - $M(h) = \emptyset$ なら $M \leftarrow M + (d, h)$.
   - $M(h) \in D$ なら $M(h)$ と d のうち $\succ_h$ で下位のものを d' とし, $M \leftarrow M + (d, h) - (d', h)$. さらに d' のリストから h を削除.

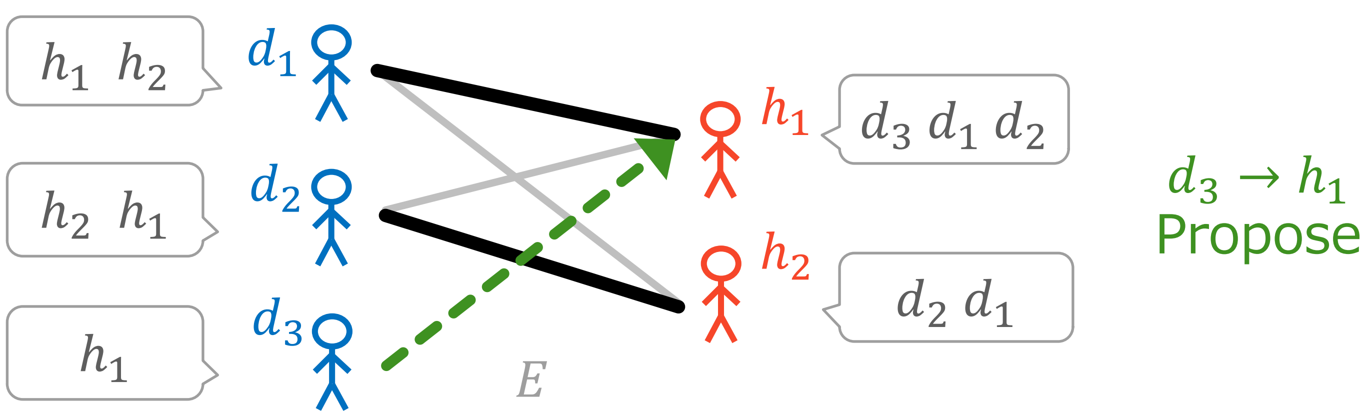


Gale-Shapleyアルゴリズム (受入保留アルゴリズムとも)

D側最適安定マッチングを線形時間で計算するアルゴリズム.

[前処理] Eの要素(許容可能なペア)以外は各主体のリストから削除しておく

1. $M \leftarrow \emptyset$
2. “未割当＆リストが非空” な男性がいる限りそのような d を任意にとり:
   - $h \leftarrow d$ のリスト先頭の女性.
   - $M(h) = \emptyset$ なら $M \leftarrow M + (d, h)$.
   - $M(h) \in D$ なら $M(h)$ と d のうち $\succ_h$ で下位のものを d' とし, $M \leftarrow M + (d, h) - (d', h)$. さらに d' のリストから h を削除.

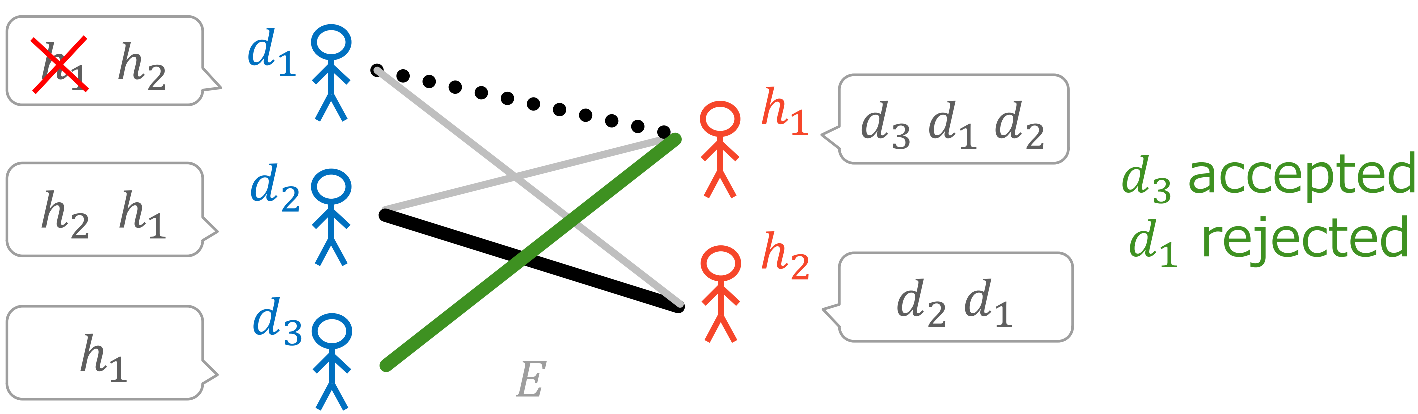


Gale-Shapleyアルゴリズム (受入保留アルゴリズムとも)

D側最適安定マッチングを線形時間で計算するアルゴリズム.

[前処理] Eの要素(許容可能なペア)以外は各主体のリストから削除しておく

1. $M \leftarrow \emptyset$
2. "未割当&リストが非空" な男性がいる限りそのような d を任意にとり:
   - $h \leftarrow d$ のリスト先頭の女性.
   - $M(h) = \emptyset$ なら　$M \leftarrow M + (d, h)$.
   - $M(h) \in D$ なら $M(h)$ と d のうち $\succ_h$ で下位のものを d' とし, $M \leftarrow M + (d, h) - (d', h)$. さらに d' のリストから h を削除.

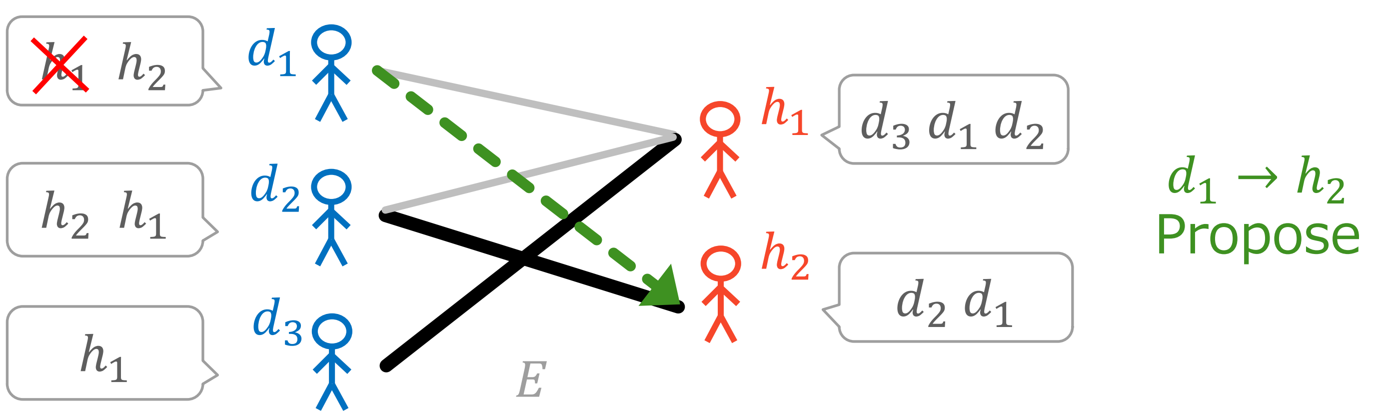


Gale-Shapleyアルゴリズム (受入保留アルゴリズムとも)

D側最適安定マッチングを線形時間で計算するアルゴリズム.

[前処理] Eの要素(許容可能なペア)以外は各主体のリストから削除しておく

1. $M \leftarrow \emptyset$
2. “未割当＆リストが非空” な男性がいる限りそのような d を任意にとり:
   - $h \leftarrow d$ のリスト先頭の女性.
   - $M(h) = \emptyset$ なら $M \leftarrow M + (d, h)$.
   - $M(h) \in D$ なら $M(h)$ と d のうち $\succ_h$ で下位のものを d' とし,
     $M \leftarrow M + (d, h) - (d', h)$. さらに d' のリストから h を削除.

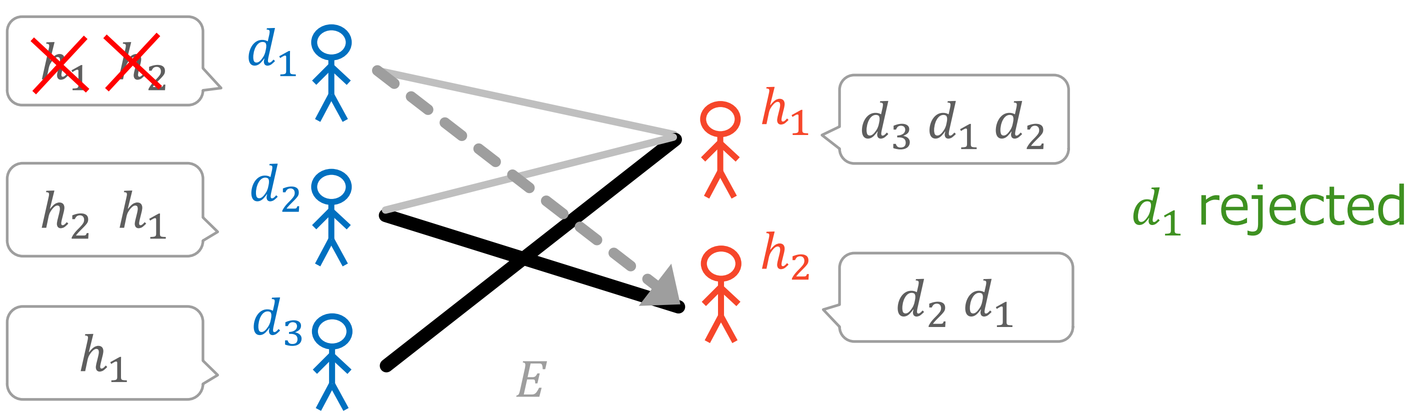


Gale-Shapleyアルゴリズム (受入保留アルゴリズムとも)

D側最適安定マッチングを線形時間で計算するアルゴリズム.

[前処理] Eの要素(許容可能なペア)以外は各主体のリストから削除しておく

1. $M \leftarrow \emptyset$
2. “未割当＆リストが非空” な男性がいる限りそのような d を任意にとり:
   - $h \leftarrow d$ のリスト先頭の女性.
   - $M(h) = \emptyset$ なら　$M \leftarrow M + (d, h)$.
   - $M(h) \in D$ なら $M(h)$ と d のうち $>_h$ で下位のものを d' とし,
     $M \leftarrow M + (d, h) - (d', h)$.　さらに d' のリストから h を削除.

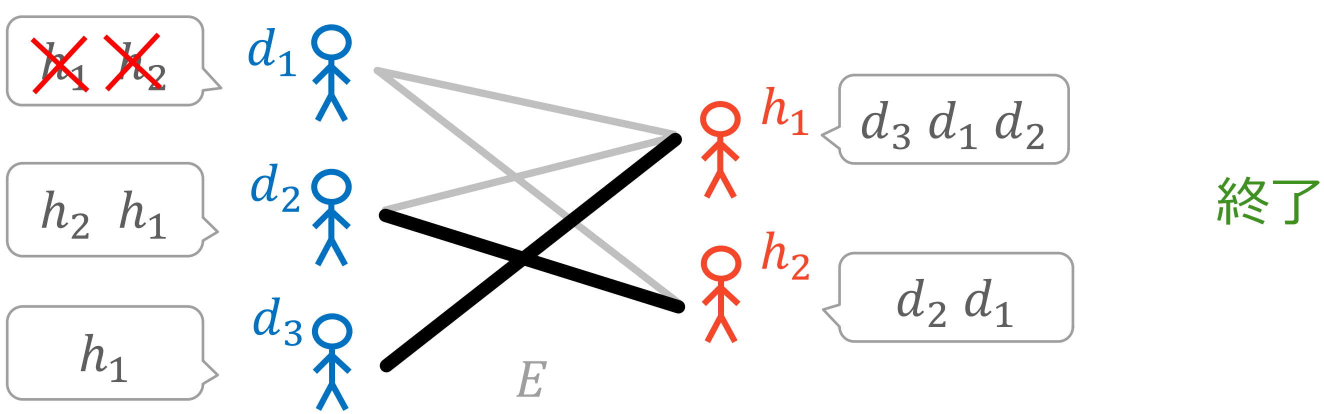


Gale-Shapleyアルゴリズム (受入保留アルゴリズムとも)

D側最適安定マッチングを線形時間で計算するアルゴリズム.

[前処理] Eの要素(許容可能なペア)以外は各主体のリストから削除しておく

1. $M \leftarrow \emptyset$
2. “未割当＆リストが非空” な男性がいる限りそのような d を任意にとり:
   - $h \leftarrow d$ のリスト先頭の女性.
   - $M(h) = \emptyset$ なら　$M \leftarrow M + (d, h)$.
   - $M(h) \in D$ なら $M(h)$ と d のうち $\succ_h$ で下位のものを d' とし, $M \leftarrow M + (d, h) - (d', h)$. さらに d' のリストから h を削除.



Gale-Shapleyアルゴリズム: 正当性の証明

出力 M がマッチングなことは明らか.

安定性：$\forall(d,h) \in E$:「$h \succ_d M(d) \Rightarrow M(h) \succ_h d$」 を確認する.

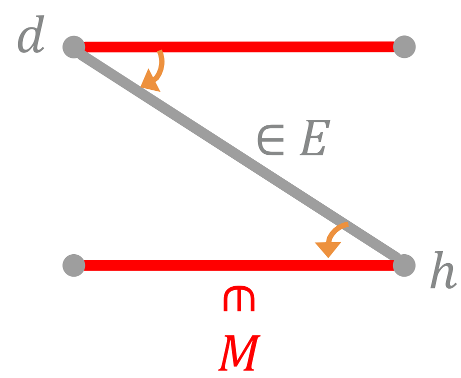
$h \succ_d M(d)$

$\Rightarrow$ アルゴリズム中で d は h にリジェクトされた

$\Rightarrow$ そのリジェクトの直後は $M(h) \succ_h d$

$\Rightarrow$ $M(h)$ は $\succ_h$ に関して単調改善なので

アルゴリズム終了時も $M(h) \succ_h d$.



***D*側最適性**：演習1 (ヒントあり).

補足: D, Hの役割を交換したアルゴリズムの出力はH側最適安定マッチング

マッチングメカニズムと耐戦略性

主体集合 D, H は固定

- **プロファイル**: 選好順序の組 $P = (\{\succ_d\}_{d \in D}, \{\succ_h\}_{h \in H})$
- **メカニズム**: 各プロファイルにマッチングをひとつ対応させる写像
- メカニズム F が ***D*側耐戦略的**: 「どの男性も自身の選好を偽って申告しても得できない」．フォーマルには以下が成り立つこと:

  $P = (\{\succ_d\}_{d \in D}, \{\succ_h\}_{h \in H})$ を任意のプロファイルとし，
  $d \in D$ を任意の男性とする．d の選好 $\succ_d$ を任意の別の選好 $\succ'_d$ に置き換えたプロファイルを P' とする．このとき
  $M \coloneqq F(P),\ M' \coloneqq F(P')$ とすると，$M(d) \succcurlyeq_d M'(d)$.

マッチングメカニズムと耐戦略性

- 常に安定マッチングを出力するメカニズムで, 両側耐戦略的なものは存在しない [Roth 1982]

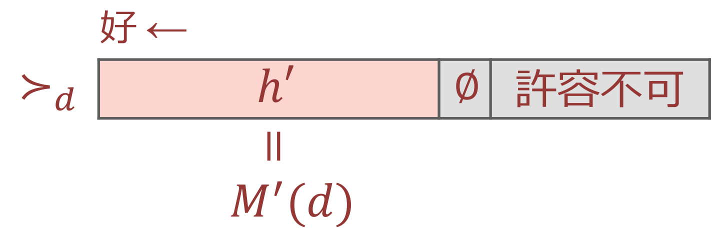
- 任意のプロファイルに対しD側最適安定マッチングを返すメカニズムは D側耐戦略的 [Dubins–Freedman 1981], [Roth 1982]
  ∴ D側プロポーズGSはD側耐戦略的.

- 次頁でD側耐戦略性の証明 by [Hatfield–Milgrom 2005] を紹介.
  この証明の特徴:
  - GSアルゴリズムの動作に依らない
  - 構造的な性質 (定理1と2) を使って示される
  - より一般的なモデルへ拡張可能 (元論文ではかなり一般化されたモデルに対して証明)

耐戦略性の証明 based on [Hatfield–Milgrom 2005]

$F \coloneqq D$側最適安定マッチングを返すメカニズム (定理 2 より well-defind)

$P = (\{\succ_d\}_{d \in D}, \{\succ_h\}_{h \in H})$: 任意のプロファイル, $d \in D$: 任意の男性,
$P' = \succ_d$ を別の $\succ'_d$ に置き換えたプロファイル.
$M \coloneqq F(P)$, $M' \coloneqq F(P')$ とし， $h' \coloneqq M'(d)$.



示すこと: $M(d) \succcurlyeq_d h'$.

h' のみを許容可能とした選好を $\succ_d^1$ とする.
d の選好を $\succ_d^1$ としたプロファイル P^1 でも
M' は安定マッチング.

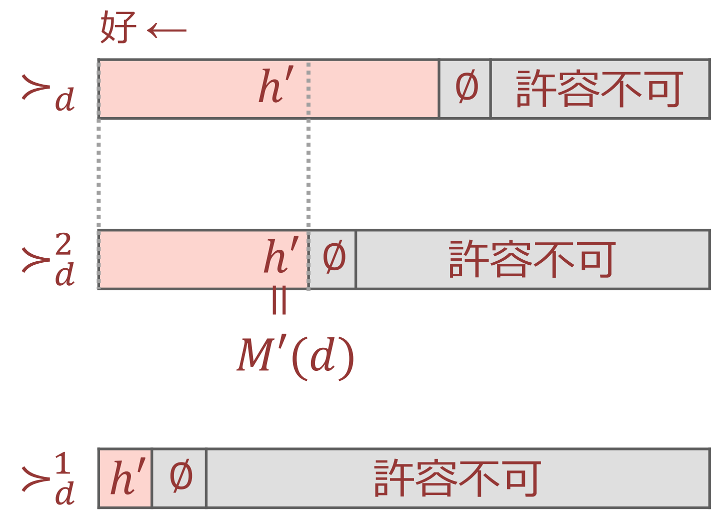
定理 1 (マッチする主体の不変性) より
P^1 の全ての安定マッチングで d はマッチできる.
$\therefore$ P^1 では, d をマッチさせせないマッチングはブロッキングペアをもつ.

耐戦略性の証明 based on [Hatfield–Milgrom 2005]

✔ P^1 では, d をマッチさせないマッチングはブロッキングペアをもつ.

オリジナルの選好 $\succ_d$ の h' 以上の部分は残し h' より下の部分を許容不可とした選好を $\succ_d^2$ とする. d の選好を $\succ_d^2$ としたプロファイルを P^2 とする.

(✔より) P^1では d をマッチさせない任意のマッチング N はブロッキングペアをもつ．そのペアは P^2 でも N のブロッキングペアとなる.



∴ P^2 のどの安定マッチングも d を h' or より望ましい人とマッチさせる.

P^2 の安定マッチングはオリジナルの P でも安定マッチング.

$M = F(P)$ は P の男性最適安定マッチングなので $M(d) \succcurlyeq_d h'$. □

補足

耐戦略性: 補足

- D側プロポーズGS (によって定まるメカニズム）は,
“出力が常に安定 & D側耐戦略的” な唯一のメカニズム.

メカニズムがある入力に対して男性最適安定マッチング M^* 以外の安定マッチング M を出力したとすると, $M^*(d) \succ_d M(d)$ となっている男性 d が存在.
d は $M^*(d)$ より下の部分をリストから削除すると $M^*(d)$ とマッチできるようになる.

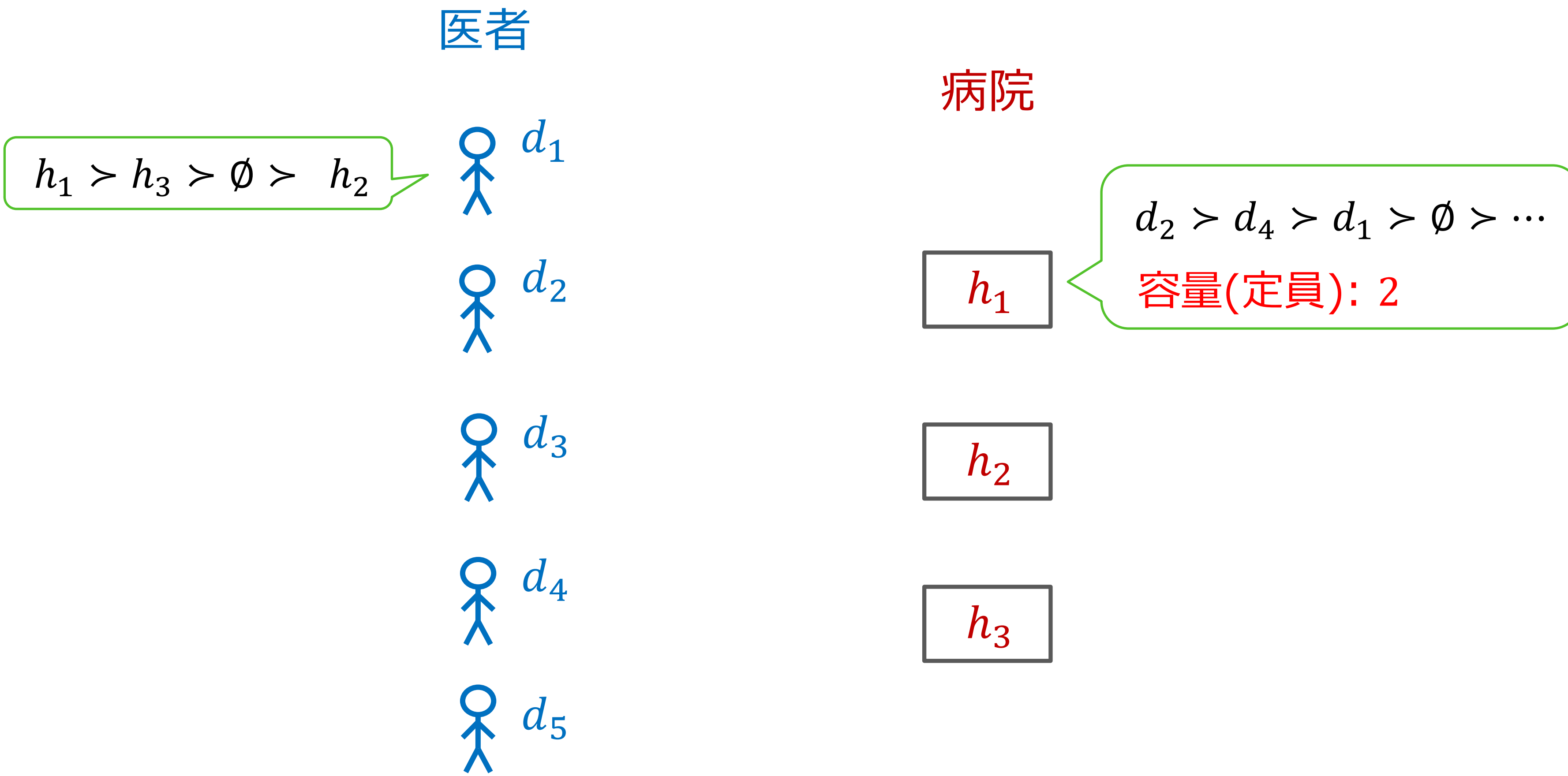
- D側最適安定メカニズムは男性に対して弱グループ耐戦略的だが強グループ耐戦略的ではない.

    - **弱グループ耐戦略的**: グループ $D' \subseteq D$ が選好リストを変化させて D' のメンバー全員の結果が改善する, ということはない

    - **強グループ耐戦略的**: グループ $D' \subseteq D$ が選好リストを変化させて D' のメンバーの少なくとも一人の結果が改善し残りの人は結果が変わらない, ということはない

多対一モデルへの拡張

医者の病院への配属や，大学内での研究室配属のように，
片側の主体 (病院・研究室などの組織) が複数の相手とマッチする状況.



多対一モデルへの拡張

インスタンス: $I = (D, H, \{\succ_d\}_{d \in D}, \{\succ_h, q_h\}_{h \in H})$

- D, H: 医者/病院集合, $q_h \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$: h の容量
- $M \subseteq D \times H$ が**マッチング**
  $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ どの医者 d (病院 h) も高々 1 つ (高々 q_h 人) の許容可能な病院 (医者) を割り当てられる,
- $M(d) \in H \cup \{\emptyset\}$: 割当先. $M(h) \subseteq D$: 割り当てられた集合.
- $(d, h) \in E \setminus M$ が**ブロッキングペア**
  $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $h \succ_d M(d)$ かつ「 $|M(h)| < q_h$ または $\exists d' \in M(h)$: $d \succ_h d'$ 」
- マッチング M が**安定** $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ ブロッキングペアが存在しない

多対一モデルへの拡張

- 安定マッチングどうしが1対1対応するような，
  多対一インスタンスから一対一インスタンスへの変換が存在.
  一対一ケースでの多くの結果が拡張できる.（演習2）

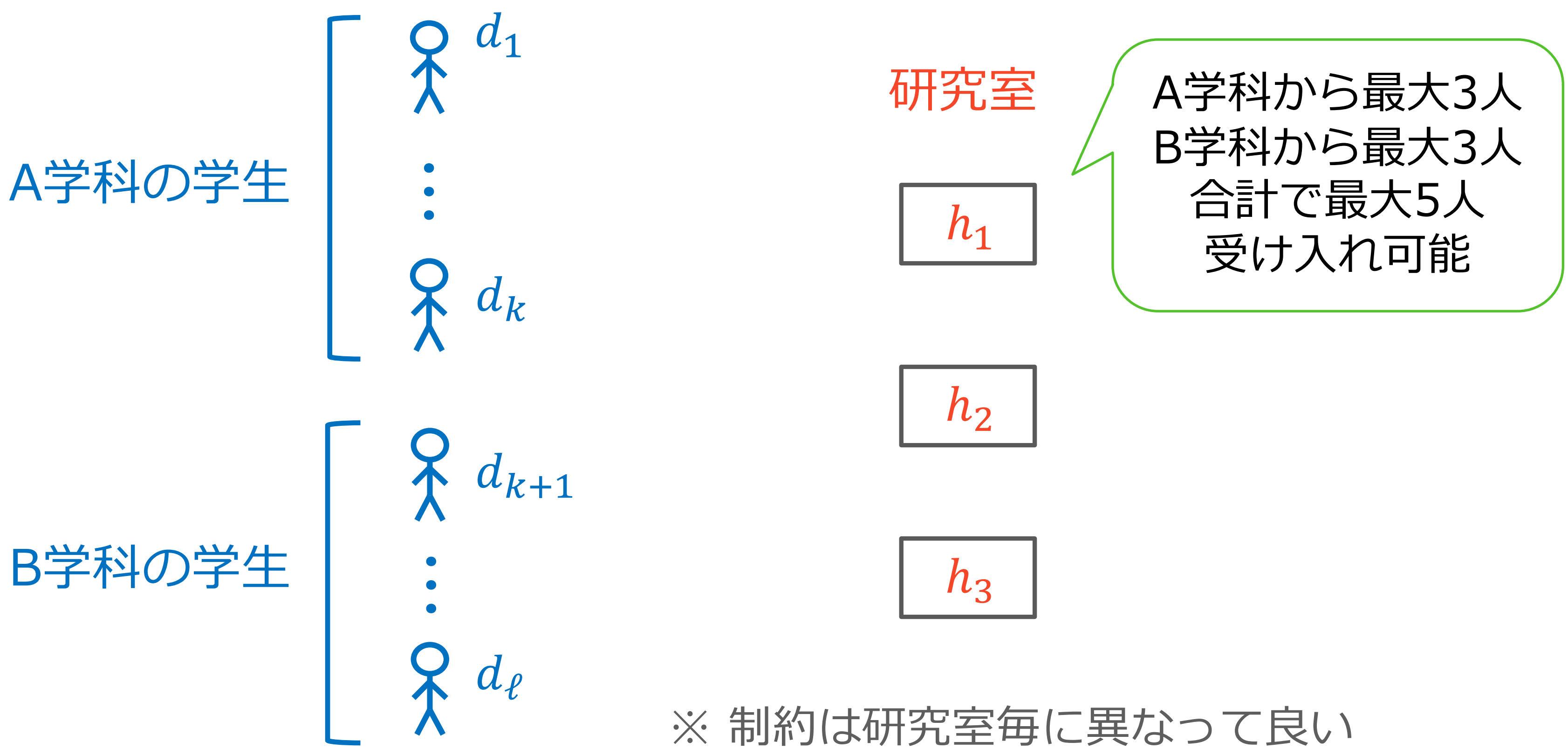
- 耐戦略性については注意が必要: D側プロポーズGSはD側耐戦略的
  だが，H側プロポーズGSはH側に対して耐戦略的でない.
  病院は リストの操作 や 容量の操作 によってH側プロポーズGS
  の出力を改善できることがある. [Roth 1985], [Sönmez 1997]

※ 多対一モデルでのGSアルゴリズム:一対一版アルゴリズムの自然な拡張.
D側プロポーズ版では各病院は上位 q_h人までをキープ. H側プロポーズ版では
各病院は “割当人数が q_h未満&リストが非空” な限りプロポーズを続ける.

制約付きマッチングとマトロイド

制約付き多対一マッチング

多対一マッチング (学生-研究室, 医者-病院) で, 各組織 (研究室, 病院) が単なる定員人数をもつだけでなく，組合せ的な制約をもつ状況を扱う.



※ 制約は研究室毎に異なって良い
※ 各研究室は学生全体の上に選好順序をもつ

安定性をどう定義するか

禁止構造として何を考えるか？既存研究で見受けられるもの.

1. ブロッキングペア $(d, h) \in D \times H$:

$h \succ_d M(d)$ かつ

h は d をマッチ相手に加えて (かつ適宜リジェクトをして) 改善できる.

2. ブロッキング提携 $(D', h) \in 2^D \times H$:

$\forall d \in D': h \succ_d M(d)$ かつ

h は D' をマッチ相手に加えて (　　〃　　) 改善できる.

※ ブロッキングペアはブロッキング提携の特殊ケース

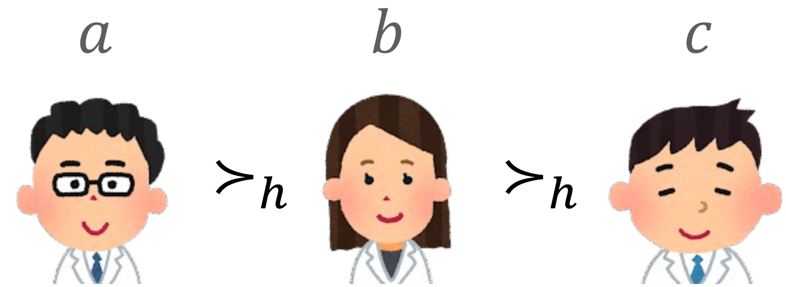
集合に対する選好をどう定義するか

例:

病院 h の選好を考える.

三人の医者 a, b, c がいる.

各個人を比較したら



a と他の人は同時に雇えない.

病院 h の許容可能な集合の族は $\mathcal{I}_h = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$.

$\{a\}$ と $\{b, c\}$ のどちらが好ましいか？

もし好ましさが数値 $w(a), w(b), w(c) \in \mathbf{R}_{>0}$ で与えられていたら

$w(a)$ と $w(b) + w(c)$ の比較によって定めるのが (ある程度) 妥当に思える

安定性の定義: 効用の値がわかるとき

$I = (D, H, \{\succ_d\}_{d\in D}, \{w_h, \mathcal{J}_h\}_{h\in H})$

$w_h : D \to \mathbf{R}_{>0}$: 効用

$\mathcal{J}_h \subseteq 2^D$: 許容可能集合の族. 下に閉じていると仮定 $(X \subseteq Y \in \mathcal{J}_h \Rightarrow X \in \mathcal{J}_h)$

$M \subseteq D \times H$ が**マッチング** $\overset{\text{def.}}{\iff}$ $\forall d \in D$: $M(d) \succcurlyeq_d \emptyset$ かつ $\forall h \in H$: $M(h) \in \mathcal{J}_h$

M が [ペア/提携] **安定** $\overset{\text{def.}}{\iff}$ ブロッキング [ペア/提携] 無し

1. ブロッキングペア (d, h):

$h \succ_d M(d)$ かつ $\exists S \subseteq M(h) + d$: $S \in \mathcal{J}_h$, $w_h(S) > w_h(M(h))$

$\coloneqq \sum_{d\in S} w_h(d)$

2. ブロッキング提携 (D', h):

$\forall d \in D'$: $h \succ_d M(d)$ かつ $\exists S \subseteq M(h) \cup D'$: $S \in \mathcal{J}_h$, $w_h(S) > w_h(M(h))$

選好順序のみで定義する安定性

重み w_h が順序 $\succ_h$ に**整合的**: $w_h(d) > w_h(d') \iff d \succ_h d'$

各 $h \in H$ の重みは分からず順序しか分からないときに考えうる安定性:

任意の整合的な重みで**提携**安定

任意の整合的な重みで**ペア**安定

ある整合的な重みで**提携**安定

ある整合的な重みで**ペア**安定

厳しい ⟷ 緩い

<u>一般には</u>

これらの定義は全て異なる

どの定義でも解の存在が保証できない

どの定義でも解の存在判定はNP困難

<u>各 $\mathcal{I}_h$ がマトロイドなら</u>

全ての定義が等価

解が必ず存在

効率的に計算できる

さらに，マトロイドであることはこれらが成り立つための”ある種の”必要条件.

マトロイド (Matroid) [Whitney 1935] [Nakasawa 1935]

マトロイド: 有限集合 S と以下の公理をみたす集合族 $\mathcal{I} \subseteq 2^S$ のペア $(S, \mathcal{I})$

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$

(I2) $X \subseteq Y \in \mathcal{I} \ \Rightarrow \ X \in \mathcal{I}$

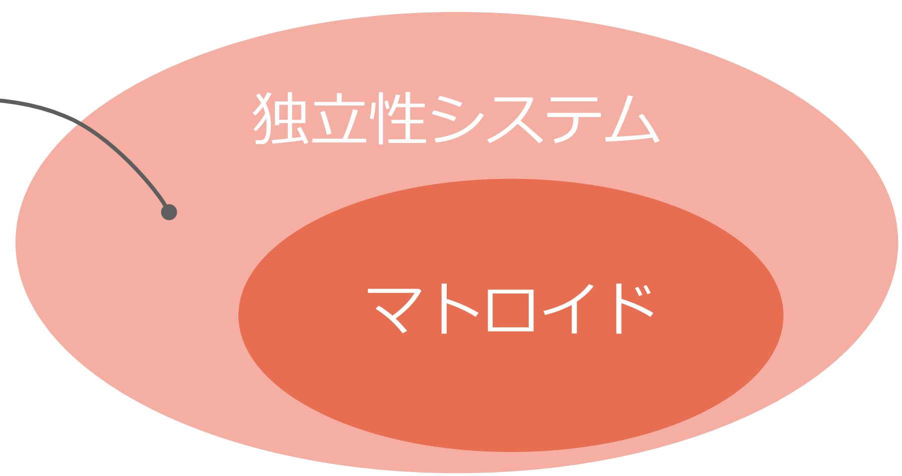
(I3) $X, Y \in \mathcal{I},\ |X| < |Y|$ ならば $\exists e \in Y \setminus X\colon\ X + e \in \mathcal{I}$

独立性システム: (I1), (I2)を満たし(I3)は必ずしも満たさないペア $(S, \mathcal{I})$.

本資料では用語を少し乱用し, $\mathcal{I}$ 自体をマトロイド/独立性システムと呼んだりする.

ナップサック制約
グラフの独立頂点集合 etc.

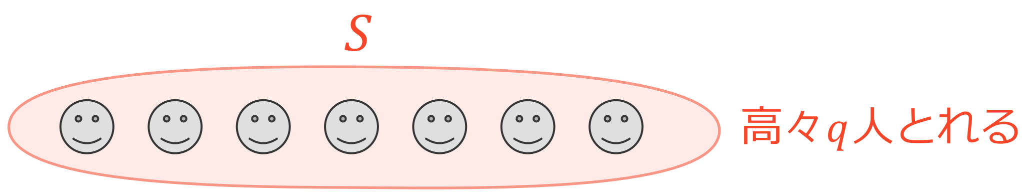
先述の $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$
はマトロイドでない
独立性システムの最小の例



マトロイドの例

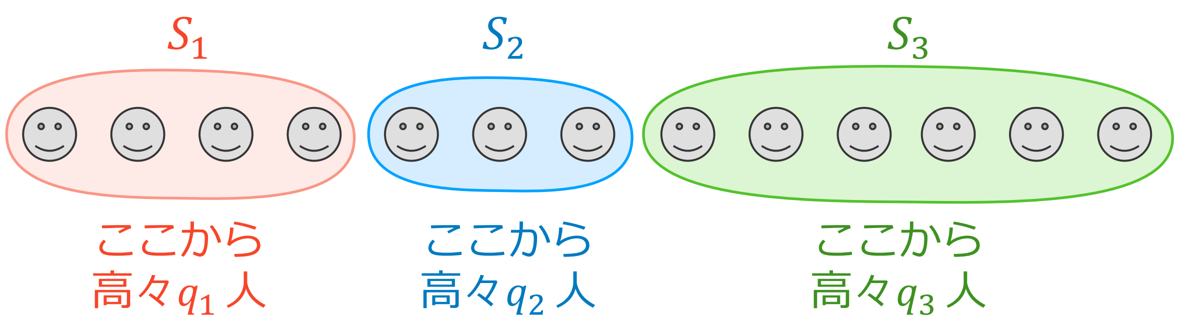
S: 有限集合．以下で $\mathcal{I} \subseteq 2^S$ を定めると $(S, \mathcal{I})$ はマトロイド．

1. 一様マトロイド: 容量 $q \in \mathbf{N}$ に対して $\mathcal{I} = \{\, X \subseteq S \mid |X| \leq q \,\}$



2. 分割マトロイド: S の分割 $\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ と $q_1, q_1, \ldots, q_k \in \mathbf{N}$ に対して

$$\mathcal{I} = \{\, X \subseteq S \mid |X \cap S_i| \leq q_i \ \ (i = 1,2,\ldots,k) \,\}$$

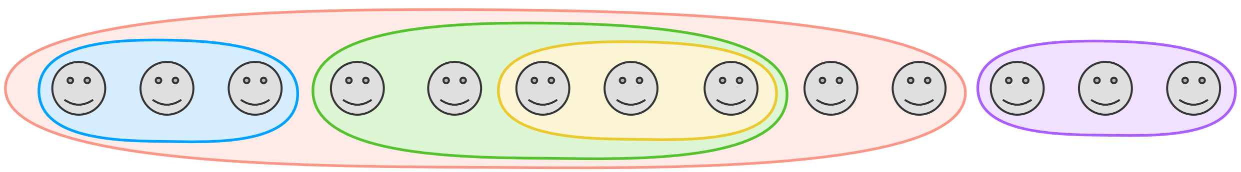


マトロイドの例

S: 有限集合．以下で $\mathcal{I} \subseteq 2^S$ を定めると $(S, \mathcal{I})$ はマトロイド.

3. 層マトロイド: 層族 $\mathcal{L} \subseteq 2^S$ (任意の $L, L' \in \mathcal{L}$ が互いに素 or 包含関係)

$q: \mathcal{L} \to \mathbf{N}$ に対し $\mathcal{I} = \{\, X \subseteq S \mid \forall L \in \mathcal{L}\colon |X \cap L| \leq q(L) \,\}$



$\mathcal{L}$ = 各色が定める集合の族（上の場合 $|\mathcal{L}| = 5$)

各 $L \in \mathcal{L}$ からとって良い人数は高々 $q(L)$ 人

※ 定義から明らかに 一様マトロイド ⊆ 分割マトロイド ⊆ 層マトロイド

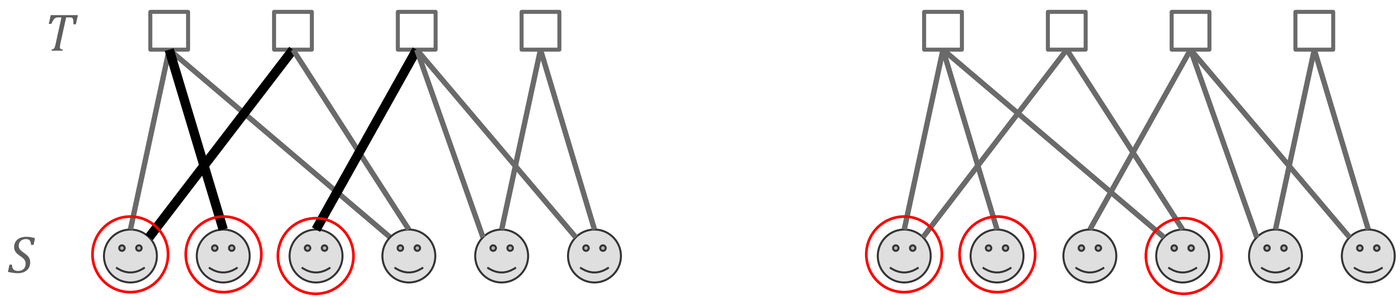
マトロイドの例

S: 有限集合．以下で $\mathcal{I} \subseteq 2^S$ を定めると $(S, \mathcal{I})$ はマトロイド．

4. 横断マトロイド: S が二部グラフ $G = (T, S; E)$ の片側頂点集合なとき

$$\mathcal{I} = \{\, X \subseteq S \mid G \text{ は } X \text{ をカバーするマッチングをもつ} \,\}$$

X ≔ 赤丸で囲った要素の集合, とすると



OK $(X \in \mathcal{I})$ NG $(X \notin \mathcal{I})$

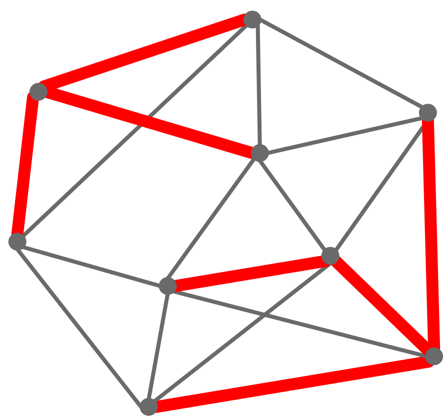
マトロイドの例

S: 有限集合．以下で $\mathcal{I} \subseteq 2^S$ を定めると $(S, \mathcal{I})$ はマトロイド．

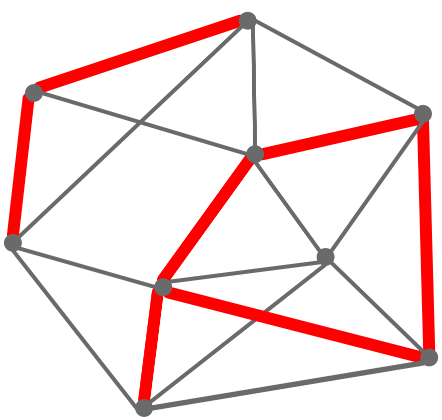
5. グラフ的マトロイド: S がグラフ $G = (V, S)$ の辺集合であるとき

$$\mathcal{I} = \{\, X \subseteq S \mid S \text{ は } G \text{ のサイクルを含まない} \,\}$$

X := 赤色の辺集合, とすると



OK ($X \in \mathcal{I}$)



NG ($X \notin \mathcal{I}$)

マトロイドと最適化

なぜマトロイドが組合せ最適化において重要視されているのか？

⇒ **「問題がマトロイド的構造をもつと最適化しやすい」** から

独立性システム $(S,\mathcal{I})$, 重み $w: S \to \mathbf{R}_{>0}$, 集合 $S' \subseteq S$ に対する最適化問題

$$「\max\ w(X)\quad \mathrm{sub.to}\quad X \in \mathcal{I},\ X \subseteq S'」$$

は一般にはNP困難.（$\mathcal{I}$ はメンバーシップオラクルで与えられているとする)

- マトロイドの場合は貪欲アルゴリズムによって**効率的に最適化できる**.
- 大域最適性＝局所最適性 が成り立つため**最適性の保証も簡単**.

貪欲アルゴリズム

Greedy Algorithm

入力: 独立性システム $(S, \mathcal{I})$, $w: S \to \mathbf{R}_{>0}$, $S' \subseteq S$

1. $S' = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$, $w(e_1) \geq w(e_2) \geq \cdots \geq w(e_k)$ となるようにソート
2. $Y \leftarrow \emptyset$
3. For $i = 1,2, \dots, k$ do: $Y + e_i \in \mathcal{I}$ なら $Y \leftarrow Y + e_i$

最後に Y を出力

<u>定理 (マトロイドの特徴付け)</u> [Rado 1957], [Edmonds 1971]

独立性システム $(S, \mathcal{I})$ に対して，以下二つは同値:

- $(S, \mathcal{I})$ はマトロイド
- 任意の $w: S \to R_{>0}$ と $S' \subseteq S$ に対して，Greedy Algorithm の出力は「$\max\ w(X)\ \ \mathrm{sub.to}\ \ X \in \mathcal{I},\ X \subseteq S'$」の最適解.

[ポイント] 要素の重みの大小関係(順序)さえ知っていれば最適化できる.

※ 定理の証明は補足資料に記載.

大域最適性 vs 局所最適性

定理 (最適性条件)

$(S, \mathcal{I})$ がマトロイドであるとき，任意の $w: S \to R_{>0}$ と $S' \subseteq S$ に対して以下のふたつは同値.

(i) X^* は「$\max\ w(X)\ \ \text{sub. to}\ \ X \in \mathcal{I},\ X \subseteq S'$」の最適解

(ii) どの $e \in S' \setminus X^*$ についても以下が成り立つ：

$$X^* + e \notin \mathcal{I} \quad \text{かつ} \quad \forall f \in X^*\!: \ X^* + e - f \in \mathcal{I} \ \Rightarrow \ w(f) \geq w(e)$$

(i) ⇒ (ii) は定義から明らか．逆向きが非自明.

[ポイント] 条件 (ii) は, 要素の重みの大小関係 (順序) のみで記述可能.

マトロイド制約付きマッチング

インスタンス: $I = (D, H, \{\succ_d\}_{d \in D}, \{\succ_h, \mathcal{I}_h\}_{h \in H})$

- D, H: 医者/病院集合
- $\succ_d$: 医者 d の選好. $H \cup \{\emptyset\}$ 上の全順序
- $\succ_h$: 病院 h の選好. D 上の全順序
- $\mathcal{I}_h \subseteq 2^D$: 医者 h の許容可能集合族. $(D, \mathcal{I}_h)$ はマトロイド

$M \subseteq D \times H$ が**マッチング** $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall d \in D$: $M(d) \succcurlyeq_d \emptyset$ かつ $\forall h \in H$: $M(h) \in \mathcal{I}_h$

マトロイド制約付きマッチング

$(d,h) \in D\times H$ がマッチング M の**ブロッキングペア**

$$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} h \succ_d M(d) \\ M(h)+d \in \mathcal{J}_h \text{ または } \exists d' \in M(h)\colon\ M(h)+d-d' \in \mathcal{J}_h,\ d \succ_h d' \end{cases}$$

マッチングMが**安定** $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ ブロッキングペア無し

この安定性 (①とする) は，先述の安定性の全てと同値

任意の整合的な重みで**提携**安定

③

任意の整合的な重みで**ペア**安定

ある整合的な重みで**提携**安定

ある整合的な重みで**ペア**安定

②

厳しい ⟷ 緩い

マトロイド制約付きマッチング

以下の３つの同値性を確認.

¬① $\exists (d,h) \in D \times H$ s.t.

$$\begin{cases} h \succ_d M(d) \\ M(h)+d \in \mathcal{I}_h \text{ または } \exists d' \in M(h)\colon M(h)+d-d' \in \mathcal{I}_h,\ d \succ_h d' \end{cases}$$

¬② $\exists h \in H$ s.t. $\succ_h$ に整合的な任意の w_h に対し

$\exists d \in D$: [$h \succ_d M(d)$ and $\exists S \subseteq M(h)+d$: $S \in \mathcal{I}_h$, $w_h(S) > w_h\big(M(h)\big)$].

¬③ $\exists h \in H$ s.t. $\succ_h$ に整合的なある w_h^* に対し

$\exists D' \subseteq D$: [$\forall d \in D'$: $h \succ_d M(d)$ and

$\exists S \subseteq M(h) \cup D'$: $S \in \mathcal{I}_h$, $w_h^*(S) > w_h^*(M(h))$].

マトロイド制約付きマッチング

以下の３つの同値性を確認.

¬① $\exists(d,h) \in D \times H$　s.t.

定義より

$$\begin{cases} h \succ_d M(d) \\ M(h)+d \in \mathcal{I}_h \text{ または } \exists d' \in M(h)\colon M(h)+d-d' \in \mathcal{I}_h,\ d \succ_h d' \end{cases}$$

大域最適＝局所最適より

¬② $\exists h \in H$　s.t. $\succ_h$ に整合的な任意の w_h に対し

定義より

$\exists d \in D$: [$h \succ_d M(d)$ and $\exists S \subseteq M(h)+d$: $S \in \mathcal{I}_h$, $w_h(S) > w_h\big(M(h)\big)$].

¬③ $\exists h \in H$　s.t.　$\succ_h$ に整合的なある w_h^* に対し

$\exists D' \subseteq D$: [$\forall d \in D'$: $h \succ_d M(d)$ and

$\exists S \subseteq M(h) \cup D'$: $S \in \mathcal{I}_h$, $w_h^*(S) > w_h^*(M(h))$].

マトロイド制約付きマッチング

定理 (安定マッチングの存在)

任意のマトロイド制約付きインスタンス $I = (D, H, \{\succ_d\}_{d \in D}, \{\succ_h, \mathcal{I}_h\}_{h \in H})$ に対して，安定マッチングは必ず存在する．効率的に計算できる．

[Fleiner 2001]
元論文ではより抽象的&一般的な枠組みで示されている

安定マッチング計算アルゴリズム(拡張版GS)を説明するため，
先述の貪欲アルゴリズムの変種を導入する．

貪欲アルゴリズム2

Greedy Algorithm 2

入力: 独立性システム $(S, \mathcal{I})$, 重み $w: S \to \mathbf{R}_{>0}$,
$S' \subseteq S$ の全要素を任意の順に並べた列 $(e_1, e_2, \cdots, e_k)$

1. $Y \leftarrow \emptyset$

2. For $i = 1,2, \dots, k$ do:
   - $Y + e_i \in \mathcal{I}$ なら $Y \leftarrow Y + e_i$
   - $Y + e_i \notin \mathcal{I}$ なら $\{ e \in Y + e_i \mid Y + e_i - e \in \mathcal{I} \}$ のうち w の値が最小の要素を e^* として，$Y \leftarrow Y + e_i - e^*$ (※ $e^* = e_i$ もあり得る)

定理　$(S, \mathcal{I})$ がマトロイドなら，任意の重み w と要素列に対し Greedy Algorithm 2 の出力は「$\max\ w(X)\ \ \mathrm{sub.to}\ \ X \in \mathcal{I},\ X \subseteq S'$」の最適解.

[ポイント] ここでも要素の重みの大小関係しか使っていない.

貪欲アルゴリズム2

Greedy Algorithm 2

S上の全順序$\succ$

入力: 独立性システム $(S,\mathcal{I})$, ~~重み $w: S \to \mathbf{R}_{>0}$,~~
$S' \subseteq S$ の全要素を任意の順に並べた列 $(e_1, e_2, \cdots, e_k)$

1. $Y \leftarrow \emptyset$

2. For $i = 1,2,\ldots,k$ do:

$\succ$の意味で最悪な

- $Y + e_i \in \mathcal{I}$ なら $Y \leftarrow Y + e_i$
- $Y + e_i \notin \mathcal{I}$ なら $\{ e \in Y + e_i \mid Y + e_i - e \in \mathcal{I} \}$ のうち ~~w の値が最小の~~要素を e^* として，$Y \leftarrow Y + e_i - e^*$ (※ $e^* = e_i$ もあり得る)

<u>定理</u>　$(S,\mathcal{I})$ がマトロイドなら，任意の順序$\succ$と要素列に対し Greedy Algorithm 2 の出力 Y は以下を満たす：どの $e \in S' \setminus Y$ についても

$$Y + e \notin \mathcal{I} \quad \text{かつ} \quad \forall f \in Y\colon\ Y + e - f \in \mathcal{I} \Rightarrow f \succ e$$

マトロイド制約付きGSアルゴリズム

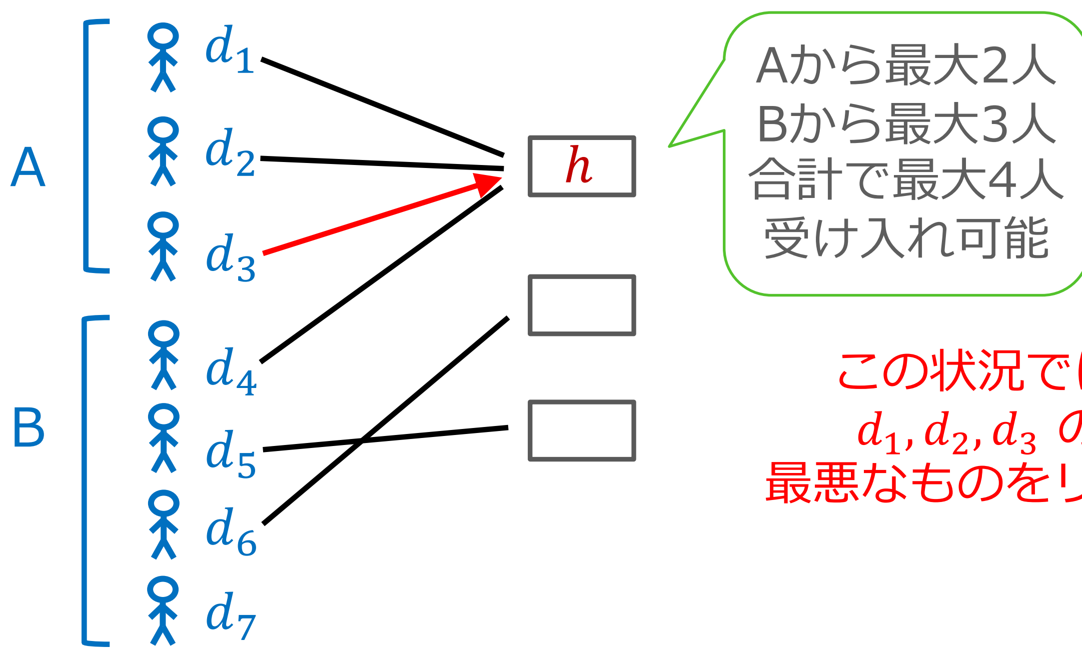
$M \leftarrow \emptyset$ から始め, 未割当&リスト非空の $d \in D$ がいる限り以下を繰り返す:

- $h \leftarrow d$ のリストの先頭.
- $M(h) + d \in \mathcal{I}_h$ なら $M \leftarrow M + (d, h)$.
- $M(h) + d \notin \mathcal{I}_h$ なら $\{ d' \in M(h) + d \mid M(h) + d - d' \in \mathcal{I}_h \}$ の中で $\succ_h$ の意味で最悪なものを d^* とし， $M \leftarrow M + (d, h) - (d^*, h)$ として d^* のリストから h を削除 (※ $d^* = d$ もあり得る)

マトロイド制約付きGSアルゴリズム

$M \leftarrow \emptyset$ から始め, 未割当&リスト非空の $d \in D$ がいる限り以下を繰り返す:

- $h \leftarrow d$ のリストの先頭.
- $M(h) + d \in \mathcal{I}_h$ なら $M \leftarrow M + (d, h)$.
- $M(h) + d \notin \mathcal{I}_h$ なら $\{ d' \in M(h) + d \mid M(h) + d - d' \in \mathcal{I}_h \}$ の中で $\succ_h$ の意味で最悪なものを d^* とし, $M \leftarrow M + (d, h) - (d^*, h)$ として d^* のリストから h を削除 (※ $d^* = d$ もあり得る)

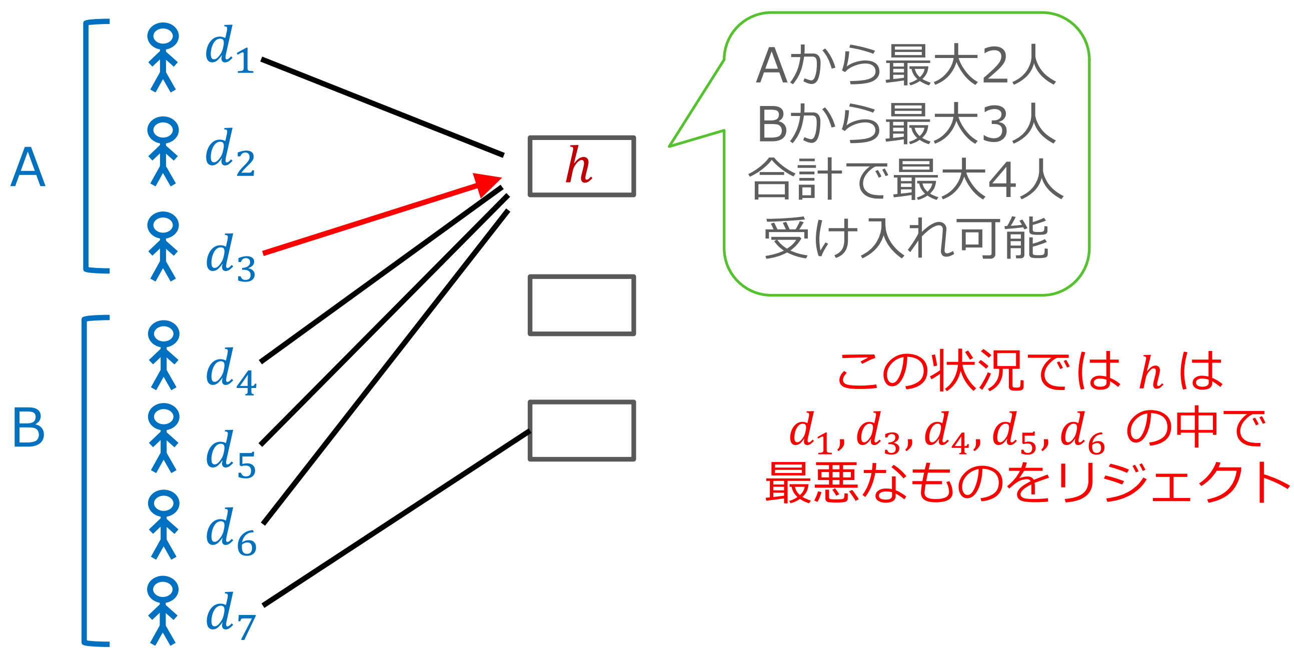


この状況では h は
d_1, d_2, d_3 の中で
最悪なものをリジェクト

マトロイド制約付きGSアルゴリズム

$M \leftarrow \emptyset$ から始め, 未割当&リスト非空の $d \in D$ がいる限り以下を繰り返す:

- $h \leftarrow d$ のリストの先頭.
- $M(h) + d \in \mathcal{I}_h$ なら $M \leftarrow M + (d, h)$.
- $M(h) + d \notin \mathcal{I}_h$ なら $\{ d' \in M(h) + d \mid M(h) + d - d' \in \mathcal{I}_h \}$ の中で $\succ_h$ の意味で最悪なものを d^* とし, $M \leftarrow M + (d,h) - (d^*, h)$ として d^* のリストから h を削除 (※ $d^* = d$ もあり得る)



マトロイド制約付きGSアルゴリズム: 正当性

出力 M が全員にとって許容可能なことは明らか.

安定性:

任意の $(d,h) \in D \times H$ に対し, $h \succ_d M(d)$ ならば以下が成り立つと示す:

「$M(h) + d \notin \mathcal{I}_h$ かつ $\forall d' \in M(h)$: $M(h) + d - d' \in \mathcal{I}_h \Rightarrow d' \succ_h d$ 」

$h \succ_d M(d)$

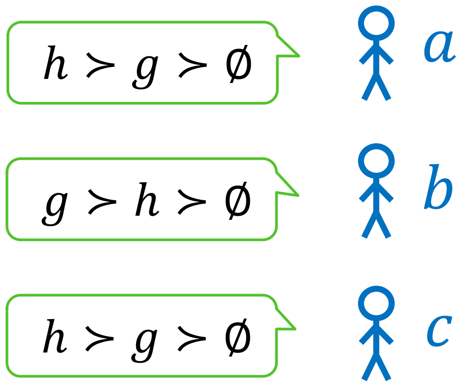
$\Rightarrow$ アルゴリズム中で d は h にリジェクトされている

$\Rightarrow$ 貪欲アルゴリズム2の正当性より, (h) が成立

※ d がリジェクトされた瞬間は明らかに (h) が成り立つが,
その後 $M(h)$ が更新されるため非自明. マトロイドだから成り立つ.

マトロイドでないとき

マトロイドでない独立性システムに対しては，どの安定性の定義でも解の存在しないことがあり得る.



$\boxed{h}$ $\mathcal{I}_h = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$

$b \succ a \succ c$

$\boxed{g}$ 単純な容量1制約

$c \succ b \succ a$

$\succ_h$ に整合的などんな重み w_h でも $w_h(\{b, c\}) > w_h(b) > w_h(a) > w_h(c)$.

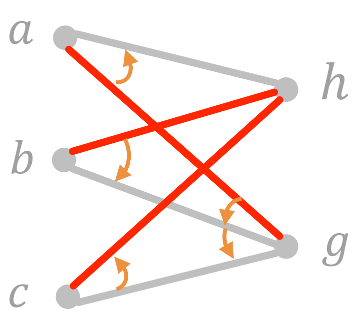
したがって，安定性の定義は重みに依らない.

どのマッチングでもブロッキングペアが発生する.

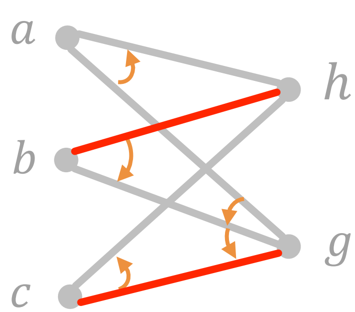
マトロイドでないとき

マトロイドでない独立性システムに対しては，どの安定性の定義でも解の存在しないことがあり得る.

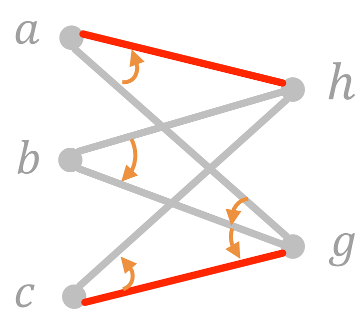
$$\{b,c\} \succ_h \{b\} \succ_h \{a\} \succ_h \{c\}$$



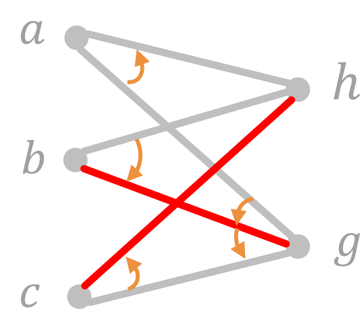
(b,g) がブロック



(c,h) がブロック



(b,h) がブロック



(a,h) がブロック

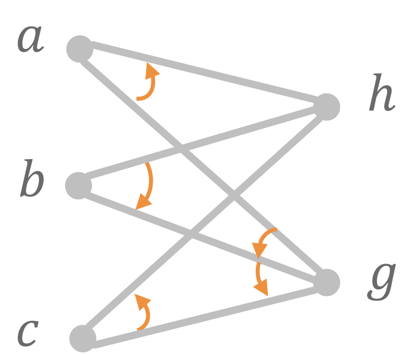
マトロイドでないとき

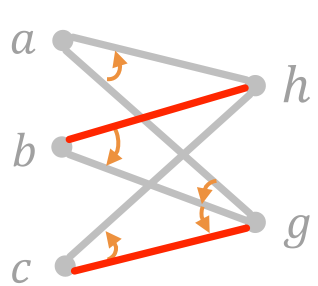
マトロイドでない独立性システムに対しては，どの安定性の定義でも解の存在しないことがあり得る.

GS適用例:

- $a \to h$: accepted,
- $b \to g$: accepted,
- $c \to h$: rejected,
- $c \to g$: accepted & b rejected,
- $b \to h$: accepted & a rejected,
- $a \to g$: rejected.

$\{b,c\} \succ_h \{b\} \succ_h \{a\} \succ_h \{c\}$





出力では (c,h) がブロック.

h は a,b,c からプロポーズされているのに最終割当は最適な $\{b,c\}$ でなく $\{b\}$ になっているのが原因.

マトロイドでないとき

命題 $(S,\mathcal{I})$ がマトロイドでない独立性システムのとき，以下のようなインスタンスが存在

- ある一つの病院 h の制約 $\mathcal{I}_h$ は $\mathcal{I}$ に同型
- その他の病院は容量1制約
- 安定マッチングをもたない

以下の観察と先の例を組み合わせると示せる.

観察 $(S,\mathcal{I})$ がマトロイドでない独立性システムだとすると,

$\exists Y, X \in \mathcal{I}$ s.t. $|X \setminus Y| = 1,$ $|Y \setminus X| = 2$, and $\forall e \in Y \setminus X$: $X + e \notin \mathcal{I}$.

マトロイドのとき: 構造的性質

一対一マッチングに対して紹介した性質が拡張される [Fleiner 01].

<u>定理 1′</u> 任意の二つの安定マッチング M, N に対して以下が成立:

- $\forall d \in D$: $M(d) = \emptyset \iff N(d) = \emptyset$
- $\forall h \in H$: $|M(h)| = |N(h)|$

より詳しくは以下が成立

$\mathrm{span}_h\big(M(h)\big) = \mathrm{span}_h(N(h))$

<u>定理 2′</u> D側最適安定マッチングが存在する.

1限と同様に「D側最適安定マッチングを返すメカニズムはD側耐戦略的」と示せる．マトロイド制約付きGSは出力がD側最適なので, D側耐戦略的.

定理 1′, 2′ は, **選択関数**を用いたフレームワークへ帰着して示される.

※ 帰着の概要を補足資料に記載.

補足資料

マトロイドのとき: 選択関数モデルへの帰着

$C: 2^D \to 2^D$ が D 上の**選択関数** $\overset{\text{def.}}{\iff} \forall D' \subseteq D\colon\ C(D') \subseteq D'$

$C(D')$ を「D' が与えられたときの best choice」とみなす

各 $h \in H$ の選好が D 上の選択関数 C_h で表されるモデルでは，以下の性質をもつと定理 1′ や 2′ が成り立つ． [Alkan ’02], [Fleiner ’03], [Hatfield–Milgrom ’05]

- $X \subseteq Y \subseteq D \ \Rightarrow\ X \setminus C_h(X) \subseteq Y \setminus C_h(Y)$ **代替性**
- $X \subseteq Y \subseteq D \ \Rightarrow\ |C_h(X)| \leq |C_h(Y)|$ **サイズの単調性**

マトロイド制約付きインスタンスに対して

$$C_h(D') = \arg\max\{\, w_h(X) \mid X \in \mathcal{I}_h, X \subseteq D' \}$$ （※w_h は $\succ_h$ に整合的）

で C_h を定めると Greedy Algorithm 2 の正当性から上記の両性質が従う．

証明: マトロイド ⇒ Greedyが最適解出力

p.52 の定理の証明

$w(e_1) > w(e_2) > \cdots > w(e_k)$ とする.

(重みが等しい要素がある場合も，最適解を変えないように摂動を加えれば上記のケースに帰着できる)

$Y \coloneqq$ Greedy の出力. $S_i \coloneqq \{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$ for $i = 1,2,\ldots,k$.

目標:「$Y \cap S_i \in \arg\max\{\, w(X) \mid X \in \mathcal{I},\ X \subseteq S_i\}$ for $i = 1,2,\ldots,k$ 」を示す.

<u>成り立たない i が存在すると仮定 (背理法スタート)</u>

$i^* \coloneqq$ 不成立となる最小の i. $Z \in \arg\max\{\, w(X) \mid X \in \mathcal{I},\ X \subseteq S_{i^*}\}$ とすると

$$w(Z) = w(Z \cap S_{i^*}) > w(Y \cap S_{i^*}).$$

i^* の定義と(I2)より

$$w(Z \cap S_{i^*-1}) \leq w(Y \cap S_{i^*-1}).$$

したがって $Z \ni e_{i^*} \notin Y$.

つづく

証明: マトロイド ⇒ Greedyが最適解出力

p.52 の定理の証明

$w(e_1) > w(e_2) > \cdots > w(e_k)$ とする.

(背理法つづき)

✓ $Z \in \arg\max\{\, w(X) \mid X \in \mathcal{I},\ X \subseteq S_{i^*} \}$. $Z \ni e_{i^*} \notin Y$.

- アルゴリズムおよび (I2) より $\forall e \in S_{i^*} \setminus Y$: $(Y \cap S_{i^*}) + e \notin \mathcal{I}$.
- $Z \in \mathcal{I},\ Z \subseteq S_{i^*}$ より $|Z| \leq |Y \cap S_{i^*}|$ ($\because$ $|Y \cap S_{i^*}| < |Z|$ だと (I3) やぶる)
- $Z \ni e_{i^*}$ より $|Z - e_{i^*}| < |Y \cap S_{i^*}|$.
- (I3)より $\exists f \in (Y \cap S_{i^*}) \setminus (Z - e_{i^*})$: $Z - e_{i^*} + f \in \mathcal{I}$.
  $e_{i^*} \notin Y$ より $f \in S_{i^*} \setminus \{e_{i^*}\} = S_{i^*-1}$. したがって $w(f) > w(e_{i^*})$.
- $w(Z - e_{i^*} + f) > w(Z)$ となり, Z の最適性に矛盾. □

証明: non-マトロイド ⇒ ある重みでGreedy失敗

p.52 の定理の証明

独立性システム $(S, \mathcal{I})$ がマトロイドでない

$\Rightarrow$ (I3) をやぶる

$\Rightarrow \exists X, Y \in \mathcal{I}$ s.t. $|X| < |Y|$ かつ $\forall e \in Y \setminus X$: $X + e \notin \mathcal{I}$

$\Rightarrow S' = X \cup Y$ とし,

X の各要素 e は $w(e) = 1 + \epsilon$ $(\epsilon < 1/|X|)$,

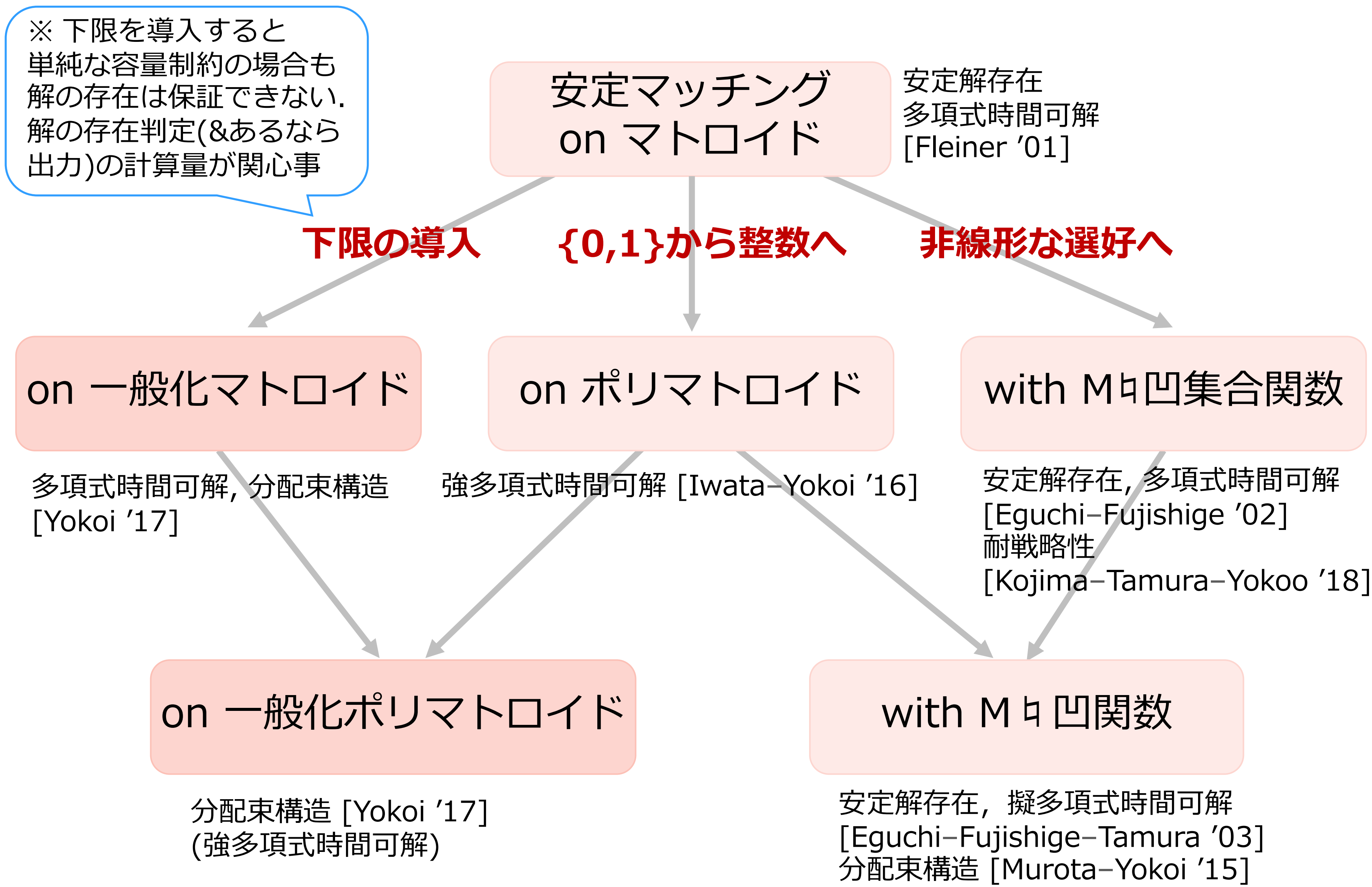
$Y \setminus X$ の各要素 e は $w(e) = 1$ と重みを設定すると

Greedyアルゴリズムの出力は X となるが,

$$w(X) = |X| + \epsilon|X| < |Y| \leq w(Y)$$

より X は最適でない. □

安定マッチング × マトロイド的構造

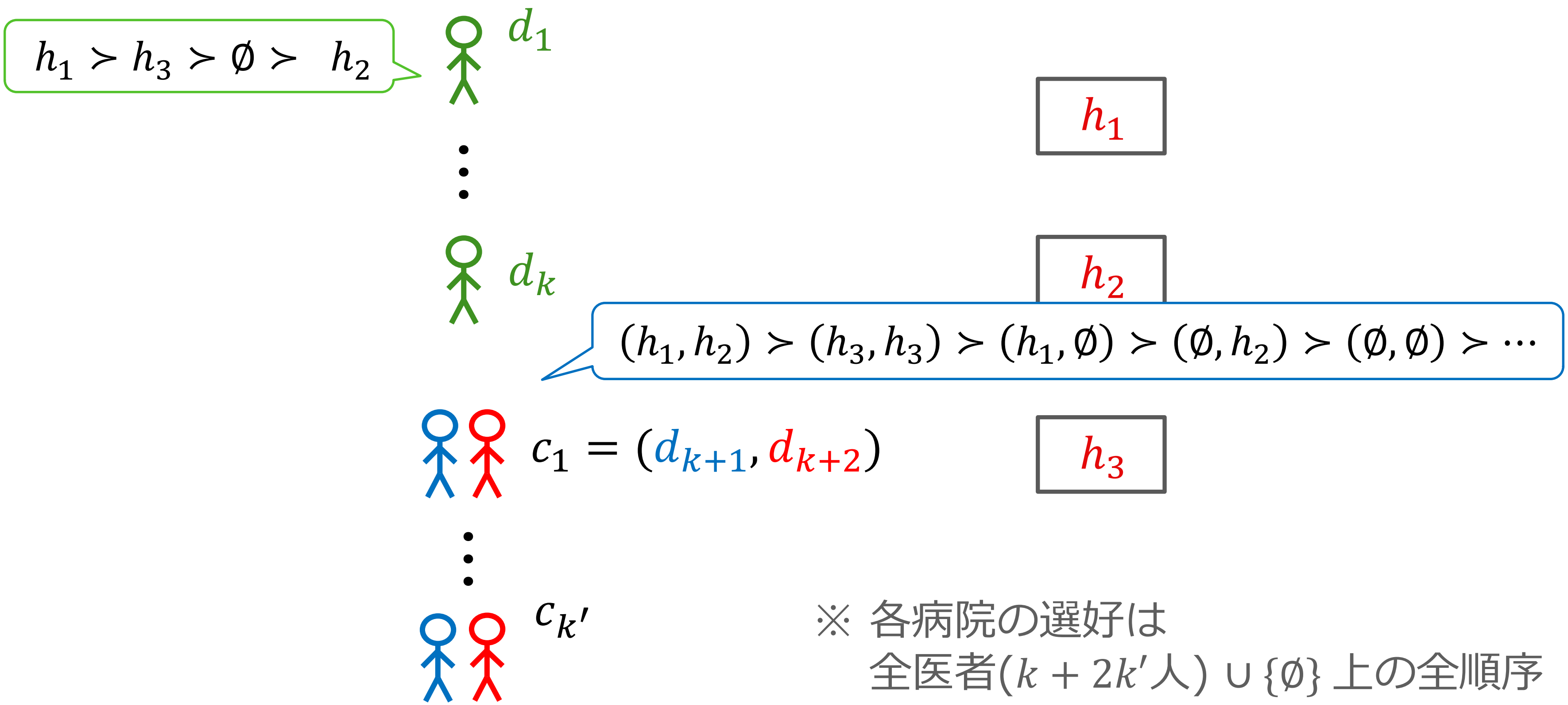


Matching with Couples
(カップルを含むマッチング)

カップルを含むマッチング

医者と病院との間の多対一マッチングで，カップルとなっている医者たちもいる状況を考える．カップルは病院のペアの上の選好を表明できる．

(カップルが個々人で参加する場合と異なり “近い病院に勤めたい” 等の希望を反映できる)



※ 各病院の選好は
全医者($k + 2k'$人) $\cup \{\emptyset\}$ 上の全順序

カップルを含むマッチング

- 1984年にRothに言及されて以来，重要視されている設定
- **補完性**を含む設定の代表格．難しい！
  - 安定解の存在が保証できない
  - 存在しても計算はNP困難
- しかし需要が大きく，様々なアプローチがなされている
  - 解が存在する特殊ケース [Klaus–Klijn 2005] etc.
  - 大きなインスタンスでは概ね解が存在 [Kojima–Pathak–Roth 2013] etc.
  - 安定性の定義の変更, 非整数解の計算, etc.
- 本日は，近年話題になっていた Scarf の補題＋反復丸め を用いた アプローチ [Nguyen–Vohra 2018] を紹介

モデル

インスタンス: $I = (D^1, C, H, \{\succ_d\}_{d\in D^1}, \{\succ_c\}_{c\in C}, \{\succ_h, q_h\}_{h\in H})$

- D^1: シングル医者，C: 医者のカップル(ペア)
- $D \coloneqq D^1 \cup \{\, d, d' \mid (d, d') \in C \,\}$，$H$: 病院
- $\succ_d$，$\succ_c$，$\succ_h$ はそれぞれ $H \cup \{\emptyset\}$，$(H \cup \{\emptyset\})^2$，$D \cup \{\emptyset\}$ 上の全順序

$M \subseteq D \times H$ が**マッチング**

$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ 各医者/病院，高々1つ(q_h人)の許容可能な相手を割り当てられている.

※ カップル $c = (d, d')$ にとっての許容可能性:

$\big(M(d), M(d')\big) \succ_c (\emptyset, \emptyset)$ かつ $(M(d), \emptyset) \succ_c (\emptyset, \emptyset)$ かつ $\big(\emptyset, M(d')\big) \succ_c (\emptyset, \emptyset)$.

安定性

紹介論文での安定性の定義: マッチング M が以下の禁止構造を持たない.

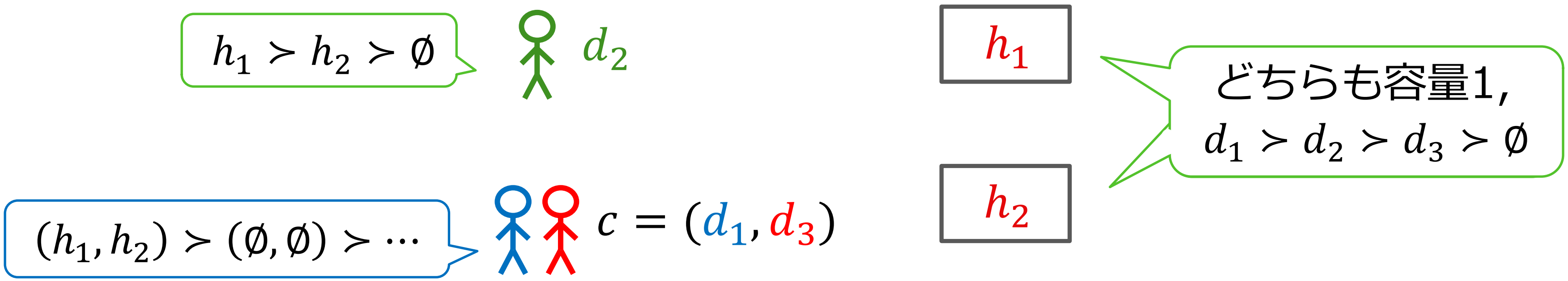
1. **ブロッキングペア** $(d,h) \in D^1 \times H$: $h \succ_d M(d)$ かつ「d は h にとって許容可能で $M(h) \cup \{d\}$ 中の上位 q_h 人に入っている」

2. **ブロッキング提携** $(c,h,h') \in C \times (H \cup \{\emptyset\})^2$ where $h \neq h'$, $c=(d,d')$: $(h,h') \succ_c (M(d), M(d'))$ かつ「$h=\emptyset$ or d は h にとって許容可能で $M(h) \cup \{d\}$ 中で上位 q_h 人に入っている」, d', h' についても同様.

3. **ブロッキング提携** $(c,h,h) \in C \times H \times H$ where $c=(d,d')$: $(h,h) \succ_c (M(d), M(d'))$ かつ「d, d' はともに h にとって許容可能で $M(h) \cup \{d, d'\}$ の中の上位 q_h 人に二人とも入っている」.

安定マッチングが存在しない例

どの病院の容量も１の場合ですら，解の存在は保証できない．



$M = \{(c, h_1, h_2)\} \rightarrow (d_2, h_2)$ がブロック

$M = \{(d_2, h_1)\} \rightarrow (c, h_1 h_2)$ がブロック

$M = \{(d_2, h_2)\} \rightarrow (d_2, h_1)$ がブロック

Near-Feasible Stable Matchings with Couples

[Nguyen–Vohra 2018]

定理　任意のインスタンス $I = (D^1, C, H, \{\succ_d\}_{d\in D^1}, \{\succ_c\}_{c\in C}, \{\succ_h, q_h\}_{h\in H})$ に対し，以下を満たす $\{q_h^*\}_{h\in H}$ が存在:

- $\{q_h\}_{h\in H}$ を $\{q_h^*\}_{h\in H}$ に置き換えたインスタンスで安定解が存在
- $|q_h - q_h^*| \le 2 \ \ (\forall h \in H)$
- $\sum_{h\in H} q_h \le \sum_{h\in H} q_h^* \le \sum_{h\in H} q_h + 4$

証明の大枠

「 Scarfの補題で非整数安定解を得る → 反復丸め 」

注意:　最初の非整数解の計算部分はPPAD困難 [Csáji 2021]

Scarf の補題: まえおき

多面体 $\{ x \in \mathbf{R}_+^n \mid Ax \le b \}$ の**支配端点解**の存在性を主張した補題

- Scarf は協力ゲームのコアの存在証明に用いた [Scarf 1967]
- 完全グラフの kernel-solvability の証明に使われた [Boros–Gurvich 1996] [Aharoni–Holzman 1998]
- 2000年代から，安定マッチングの拡張モデルでの非整数解の存在証明に用いられる [Aharoni–Fleiner 2003], [Király–Pap 2008], etc
- 計算量: 支配端点解の計算はPPAD困難
  - 非整数ハイパーグラフ安定マッチングに限っても [Kintali et al. 2013]
    さらに最大次数 3 の制限を加えても [Ishizuka–Kamiyama 2018]
  - 非整数カップル付き安定マッチング(紹介モデル)でも [Csáji 2021]

Scarf の補題

様々なバージョンのステートメントがあるが
ここでは [Király–Pap 2008] のものを紹介

- A: 非負 $m \times n$ 行列 (ゼロ列,ゼロ行無し),
  b: m 次元正ベクトル
  s.t. $P \coloneqq \{\, x \in \mathbf{R}^n_+ \mid\ Ax \le b \,\}$ は非空で有界

- 各行 i は列集合 $\{\, j \mid a_{ij} > 0 \,\}$ 上の全順序 $\succ_i$ をもつ

- ベクトル $x \in P$ が列 j を支配する
  $\overset{\text{def.}}{\iff}$ 以下を満たす行 i が存在:

$$a_{ij} > 0,\ \ A_i x = b_i,\ \text{and}\ \ \forall 列\ k\colon\ [a_{ik} > 0,\ j \succ_i k] \Rightarrow x_k = 0$$

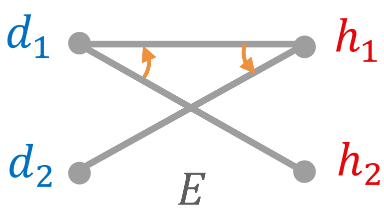
定理(Scarfの補題)　すべての列を支配する P の端点解 x が存在する.

※ 多面体の端点解 = 次元 0 の面

Scarf の補題: 使い方の練習

Scarfの補題を用いて，一対一安定マッチングの存在性の別証明を与える.

$A \coloneqq$ “$(D, H; E)$ の接続行列”，$b \coloneqq \mathbf{1}$.



$(d_1,h_1) \succ (d_1,h_2)$

$(d_2,h_1) \succ (d_1,h_1)$

$$
\begin{array}{c|ccc|}
 & (d_1,h_1) & (d_1,h_2) & (d_2,h_1) \\
d_1 & 1 & 1 & 0 \\
d_2 & 0 & 0 & 1 \\
h_1 & 1 & 0 & 1 \\
h_2 & 0 & 1 & 0
\end{array}
\quad
\boxed{x}
\quad \le \quad
\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

A $\qquad$ b

Scarfの補題より全列を支配する $P = \{\, \bar{x} \in \mathbf{R}^n_+ \,|\, A\bar{x} \le b \,\}$ の端点解 x が存在.

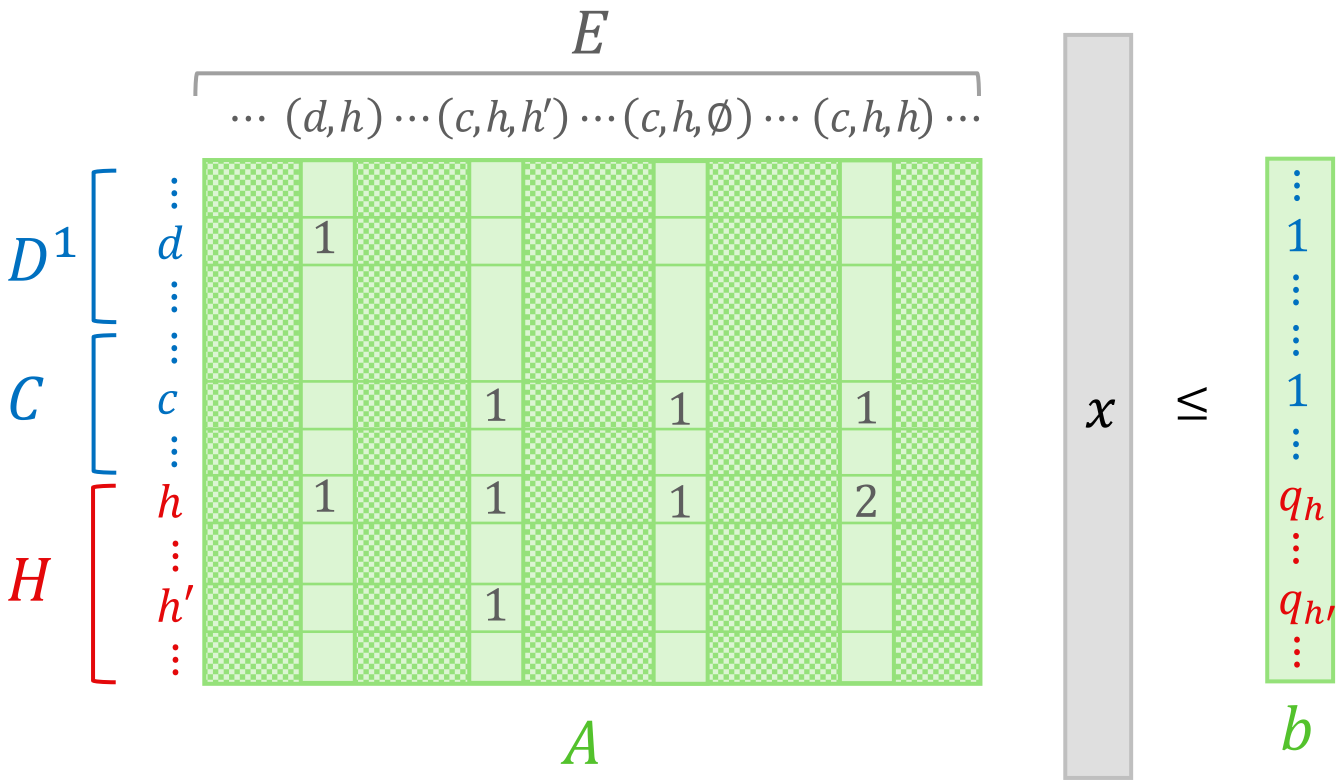
二部マッチング多面体 P の整数性より，x は整数.

x が各列 $e = (d, h) \in E$ を<u>支配</u> $\Leftrightarrow$ 各 $e \in E$ はブロッキングペアじゃない.

$\exists\, i \in \{d, h\}$: $A_i x = b_i$ かつ i を含む任意の $f \in E$ で $[\, e \succ_i f \Rightarrow x_f = 0]$

Scarf の補題と “Matching with Couples”

行が $D^1 \cup C \cup H$，列が $E :=$”許容可能なペア(d,h)や提携(c,h,h')の集合“に対応する接続行列(的なもの)を A とする.



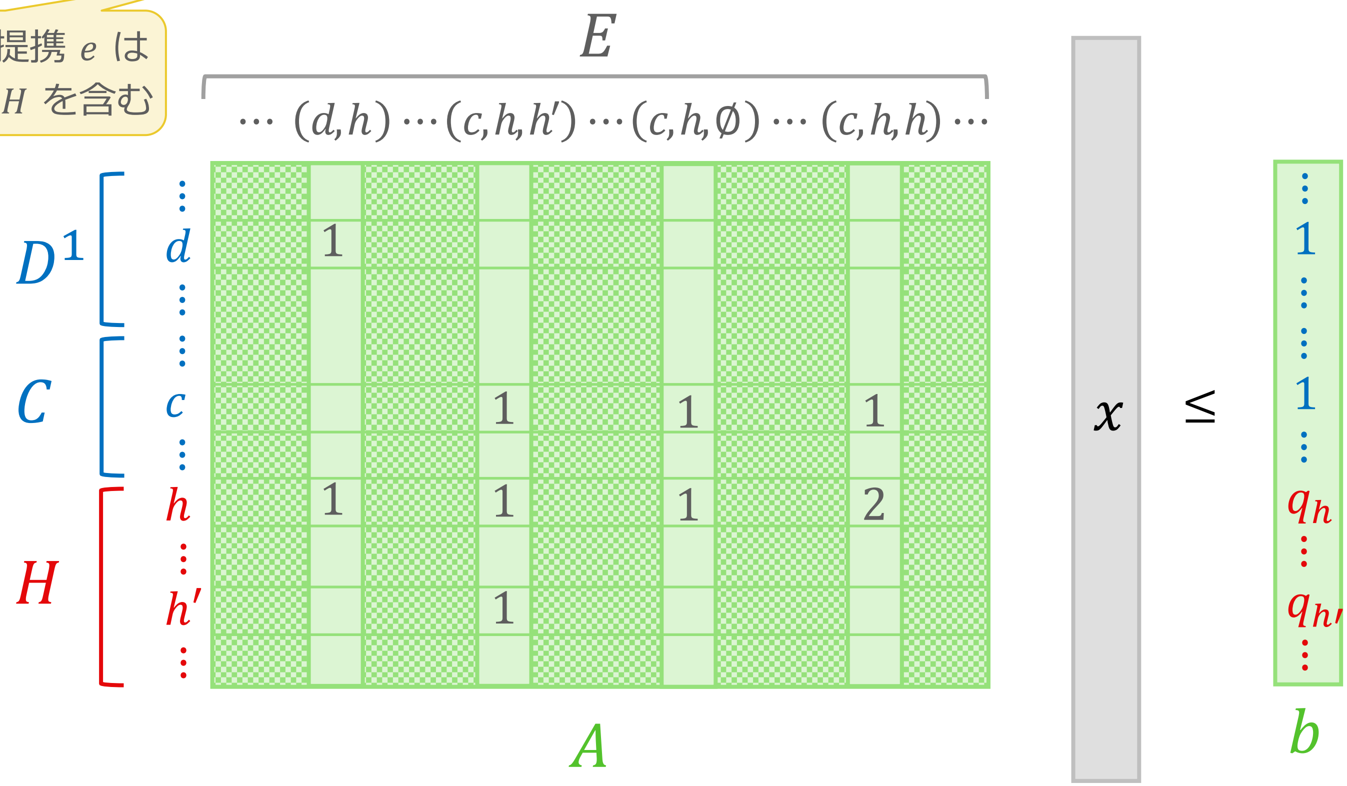
各行 i に $\{e \in E \mid a_{ie} > 0\} = \{e \mid$ ペア/提携 e は i を含む$\}$ 上の順序を付与.
$d \in D^1, c \in C$ は $\succ_d, \succ_c$ そのまま．$h \in H$ は $\succ_h$ (on D) から適切に変換.

Scarf の補題と “Matching with Couples”

Scarfの補題より，以下を満たす $x \in P = \{\, \bar{x} \in \mathbf{R}^n_+ \mid A\bar{x} \le b \,\}$ が存在．

$\forall$列 $e \in E$, $\exists$行 $i \in e$:「$A_i x = b_i$ かつ $\forall f \in E$: $[i \in f, e \succ_i f] \Rightarrow x_f = 0$ 」

記法: ペア/提携 e は $i \in D^1 \cup C \cup H$ を含む



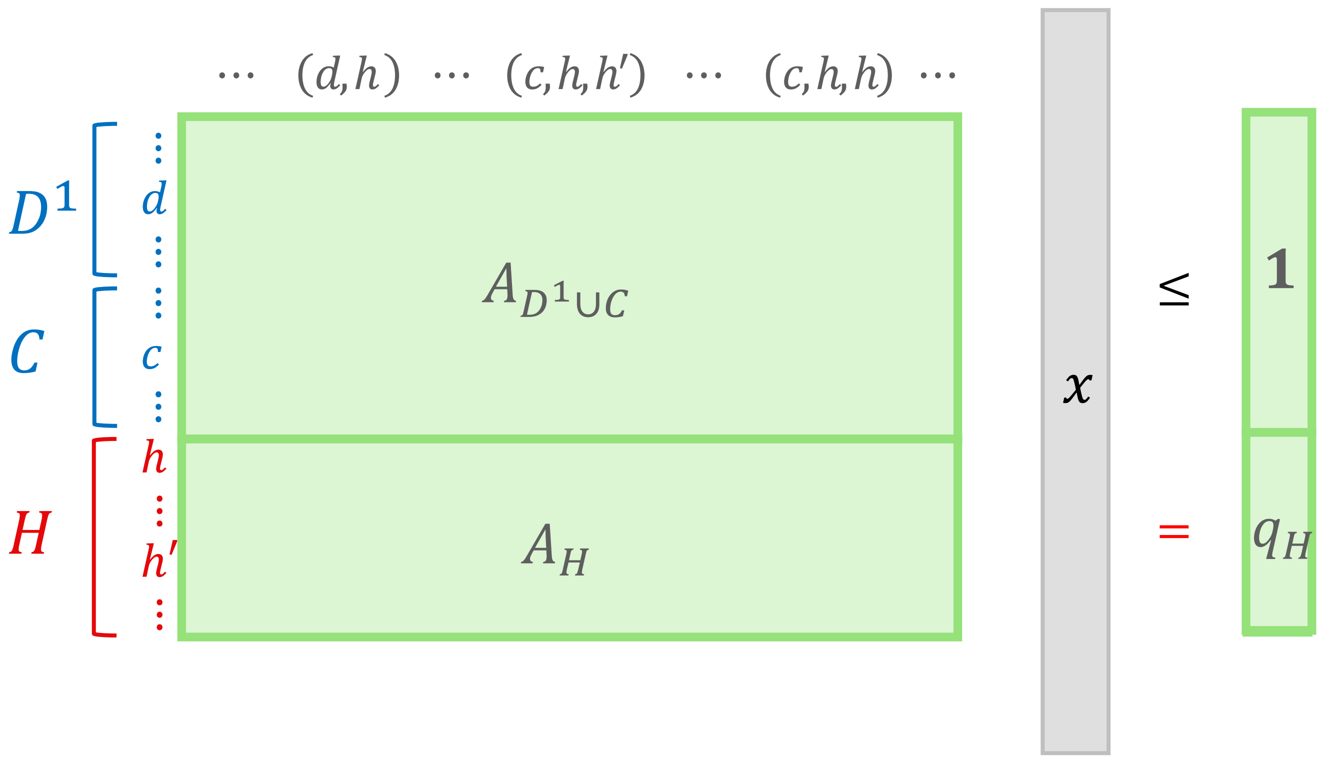
x が整数ベクトルの場合は，安定マッチングに対応．

しかしこの多面体は一般には整数性を持たず，x は非整数．

非整数解から整数解へ

以降簡単のため，安定解では常に全病院が容量いっぱいになるとする ($A_H x = q_H$)
ダミーの医者を十分な数加えることでいつでもこのケースに帰着できる．

いま，以下を満たす $x \in \mathbf{R}^n_+$ をもっている: $A_{D^1 \cup C}\, x \leq \mathbf{1}$, $A_H x = q_H$, かつ
$\forall$列 $e \in E$, $\exists$行 $i \in e$:「 $A_i x = b_i$ かつ $\forall f \in E$: $[i \in f, e \succ_i f] \Rightarrow x_f = 0$ 」



非整数解から整数解へ

以降簡単のため，安定解では常に容量いっぱいになるとする ($A_H x = q_H$)
ダミーの医者を十分な数加えることでいつでもこのケースに帰着できる．

いま，以下を満たす $x \in \mathbf{R}^n_+$ をもっている： $A_{D^1 \cup C}\, x \leq \mathbf{1}$, $A_H x = q_H$, かつ
$\forall$列 $e \in E$, $\exists$行 $i \in e$:「 $A_i x = b_i$ かつ $\forall f \in E$: $[i \in f, e \succ_i f] \Rightarrow x_f = 0$ 」

以下を満たす $x^* \in \{0,1\}^n$ の構成を目指す:

- $A_{D^1 \cup C}\, x^* \leq \mathbf{1}$.　$A_H x^* \approx q_H$ (各要素誤差2以下，総和の誤差0〜4)
- $\forall e \in E$: $x_e = 0 \Rightarrow x^*_e = 0$
- $\forall i \in D^1 \cup C$: $A_i x = b_i \Rightarrow A_i x^* = b_i$

[ポイント]
これらが x^* の安定性を保証．
初期解 x は集合 $\{ e \mid x_e = 0 \}$
と $\{ i \in D^1 \cup C \mid A_i x = b_i \}$
を知るためだけに使われる．

反復丸め法 [概要]

「非整数値をとる変数の数が次第に減っていくように,
線形計画問題 (LP) を更新しながら繰り返し解く」手法.

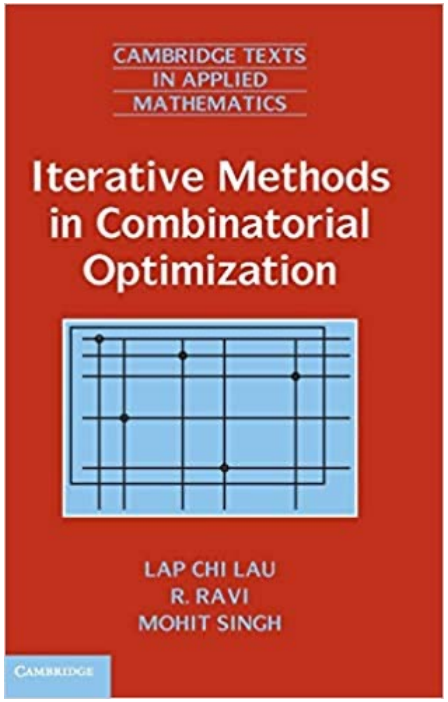
NP困難な組合せ最適化問題に対する近似アルゴリズムの設計に有効

文献:

本: Iterative Methods in Combinatorial Optimization
[Lau–Ravi–Singh 2011]

サーベイ: [Ravi 2009], [Lau–Singh 2010],

スライド: [Fukunaga COSS 2013]



反復丸め法 [概要]

手法の流れ: 近似アルゴリズム設計の場合

問題をIPで記述: $\max\{\, c \cdot y \mid Ay \le b,\ y \in \{0,1\}^n \,\}$ 多項式時間で解けない

→ LP緩和: $\max\{\, c \cdot y \mid Ay \le b,\ \mathbf{0} \le y \le \mathbf{1} \,\}$

制約の数が多項式 or 分離問題が解ける類のものなら多項式時間で解ける

→ LPの端点最適解を計算する．整数値をとっている変数は値を固定.

加えて **丸め** or/and **緩和** 操作も行い, 変数が少なくなったLPを得る.

解く. 繰り返す.

反復丸め法 [概要]

① **丸め (Rounding)**: ある閾値 $\alpha \geq 1$ をあらかじめ決める.
LPの端点最適解で $y_j \geq \frac{1}{\alpha}$ となっている変数ひとつを $y_j = 1$ と固定.

② **緩和 (Relaxation)**: ある閾値 $\beta \geq 1$ をあらかじめ決める.
LPの未固定の変数を全て 1 としたベクトル y' が $A_i y' \leq b_i + \beta$ を満たすような制約 $A_i y \leq b_i$ があれば, それをLPから取り除く.

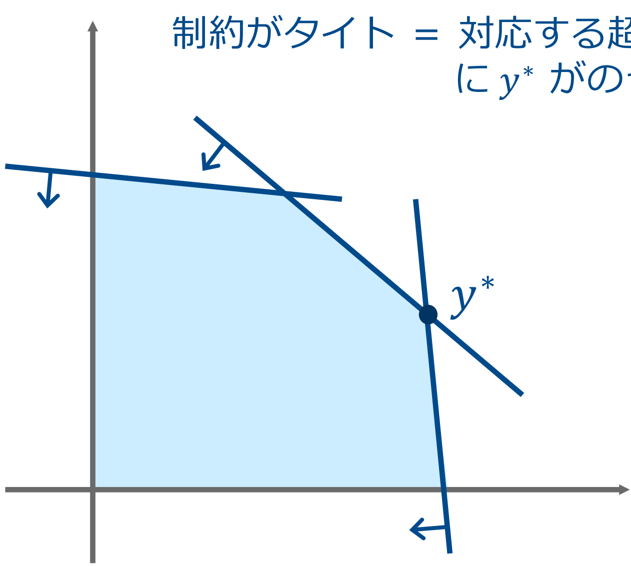
① → 被覆タイプの最小化問題に対し α 近似解
② → 最適値 or better な目的関数値で各制約高々 β 破る解
①② → (α, β)-bicriteria

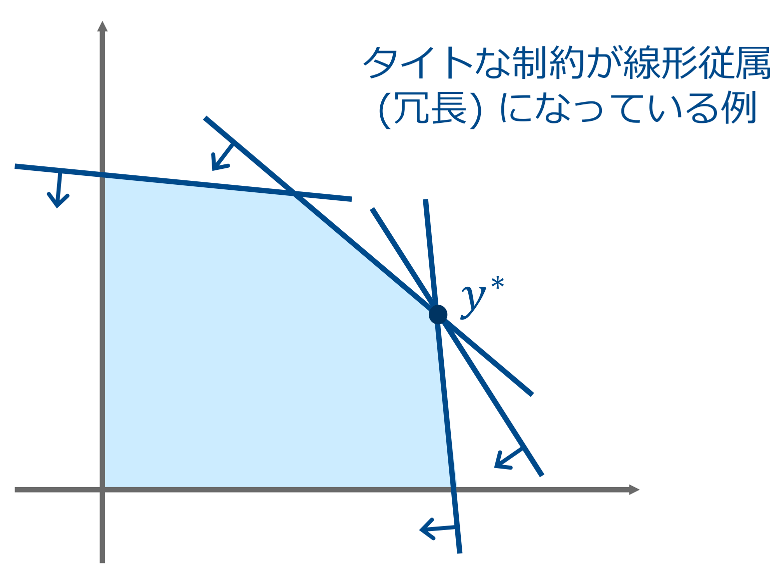
これらを適用できる変数/制約の存在を示すのが鍵.
階数補題 +「トークンを使った double counting」が定番.

反復丸め法 [概要]

階数補題　y^* が $\{\, y \in \mathbf{R}^n \mid Ay \le b, y \ge \mathbf{0} \,\}$ の端点解で $\forall i \in [n]: y_i^* > 0$ を満たすとする．このときタイトな A の行 (i.e., $A_i y^* = b_i$ が成り立つ行) のうち線形独立なものの最大数は，変数の数 n と一致する．

直感: n 次元多面体の端点は n 個の線形独立な超平面で定まる．





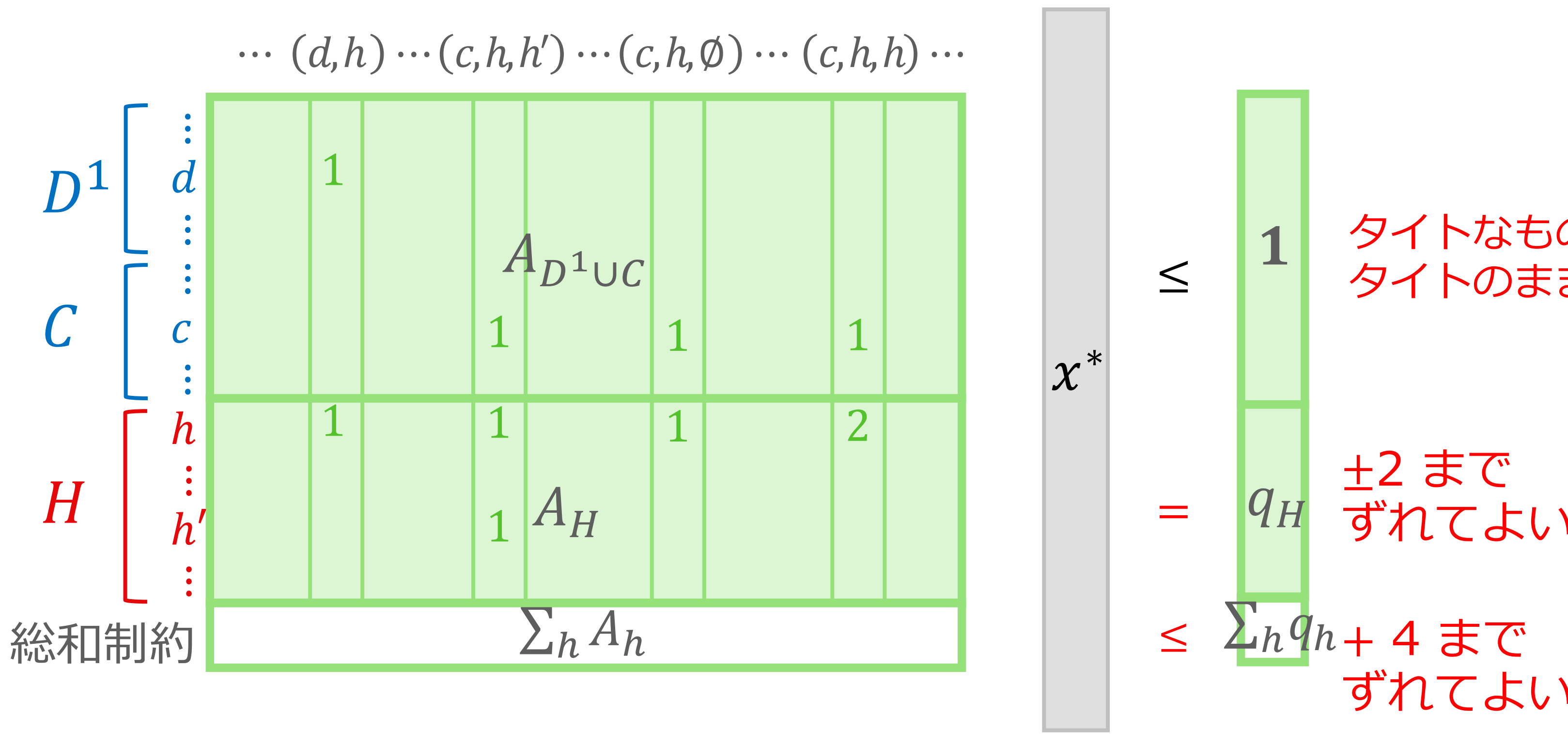
非整数解から整数解へ

Scarfの補題でみつけた
非整数安定マッチング

以下を満たす $x^* \in \{0,1\}^n$ の構成を目指す (※ ここでは x は定数):

- $\forall h \in H$: $|A_h x^* - q_h| \le 2$, $\sum_{h \in H} q_h \le \sum_{h \in H} A_h x^* \le \sum_{h \in H} q_h + 4$
- $\forall e \in E$: $x_e = 0 \Rightarrow x_e^* = 0$
- $\forall i \in D^1 \cup C$: $A_i x = b_i \Rightarrow A_i x^* = b_i$

これらが x^* の安定性を保証

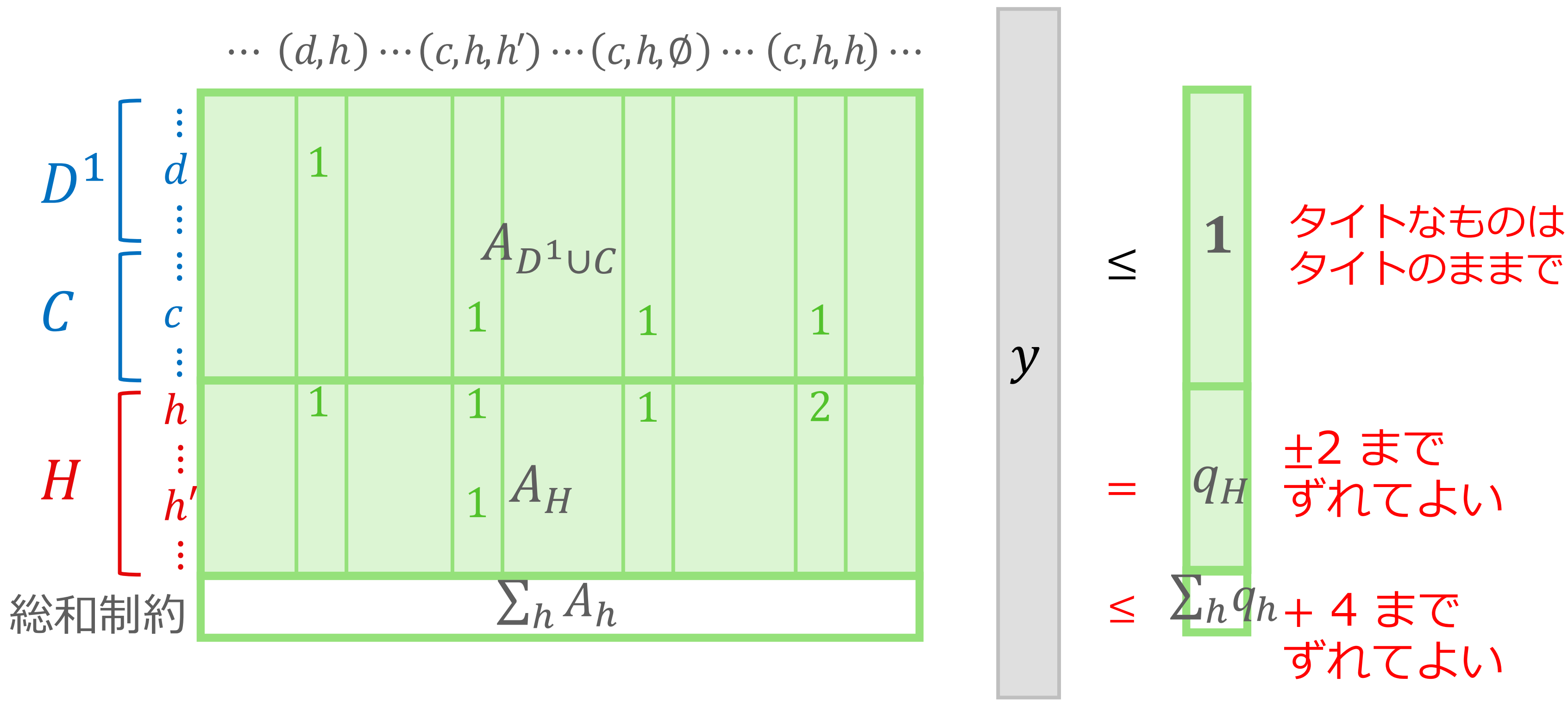


非整数解から整数解へ

$c \in \mathbf{R}^E$ を $c_{(d,h)} = 1,\ c_{(c,h,h')} = 2$ で定める. (この設定に必然性はない. 自由度あり.)

基本: 以下を繰り返す

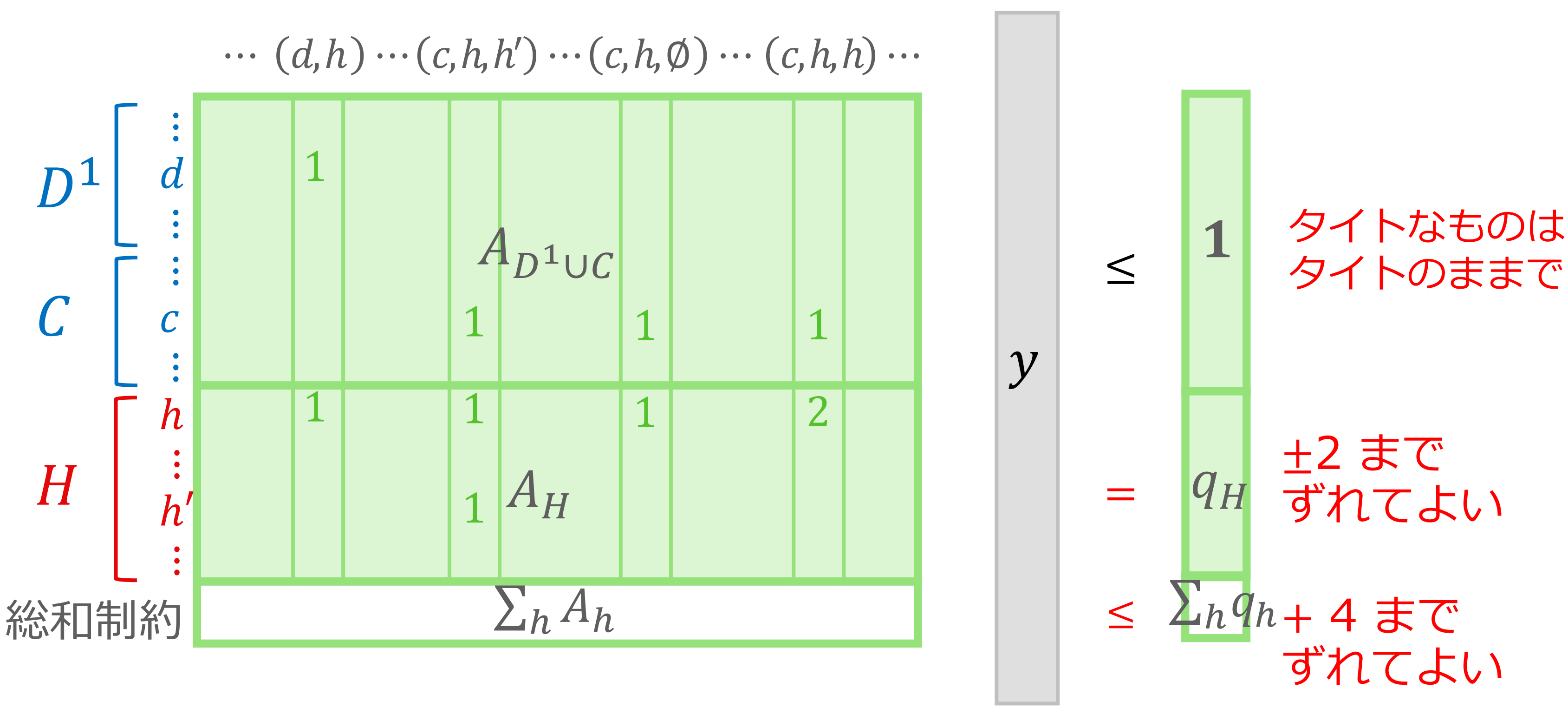
- $\max\{\, c \cdot y \mid$ 下記の不等式・等式制約, $y \geq 0 \}$ の端点最適解計算
- タイトになった $\leq$ 制約は $=$ 制約に変更. 整数値をとった変数は固定.



非整数解から整数解へ: 反復緩和の適用

①病院の制約 $A_h y = q_h$ で非整数変数の係数和が 3 以下のものがあれば
その**制約を除去**

②医者/カップルの制約 $A_i y \leq 1$ で“非整数変数がでてくる＆タイトでない”
ものが 2 つ以下だったら, **総和制約を除去**

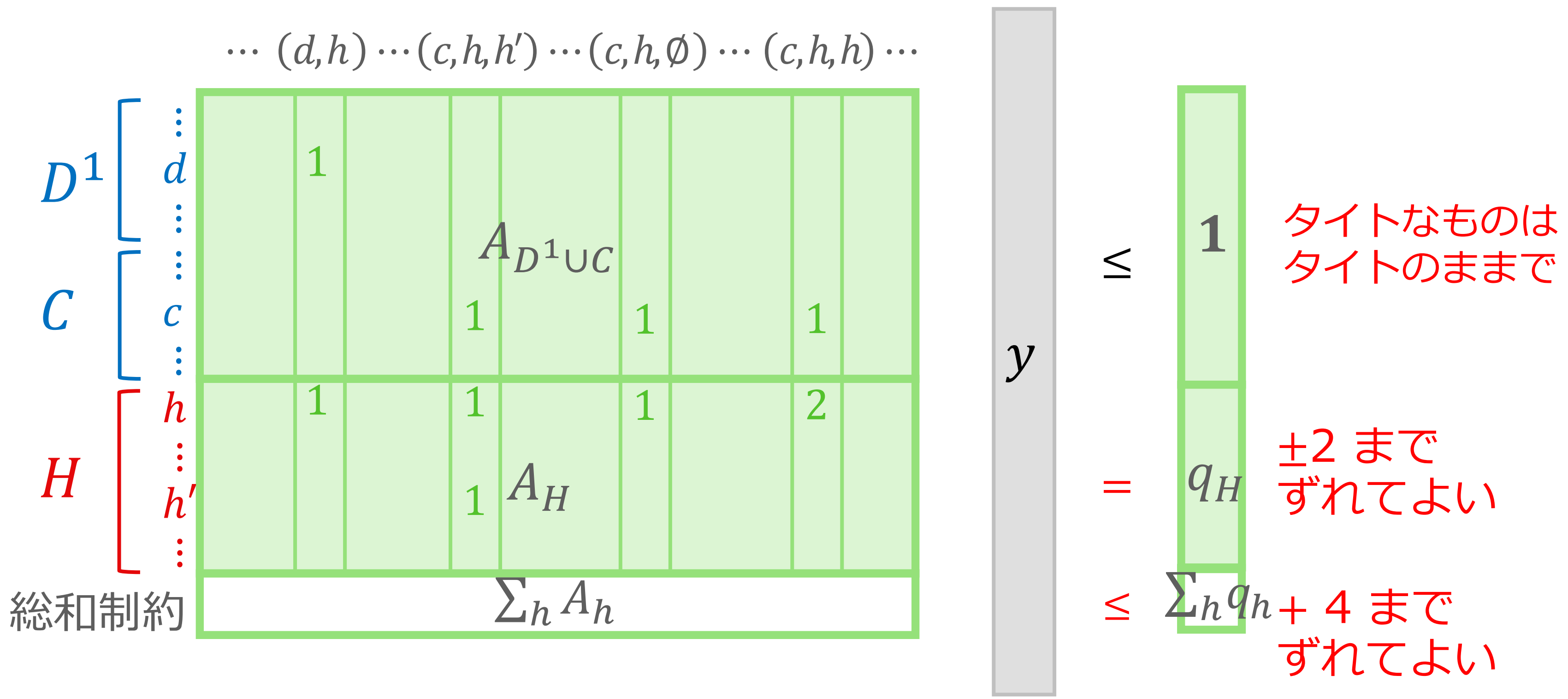


非整数解から整数解へ: 反復緩和の適用

①病院の制約 $A_h y = q_h$ で非整数変数の係数和が 3 以下のもの**除去**

→ その後 非整数変数がどう固定されようと誤差±2に収まる

②医者/カップルの制約 $A_i y \leq 1$ で"非整数変数がでてくる＆タイトでない"ものが 2 つ以下だったら**総和制約を除去** → その後〃 誤差0~4に収まる



非整数解から整数解へ: 反復緩和の適用

①病院の制約 $A_h y = q_h$ で非整数変数の係数和が３以下のもの**除去**

→ その後 非整数変数がどう固定されようと誤差±2に収まる

②医者/カップルの制約 $A_i y \leq 1$ で”非整数変数がでてくる＆タイトでない”

ものが２つ以下だったら**総和制約を除去** → その後〃 誤差0~4に収まる

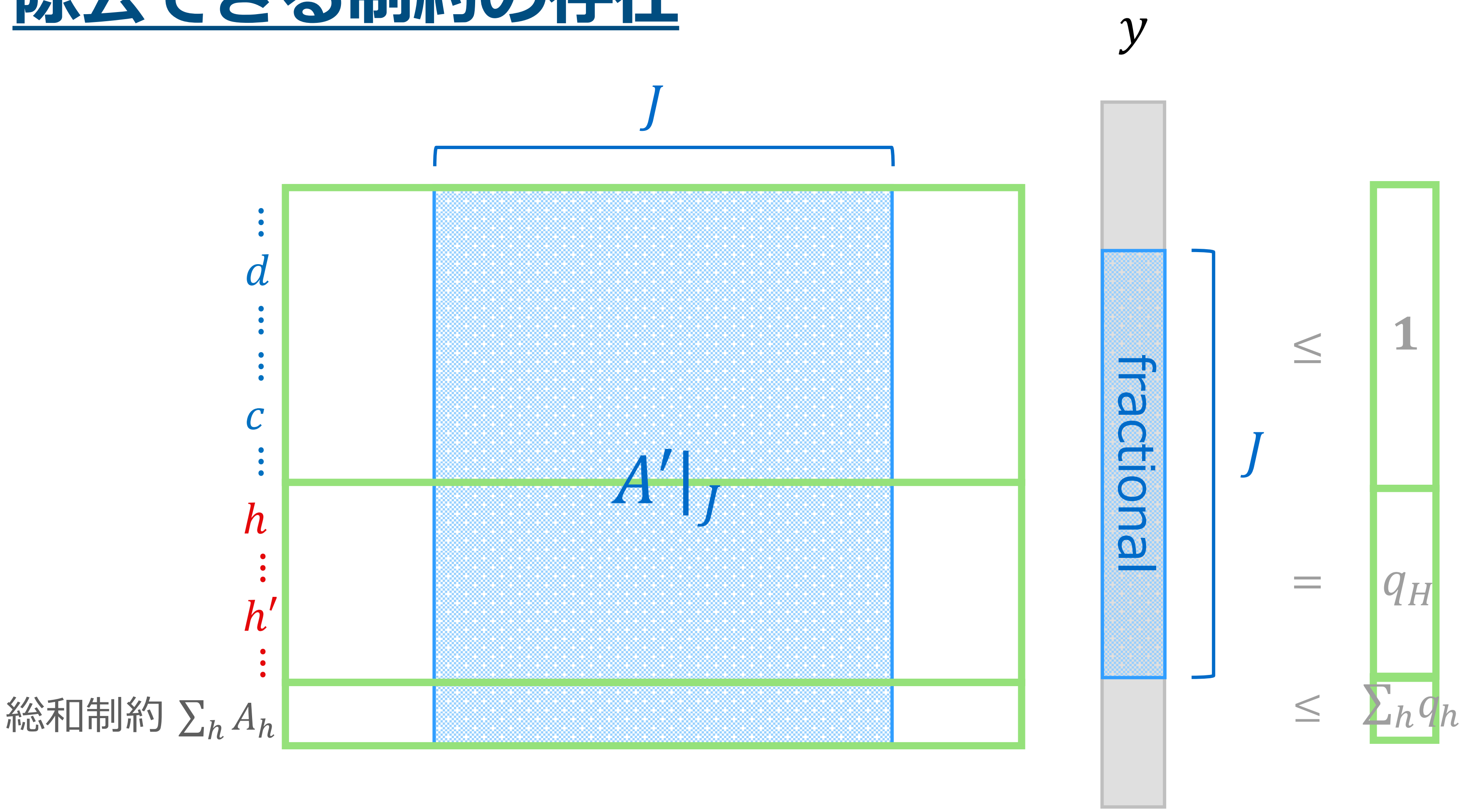
Remind: 得られる解の安定性は, 初期解の安定性とアルゴリズムの性質

(初期解で値0の変数は0のまま, タイトな制約はタイトなまま) から従う.

最適化で求めた端点解が非整数変数を含むときにはいつでも,

①②のどちらかが適用できることを示して証明を完了させる.

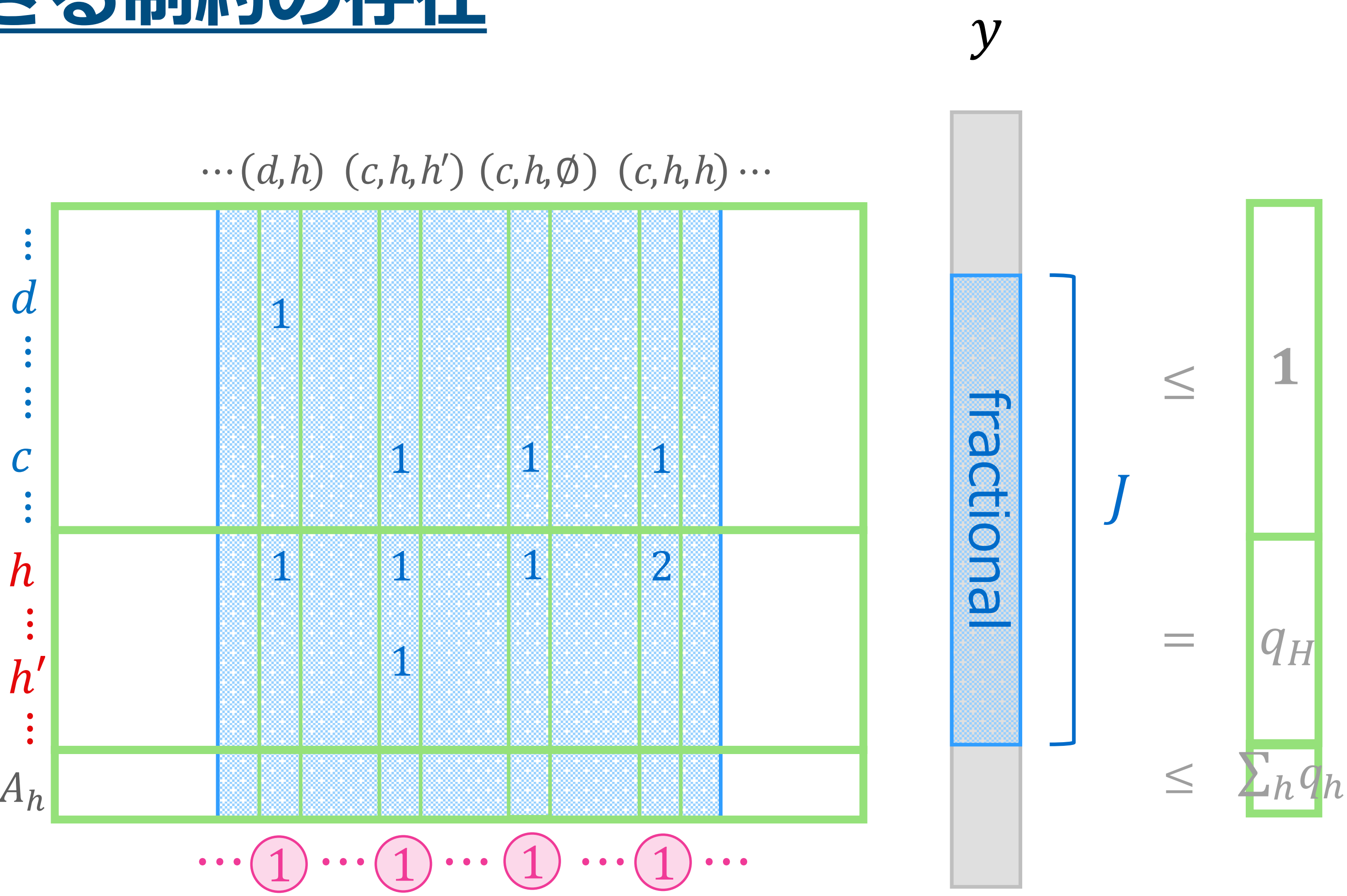
除去できる制約の存在



$\max\{\, c \cdot y \mid$ 上記の制約, $y \geq \mathbf{0}\}$ の端点最適解 y での非整数変数のインデックス集合を J とする. (整数変数を移項して) 階数補題を適用すると,
タイトな行の集合 I で, $A'|_J$ で線形独立かつ $|I| = |J|$ なるものが存在.

除去できる制約の存在

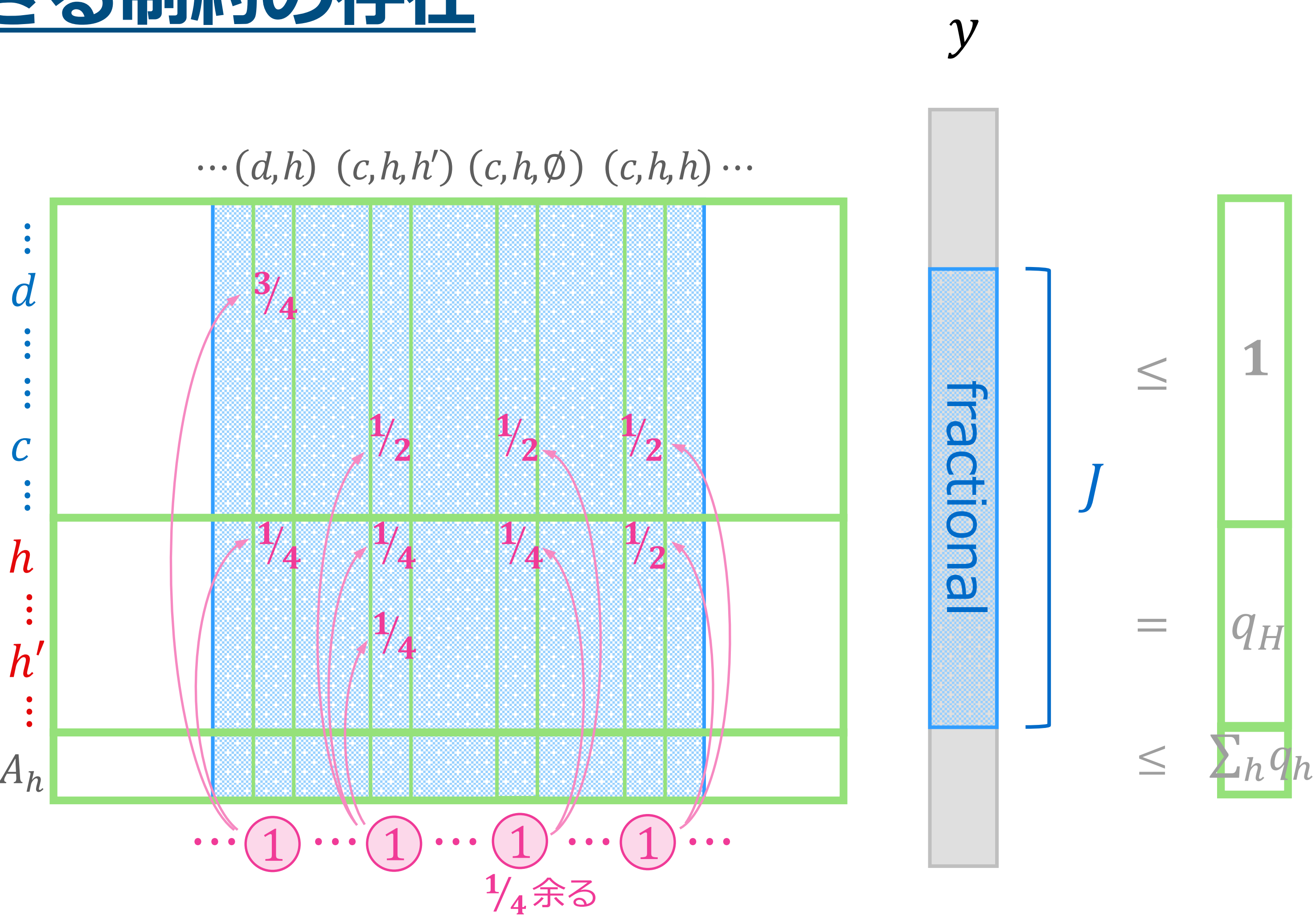
$\exists I$: 行の集合
s.t.
全てタイト,
$A'|_J$ で線形独立
$|I| = |J|$



各非整数変数 $e \in J$ にトークンをひとつ与える

除去できる制約の存在

$\exists I$: 行の集合
s.t.
全てタイト,
$A'|_J$ で線形独立
$|I| = |J|$

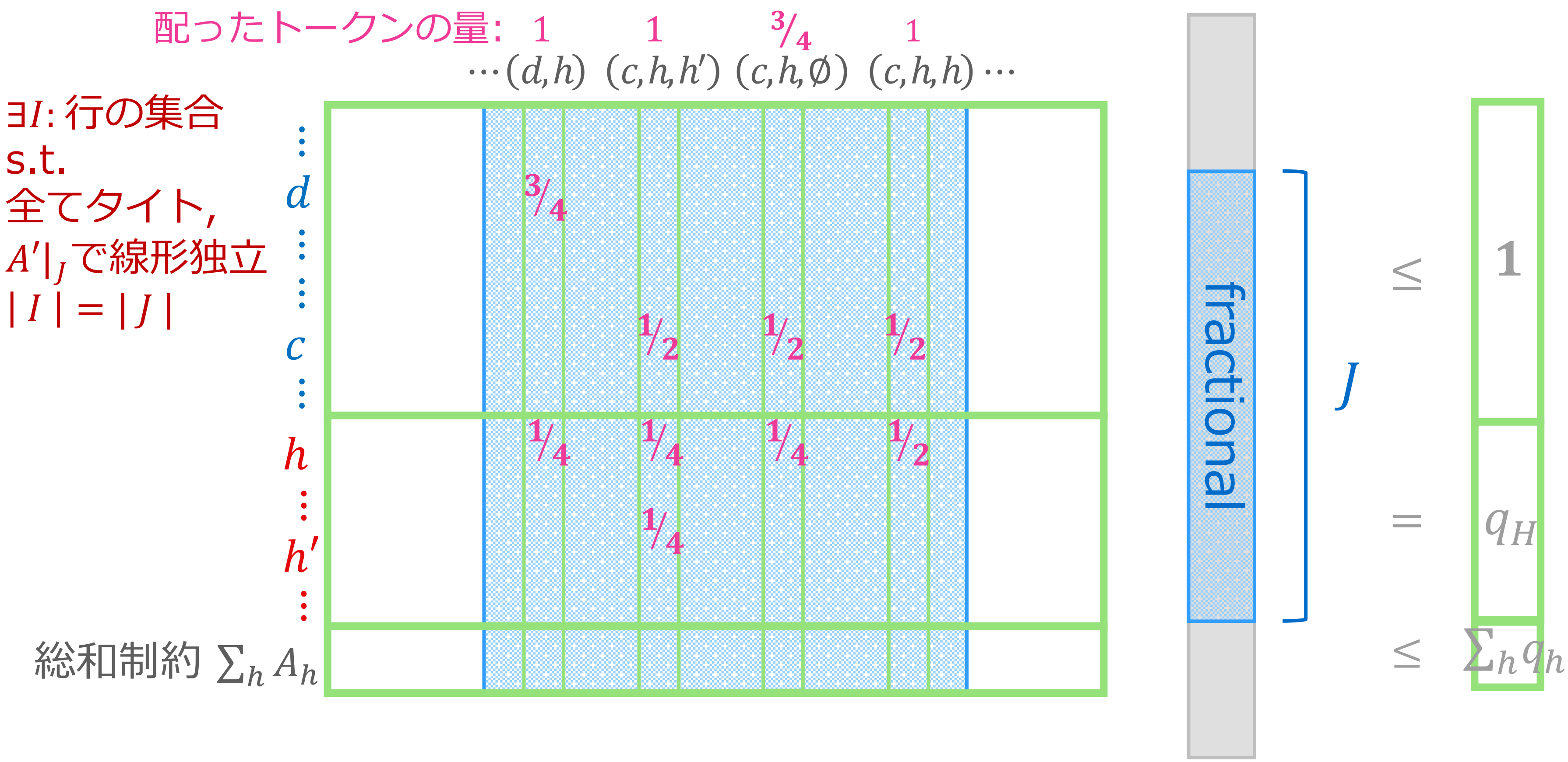


各非整数変数 $e \in J$ にトークンをひとつ与える

ペア/提携 e に含まれる $D^1 \cup C \cup H$ の要素に図のように配分する

制約除去ルール 病院制約 $A_h y = q_h$ の非整数変数の係数和 3 以下 ⇒ その制約除去

$A_i y \le 1$ ($i \in D^1 \cup C$) で非整数変数含む＆notタイトなもの 2 つ以下 ⇒ 総和制約除去

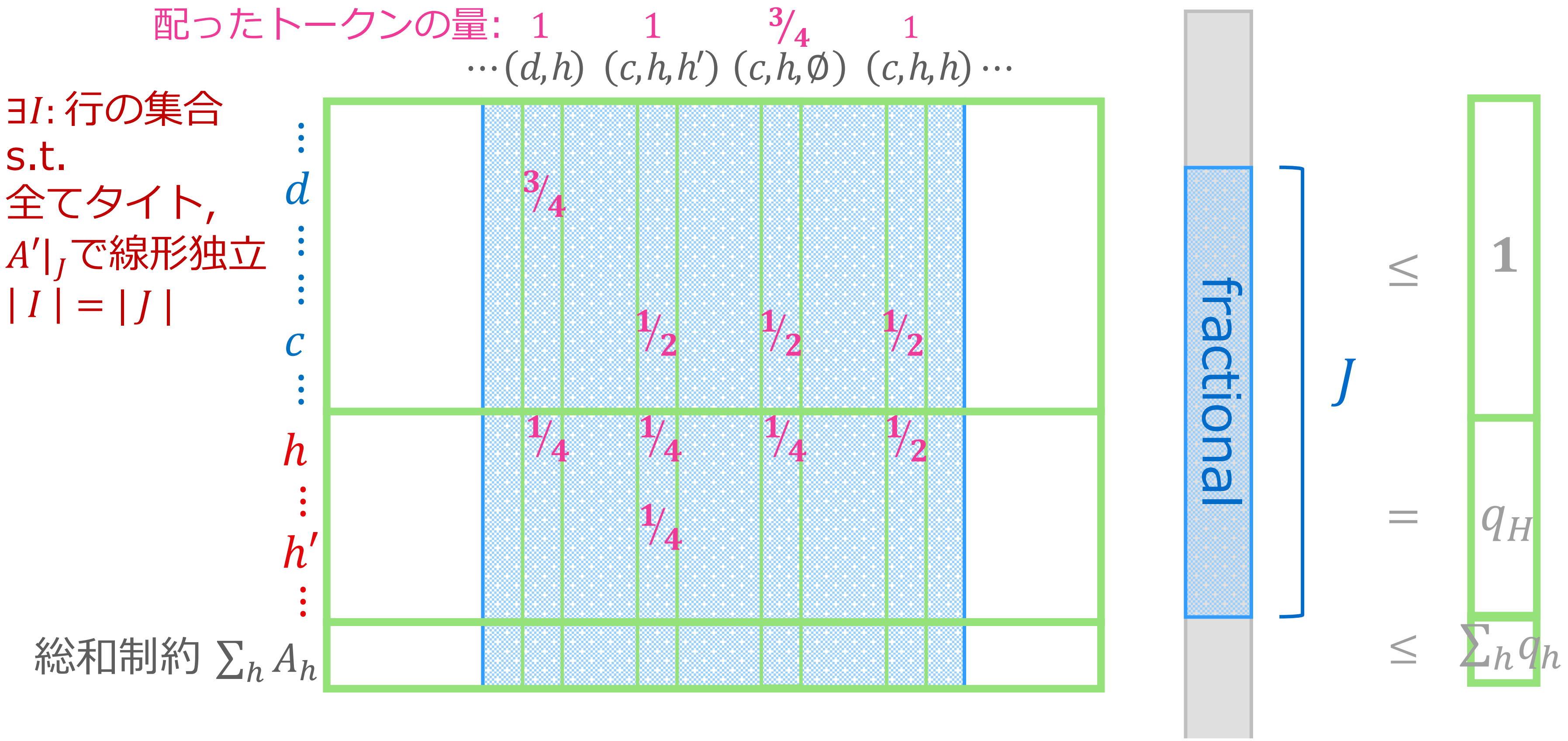


除去できる制約が無いと仮定 (背理法)

- どの $h \in I \cap H$ も非整数(J 部分)の係数和4以上 ⇒ トークンを**1以上**受取
- どの $i \in I \cap (D^1 \cup C)$ も, タイトなことより非整数変数を2つ以上含む
  ⇒ トークンを**1以上**受取. とくに $i \in D^1$ なら $3/4 \times 2 = 3/2$ **以上**受取

制約除去ルール 病院制約 $A_h y = q_h$ の非整数変数の係数和 3 以下 ⇒ その制約除去

$A_i y \leq 1$ ($i \in D^1 \cup C$) で非整数変数含む＆notタイトなもの 2 つ以下 ⇒ 総和制約除去



Case 1 . I が総和制約を含む　総和制約を除去できないということは

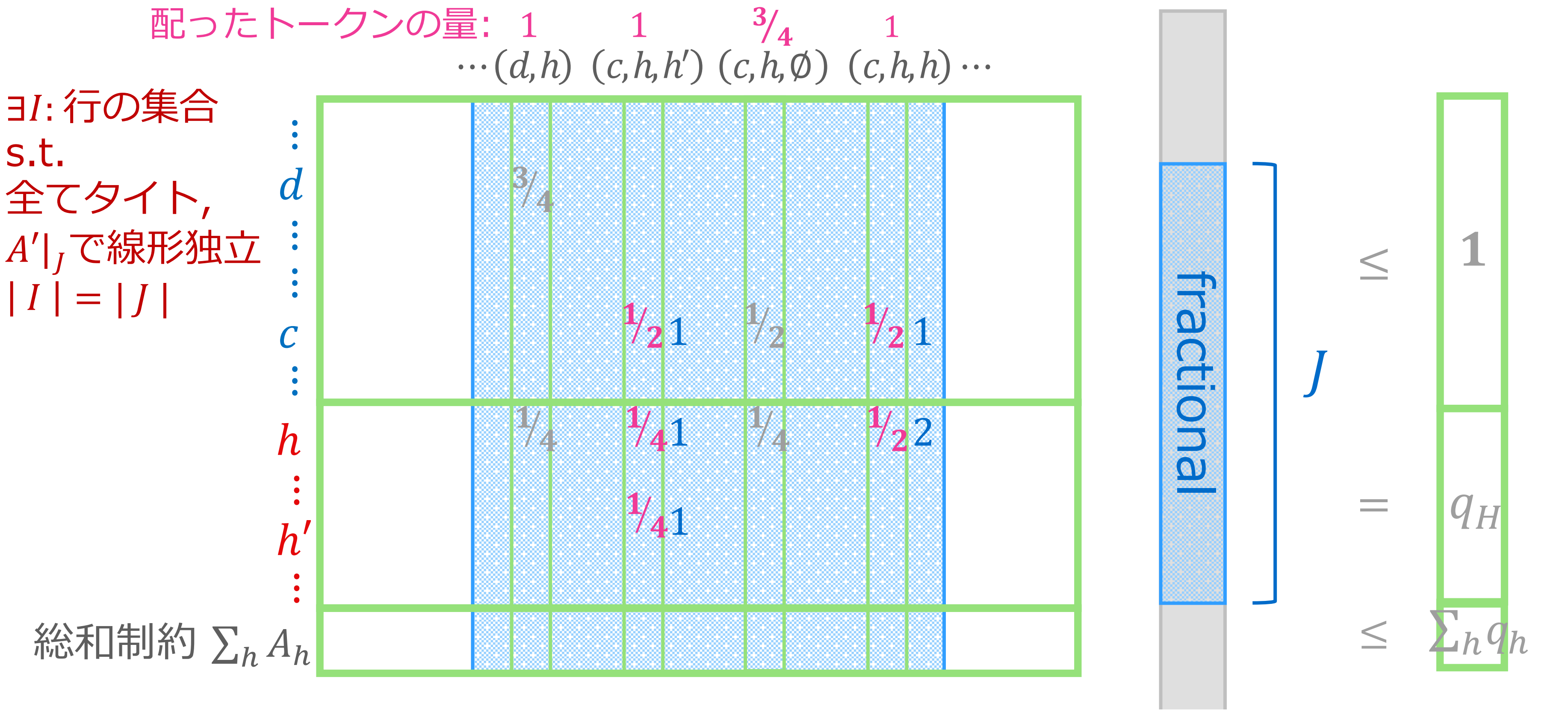
非整数変数(J の要素)含む＆notタイトな $D^1 \cup C$ の要素が 3 つ以上ある

⇒ I 以外の行に $3 \times {}^1\!/_2 \geq {}^3\!/_2$ 以上のトークンが流出

他の I の行は各々1以上受け取るので $|J| \geq$ 総量 $\geq {}^3\!/_2 + |I| - 1 > |J|$. 矛盾

制約除去ルール 病院制約 $A_h y = q_h$ の非整数変数の係数和 3 以下 ⇒ その制約除去

$A_i y \leq 1$ $(i \in D^1 \cup C)$ で非整数変数含む＆notタイトなもの 2 つ以下 ⇒ 総和制約除去



<u>Case 2 . I が総和制約を含まない</u> I の行はみなトークンを1以上受け取る.

$|I| = |J|$ より, どの $i \in I$ も丁度1受取 & どの $e \in J$ もトークン配り切る.

⇒ $I \cap D^1 = \emptyset$ で, J は$(d,h),(c,h,\emptyset),(c,\emptyset,h)$タイプの変数含まない.

J の変数 $(c,h,h'),(c,h,h)$ に出てくるカップル・病院は全て I に含まれる.

⇒ $A'|_J$ の ($I \cap C$ 行の和) × 2 ＝ ($I \cap H$ 行の和) I の線形独立性に矛盾 □

以上の議論で示せたこと

定理 (再掲)　[Nguyen-Vohra 2018]

任意のインスタンス $I = (D^1, C, H, \{\succ_d\}_{d\in D^1}, \{\succ_c\}_{c\in C}, \{\succ_h, q_h\}_{h\in H})$ に対し，以下を満たす $\{q_h^*\}_{h\in H}$ が存在:

- $\{q_h\}_{h\in H}$ を $\{q_h^*\}_{h\in H}$ に置き換えたインスタンスで安定解が存在
- $|q_h - q_h^*| \leq 2 \ \ (\forall h \in H)$
- $\sum_{h\in H} q_h \leq \sum_{h\in H} q_h^* \leq \sum_{h\in H} q_h + 4$

– 構成方法: Scarfの補題で非整数安定解を得る → 反復丸め(反復緩和)

–「階数補題 + トークンを使ったdouble counting」の定石に則っている

– 安定性を保つことと反復丸め法とが，上手くはまっている

今日のまとめ

１限．一対一マッチング

安定マッチング二つを重ねたグラフを観察して様々な性質が得られる．

耐戦略性を安定解集合の構造的性質を用いて示せる．

２限．制約付き多対一マッチング

最適化で有用なマトロイドの性質が，安定マッチングの文脈でも有用．

- 局所最適=大域最適, 順序で定まる最適性 ⇒ 様々な安定性概念が等価
- 貪欲アルゴリズムの正当性 ⇒ 拡張版Gale−Shapleyアルゴリズムの正当性

３限．カップルを含む多対一マッチング

最適化アルゴリズムの設計で使われてきた反復丸め法の新しい応用.

反復丸め法の特徴が, 安定性と好相性.

ありがとうございました

参考文献 (出てきた順. 補足や脚注に出てきたものも含む)

[Gale–Shapley 1962] David Gale and Lloyd S. Shapley. "College admissions and the stability of marriage." *The American Mathematical Monthly* (1962)69.1: 9-15.

[Knuth 1976] Donald Ervin Knuth. *Mariages Stables* (Les Presses de l'Université de Montréal, Montreal), 1976. English translation in *Stable marriage and its relation to other combinatorial problems: An introduction to the mathematical analysis of algorithms*. Vol. 10. American Mathematical Soc., 1997.

[Karlin–Gharan–Weber STOC2018] Anna R. Karlin, Shayan Oveis Gharan, and Robbie Weber. "A simply exponential upper bound on the maximum number of stable matchings." *Proceedings of the 50th Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing*. 2018.

[Palmer–Pálvölgyi FOCS2021] Cory Palmer and Dömötör Pálvölgyi. "At most 3.55^n stable matchings." *2021 IEEE 62nd Annual Symposium on Foundations of Computer Science*. IEEE, 2022.

[Vande Vate 1989] John H. Vande Vate. "Linear programming brings marital bliss." *Operations Research Letters* 8.3 (1989): 147-153.

[Teo–Sethuraman 1998] Chung-Piaw Teo and Jay Sethuraman. "The geometry of fractional stable matchings and its applications." *Mathematics of Operations Research* 23.4 (1998): 874-891.

[Gale–Sotomayor 1985] David Gale and Marilda Sotomayor. "Some remarks on the stable matching problem." *Discrete Applied Mathematics* 11.3 (1985): 223-232.

[Roth 1984] Alvin E. Roth. "The evolution of the labor market for medical interns and residents: a case study in game theory." *Journal of Political Economy* 92.6 (1984): 991-1016.

[Roth 1986] Alvin E. Roth. "On the allocation of residents to rural hospitals: a general property of two-sided matching markets." *Econometrica: Journal of the Econometric Society* (1986): 425-427.

[Klaus–Klijn 2010] Bettina Klaus and Flip Klijn. "Smith and Rawls share a room: stability and medians." *Social Choice and Welfare* 35.4 (2010): 647-667.

[Gusfield–Irving 1989] Dan Gusfield and Robert W. Irving. *The stable marriage problem: structure and algorithms*. MIT press, 1989.

[Roth 1982] Alvin E. Roth. "The economics of matching: Stability and incentives." *Mathematics of Operations Research* 7.4 (1982): 617-628.

[Dubins–Freedman 1981] Lester E. Dubins and David A. Freedman. "Machiavelli and the Gale-Shapley algorithm." *The American Mathematical Monthly* 88.7 (1981): 485-494.

[Hatfield–Milgrom 2005] John William Hatfield and Paul R. Milgrom. "Matching with contracts." *American Economic Review* 95.4 (2005): 913-935.

[Roth 1985] Alvin E. Roth. "The college admissions problem is not equivalent to the marriage problem." *Journal of economic Theory* 36.2 (1985): 277-288.

[Sönmez 1997] Tayfun Sönmez. "Manipulation via capacities in two-sided matching markets." *Journal of Economic theory* 77.1 (1997): 197-204.

[Whitney 1935] Hassler Whitney. "On the abstract properties of linear dependence." *Hassler Whitney Collected Papers*. Birkhäuser Boston, 1992. 147-171.

[Nakasawa 1935] Takeo Nakasawa. "Zur Axiomatik der linearen Abhängigkeit. I." *Science reports of the Tokyo Bunrika Daigaku. Section A* 2 (1935): 235-255.

[Rado 1957] Richard Rado. "Note on independence functions." *Proceedings of the London Mathematical Society* 3.1 (1957): 300-320.

[Edmonds 1971] Jack Edmonds. "Matroids and the greedy algorithm." *Mathematical programming* 1.1 (1971): 127-136.

[Fleiner 2001] Tamás Fleiner. "A matroid generalization of the stable matching polytope." *International Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization (IPCO 2001)*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2001.

[Alkan '03] Ahmet Alkan. "A class of multipartner matching markets with a strong lattice structure." *Economic Theory* 19.4 (2002): 737-746.

[Fleiner '03] Tamás Fleiner. "A fixed-point approach to stable matchings and some applications." *Mathematics of Operations research* 28.1 (2003): 103-126.

[Eguchi–Fujishige '02] Akinobu Eguchi, and Satoru Fujishige. "An extension of the Gale-Shapley matching algorithm to a pair of M$\natural$-concave functions." *Discrete Mathematics and Systems Science Research Report* (2002): 02-05.

[Eguchi–Fujishige–Tamura ’03] Akinobu Eguchi, Satoru Fujishige, and Akihisa Tamura. "A generalized Gale-Shapley algorithm for a discrete-concave stable-marriage model." *International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC 2003)*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2003.

[Murota–Yokoi ’15] Kazuo Murota and Yu Yokoi. "On the lattice structure of stable allocations in a two-sided discrete-concave market." *Mathematics of Operations Research* 40.2 (2015): 460-473.

[Iwata–Yokoi ’16] Satoru Iwata and Yu Yokoi. "Finding a stable allocation in polymatroid intersection." *Proceedings of the Twenty-Seventh Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*. SIAM, 2016.

[Yokoi ’17] Yu Yokoi. "A generalized polymatroid approach to stable matchings with lower quotas." *Mathematics of Operations Research* 42.1 (2017): 238-255.

[Kojima–Tamura–Yokoo ’18] Fuhito Kojima, Akihisa Tamura, and Makoto Yokoo. "Designing matching mechanisms under constraints: An approach from discrete convex analysis." *Journal of Economic Theory* 176 (2018): 803-833.

[Klaus–Klijn 2005] Bettina Klaus and Flip Klijn. "Stable matchings and preferences of couples." *Journal of Economic Theory* 121.1 (2005): 75-106.

[Kojima–Pathak–Roth 2013] Fuhito Kojima, Parag A. Pathak, and Alvin E. Roth. "Matching with couples: Stability and incentives in large markets." *The Quarterly Journal of Economics* 128.4 (2013): 1585-1632.

[Nguyen−Vohra 2018] Thanh Nguyen and Rakesh Vohra. "Near-feasible stable matchings with couples." *American Economic Review* 108.11 (2018): 3154-69.

[Csáji 2021] Gergely Csáji. "On the complexity of Stable Hypergraph Matching, Stable Multicommodity Flow and related problems." *Egres Technical Report* TR-2021-11.

[Scarf 1967] Herbert E. Scarf. "The core of an N person game." *Econometrica: Journal of the Econometric Society* (1967): 50-69.

[Boros–Gurvich 1996] Endre Boros and Vladimir Gurvich. "Perfect graphs are kernel solvable." *Discrete Mathematics* 159.1-3 (1996): 35-55.

[Aharoni–Holzman 1998] Ron Aharoni and Ron Holzman. "Fractional kernels in digraphs.” *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 73.1 (1998) 1-6.

[Aharoni–Fleiner 2003] Ron Aharoni and Tamás Fleiner. "On a lemma of Scarf." *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 87.1 (2003): 72-80.

[Király–Pap 2008] Tamás Király and Júlia Pap. "Kernels, stable matchings, and Scarf's Lemma." *Egres Technical Report* TR-2008-13.

[Kintali et al. 2013] Shiva Kintali, Laura J. Poplawski, Rajmohan Rajaraman, Ravi Sundaram, and Shang-Hua Teng. "Reducibility among fractional stability problems." *SIAM Journal on Computing* 42.6 (2013): 2063-2113.

[Ishizuka–Kamiyama 2018] Takashi Ishizuka and Naoyuki Kamiyama. "On the complexity of stable fractional hypergraph matching." *29th International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC 2018)*. Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2018.

[Lau–Ravi–Singh 2011] Lap Chi Lau, Ramamoorthi Ravi, and Mohit Singh. *Iterative methods in combinatorial optimization*. Vol. 46. Cambridge University Press, 2011.

[Ravi 2009] Ramamoorthi Ravi. "Iterative methods in combinatorial optimization." *IARCS Annual Conference on Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science*. Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum für Informatik, 2009.

[Lau–Singh 2010] Lap Chi Lau and Mohit Singh. "Iterative Rounding and Relaxation." *RIMS Kôkyûroku Bessatsu* B23 (2010): 1711-92

謝辞 本資料の準備の際には，宮崎修一先生と山口勇太郎先生から多くの有益なコメントをいただきました．ありがとうございました．

演習問題

演習 1 : GSアルゴリズムのD側最適性

問. 一対一のマッチングモデルにおいて，D側プロポーズGale−Shapleyアルゴリズムの出力 M が D側最適な安定マッチングであることを示せ.
(i.e., 任意の安定マッチング N に対し $\forall d \in D\colon M(d) \succcurlyeq_d N(d)$ が成り立つことを示せ.)

ヒント: 証明の出だし.

仮に $D' \coloneqq \{\, d \in D \mid N(d) \succ_d M(d)\} \neq \emptyset$ となる N があったとする.

D' の中で，アルゴリズム中で $N(d)$ に最初にリジェクトされた人を d^* とする.

演習2: Cloningと Rural Hospitals Theorem

任意の多対一インスタンス $I = (D, H, \{\succ_d\}_{d \in D}, \{\succ_h, q_h\}_{h \in H})$ に対し，
以下のような一対一インスタンス I' が存在する: I の安定マッチング集合
と I' の安定マッチング集合との間に全単射 (1対1対応) がある.

このような I から I' への変換は cloningと呼ばれている.

問(1). I' の具体的構成方法を与え，安定マッチングの1対1対応を示せ.

次のページへつづく.

演習 2：Cloningと Rural Hospitals Theorem

任意の多対一インスタンス $I = (D, H, \{\succ_d\}_{d \in D}, \{\succ_h, q_h\}_{h \in H})$ に対して，
以下が成り立つ [Gale-Sotomayor 1985], [Roth 1984, 1986].

Rural Hospitals Theorem 任意の二つの安定マッチング M, N に対し

- $\forall d \in D$: $M(d) = \emptyset \Leftrightarrow N(d) = \emptyset$,
- $\forall h \in H$: $|M(h)| = |N(h)|$,
- $\forall h \in H$: $|M(h)| < q_h$ ならば $M(h) = N(h)$.

問(2). 問(1)の答えを利用して，上記の定理を示せ.

演習３：病院の戦略的操作

多対一マッチングにおける，H側プロポーズGale−Shapleyアルゴリズムでは，病院は <u>リストの操作</u> や <u>容量の過少申告</u> によってアルゴリズムの出力を改善できることがある (i.e., 耐戦略的でない).

問(1). 病院が容量を操作することで得をする例を与えよ.
(具体的インスタンス I および選好の操作方法)

問(2). 病院が選好リストを操作することで得をする例を与えよ.

演習４：マトロイドの例

問. 層マトロイド，横断マトロイド，グラフ的マトロイドがそれぞれマトロイドの公理を満たしていることを示せ.

演習 5：安定branching

有向グラフ $G = (V, A)$ の辺集合 $B \subseteq A$ が **branching** であるとは，グラフ (V, B)がサイクルを含まず, 各頂点に入る辺が高々 1 つであることをいう.

$\succ_v$: 頂点 v に入る辺集合上の全順序 (for each $v \in V$)

$\succ_G$: 辺集合 A 全体の上の全順序

が与えられたとき，branching B が安定であるとは，以下の条件で定義される**ブロッキング辺** $a = \overrightarrow{uv} \in A \setminus B$ が存在しないことをいう:

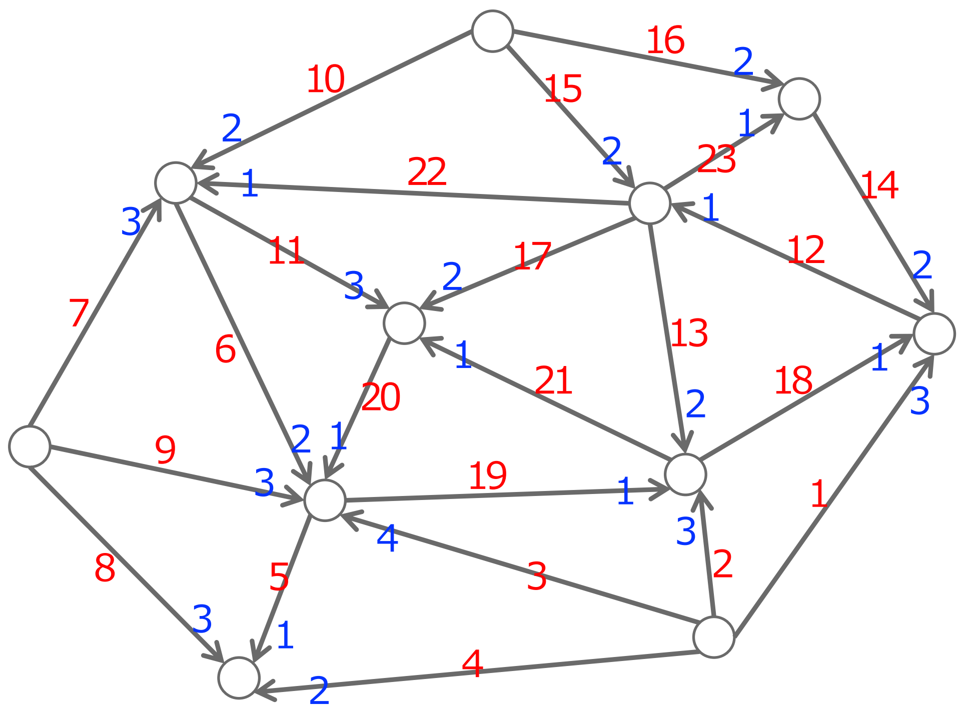
- B は v に入る辺を含まないもしくは $\succ_v$ の意味で a より悪い辺を含む
- $B \cup \{a\}$ は(無向グラフの意味での)サイクルをもたない or サイクルをもつならその中に $\succ_G$ の意味で a より悪い辺がある

次頁へつづく

演習 5 : 安定branching

問. 以下のインスタンスの安定 branching を求めよ.

青字は $\{\succ_v\}_{v\in V}$, 赤字は $\succ_G$ の順位を表す (数字が小さいほど良い要素).



発展編: $\succ_G$ 側最適な安定 branching を求めよ.

※ プロポーズ側が制約をもつ場合のGSアルゴリズムは講義内で説明していないので推測する必要がある.
制約のためにプロポーズできない辺と, リジェクトされた辺とを区別して扱う必要があることに注意.

演習 6：マトロイドの性質

2 限で紹介したマトロイドの性質を示してみよう.

簡単のため要素の重みは全て異なると仮定する ($e \neq e' \Rightarrow w(e) \neq w(e')$).

また，Greedy Algorithm の正当性は認めて使って良い.

問(1).　p. 53 の定理 (最適性条件) を示せ.

問(2).　p. 59 の Greedy Algorithm 2 の正当性を示せ.

演習 7：選好順序の変換

問. カップルを含む安定マッチングインスタンスに対し，p. 86 のように行列 A , ベクトル b を定め，各 $i \in D^1 \cup C$ については $\succ_i$ に従って $\{ e \in E \mid a_{ie} > 0 \}$ 上の順序を決める. Scarf の補題から得られる支配端点解が整数ベクトルだった場合はそれが p.80 の定義での安定マッチングとなるように，各 $h \in H$ の $\{ e \in E \mid a_{he} > 0 \}$ 上の順序を適切に設定せよ.