ポピュラーマッチング

神山 直之

九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所

九州大学
KYUSHU UNIVERSITY

講演概要

1. 問題設定
2. 片側の点のみが選好を持っている場合
3. 両側の点が選好を持っている場合
4. 発展的な話題
5. 参考文献

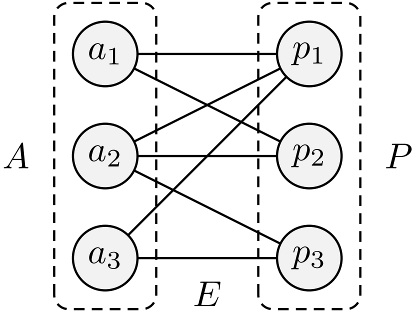
講演概要

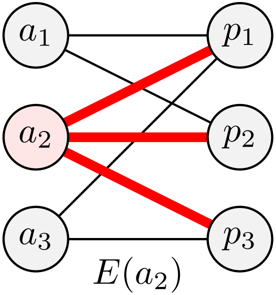
1. **問題設定**
2. 片側の点のみが選好を持っている場合
3. 両側の点が選好を持っている場合
4. 発展的な話題
5. 参考文献

二部グラフとマッチング

- $G = (A, P; E)$ が**二部グラフ** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
  - $A \cap P = \emptyset$ を満たす点集合 A, P
  - A の 1 つの点と P の 1 つの点からなる辺の集合である E
    (各点間には高々 1 本の辺があるとする)
- $a \in A$ と $p \in P$ の間の辺を (a, p) と書く
- 各 $v \in A \cup P$ と各 $L \subseteq E$ に対して
  $L(v) :=$ v に接続する L の辺の集合
- $\mu \subseteq E$ が**マッチング** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall v \in A \cup P \colon |\mu(v)| \leq 1$

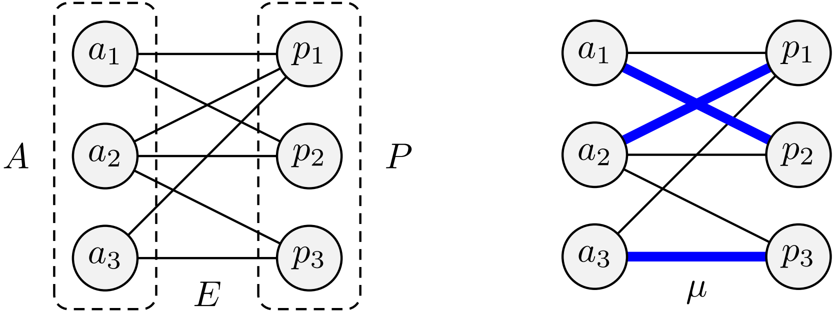
二部グラフ





$$E(a_2) = \{(a_2, p_1), (a_2, p_2), (a_2, p_3)\}$$

マッチング

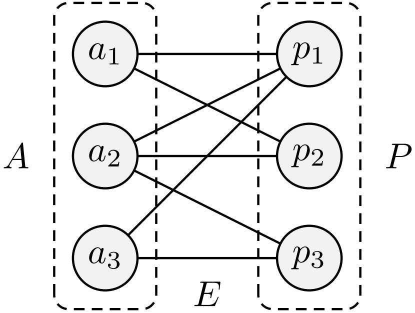


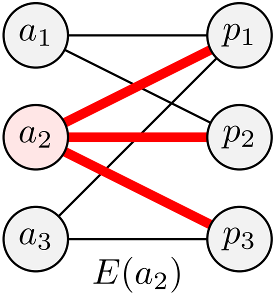
- 各マッチング μ と $\mu(v) \neq \emptyset$ となる $v \in A \cup P$ に対して
  - $\mu(v)$ そのものと $\mu(v)$ に含まれる辺を区別しない

片側の点のみが選好を持っている場合

- 二部グラフ $G = (A, P; E)$ が与えられる
  - A の要素を**応募者**とよぶ
  - P の要素を**ポスト**とよぶ
- 各応募者 $a \in A$ は $E(a)$ の辺に対する選好 $\succ_a$ を持つ
  - $E(a)$ の要素を好ましい順に並べたもの
  - $e \succ_a g \implies a$ にとって e は g より好ましい
  - 同順位は含まない
- 任意の $a \in A$ と $e \in E(a)$ に対して $e \succ_a \emptyset$ と仮定

片側の点のみが選好を持っている場合





$$a_2\colon\ (a_2, p_1) \succ_{a_2} (a_2, p_3) \succ_{a_2} (a_2, p_1)$$

片側の点のみが選好を持っている場合

- マッチング μ と σ に対して

$$\phi(\mu, \sigma) := \{a \in A \mid \mu(a) \succ_a \sigma(a)\}$$

- マッチング μ が**ポピュラー** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

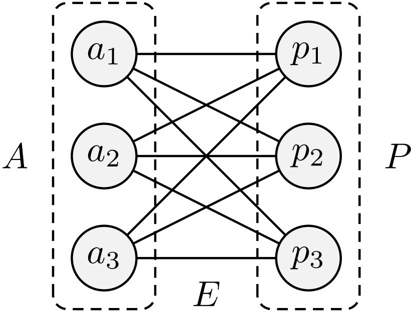
$$\forall \text{マッチング}\sigma: \ \Delta(\mu, \sigma) := |\phi(\mu, \sigma)| - |\phi(\sigma, \mu)| \geq 0$$

- つまり

ポピュラー $\Longleftrightarrow$ 多数決で負けない

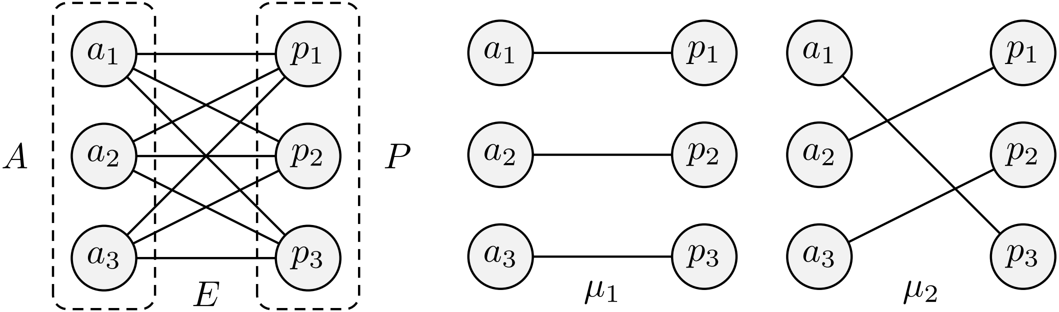
- Weak Condorcet Winner
- Gärdenfors (1975) が（両側選好に対して）導入

片側の点のみが選好を持っている場合



$$a_i\colon\ (a_i, p_1) \succ_{a_i} (a_i, p_2) \succ_{a_i} (a_i, p_3)$$

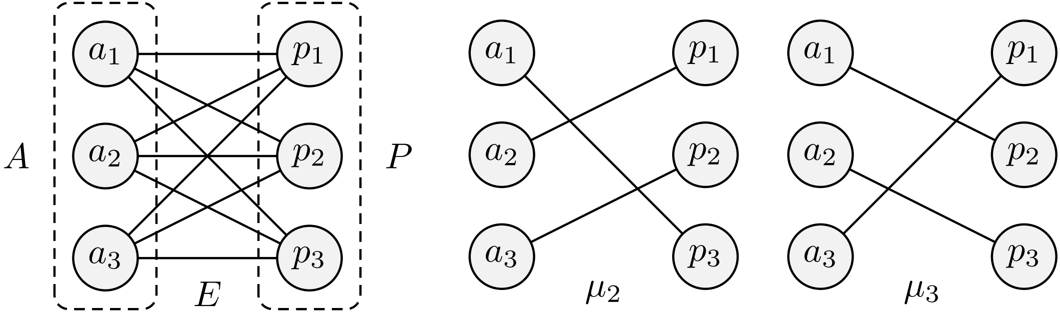
片側の点のみが選好を持っている場合



$$a_i : (a_i, p_1) \succ_{a_i} (a_i, p_2) \succ_{a_i} (a_i, p_3)$$

$$\phi(\mu_1, \mu_2) = \{a_1\}, \quad \phi(\mu_2, \mu_1) = \{a_2, a_3\}$$

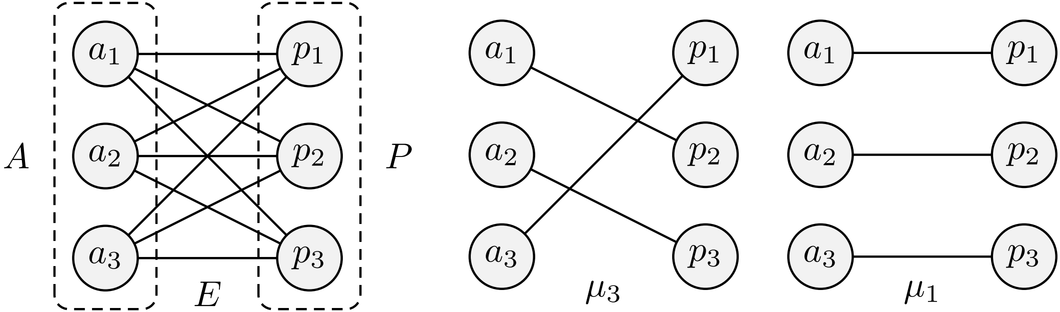
片側の点のみが選好を持っている場合



$$a_i :\ (a_i, p_1) \succ_{a_i} (a_i, p_2) \succ_{a_i} (a_i, p_3)$$

$$\phi(\mu_2, \mu_3) = \{a_2\}, \quad \phi(\mu_3, \mu_2) = \{a_1, a_3\}$$

片側の点のみが選好を持っている場合



$$a_i : (a_i, p_1) \succ_{a_i} (a_i, p_2) \succ_{a_i} (a_i, p_3)$$

$$\phi(\mu_3, \mu_1) = \{a_3\}, \quad \phi(\mu_1, \mu_3) = \{a_1, a_2\}$$

両側の点が選好を持っている場合

- 二部グラフ $G = (A, P; E)$ が与えられる
  - A の要素を**応募者**とよぶ
  - P の要素を**ポスト**とよぶ
- 各点 $v \in A \cup P$ は $E(v)$ の辺に対する選好 $\succ_v$ を持つ
  - $E(v)$ の要素を好ましい順に並べたもの
  - $e \succ_v g \implies v$ にとって e は g より好ましい
  - 同順位は含まない
- 任意の $v \in A \cup P$ と $e \in E(v)$ に対して $e \succ_v \emptyset$ と仮定

両側の点が選好を持っている場合

- マッチング μ と σ に対して

$$\phi(\mu,\sigma) := \{v \in A \cup P \mid \mu(v) \succ_v \sigma(v)\}$$

- マッチング μ が**ポピュラー** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$\forall \text{マッチング}\sigma : \ \Delta(\mu,\sigma) := |\phi(\mu,\sigma)| - |\phi(\sigma,\mu)| \geq 0$$

- つまり

ポピュラー $\Longleftrightarrow$ 多数決で負けない

- Weak Condorcet Winner
- Gärdenfors (1975) が（両側選好に対して）導入

講演概要

1. 問題設定
2. **片側の点のみが選好を持っている場合**
3. 両側の点が選好を持っている場合
4. 発展的な話題
5. 参考文献

ポピュラーマッチングの特徴付け

- この章では各 $a \in A$ に対して
  - 任意の $e \in E(a) \setminus \{\ell_a\}$ に対して $e \succ_a \ell_a$

  を満たす $\ell_a \in E(a)$ が存在すると仮定
- ℓ_a は「a はどのポストにも割り当てられない」を意味する
- 更にこの章ではマッチングの定義を少々変更する

  $\mu \subseteq E$ が**マッチング** $\overset{\text{def}}{\iff}$

  $$\forall a \in A \colon |\mu(a)| = 1, \ \ \forall p \in P \colon |\mu(p)| \leq 1$$

  注：ℓ_a があるため元の定義と基本的には同じ

ポピュラーマッチングの特徴付け

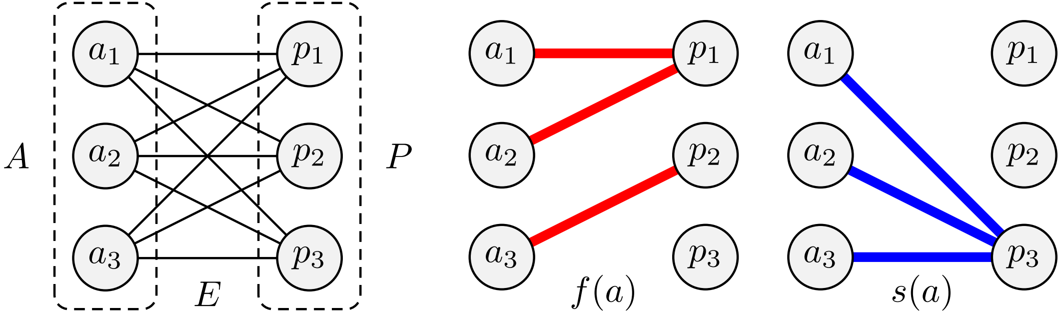
- 各 $a \in A$ に対して **f-edge** $f(a)$ を以下のように定義

  $f(a) :=\ \succ_a$ に関して最も好ましい $E(a)$ の辺
- $F := \{f(a) \mid a \in A\}$, $P_f := \{p \in P \mid E(p) \cap F \neq \emptyset\}$
- $S := \{(a, p) \in E \mid p \notin P_f\}$
- 各 $a \in A$ に対して **s-edge** $s(a)$ を以下のように定義

  $s(a) :=\ \succ_a$ に関して最も好ましい $S(a)$ の辺

  注：ℓ_a のおかげで $s(a)$ は well-defined
- $E^* := \{f(a), s(a) \mid a \in A\}$, $G^* := (A, P; E^*)$

ポピュラーマッチングの特徴付け



$$a_i : (a_i, p_1) \succ_{a_i} (a_i, p_2) \succ_{a_i} (a_i, p_3) \quad (i = 1, 2)$$

$$a_3 : (a_3, p_2) \succ_{a_3} (a_3, p_3) \succ_{a_3} (a_3, p_1)$$

ポピュラーマッチングの特徴付け

定理1：Abraham et al. (2007)

マッチング μ がポピュラー $\Longleftrightarrow$ 以下の (P1) (P2) を満たす

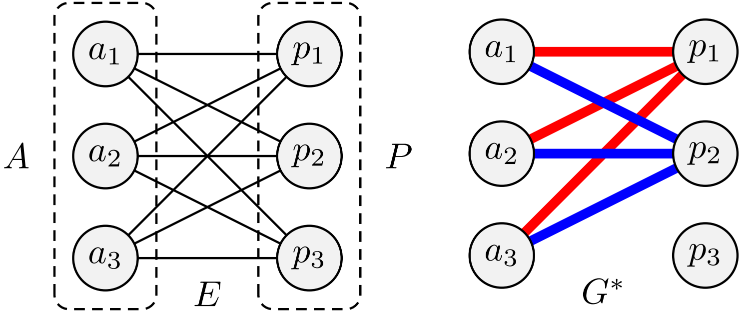
(P1) $\forall a \in A: \ \ \mu(a) \in \{f(a), s(a)\}$

(P2) $\forall p \in P_f: \ \ \mu(p) \neq \emptyset$

- ポピュラーマッチングの存在性が多項式時間で判定可能
  - $|M| = |A|$ となる G^* の**元の意味で**マッチング M が存在

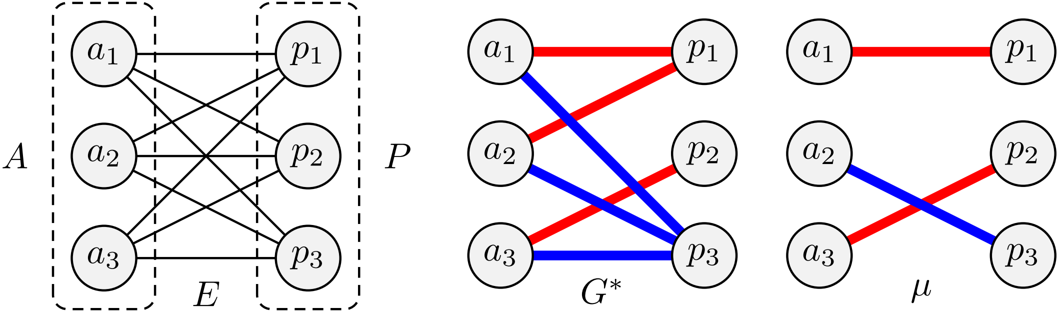
    $\Longrightarrow$ 最大マッチングを求め upgrade すればよい
  - そうでなければ，ポピュラーマッチングは存在しない

ポピュラーマッチングの特徴付け



$$a_i : (a_i, p_1) \succ_{a_i} (a_i, p_2) \succ_{a_i} (a_i, p_3) \quad (i = 1, 2, 3)$$

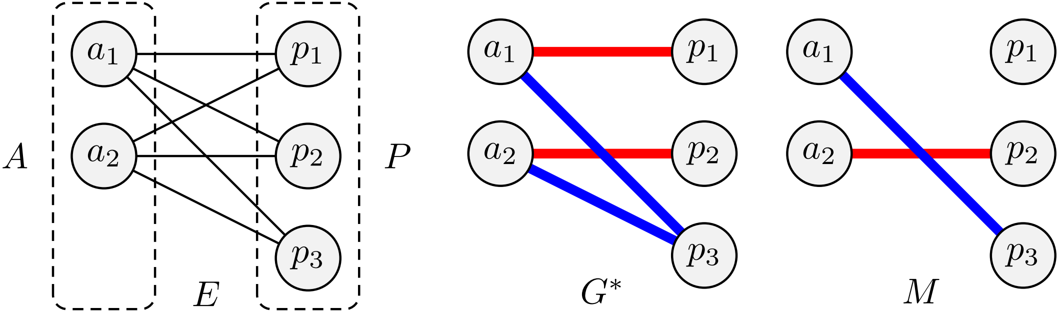
ポピュラーマッチングの特徴付け



$$a_i\colon\ (a_i, p_1) \succ_{a_i} (a_i, p_2) \succ_{a_i} (a_i, p_3) \quad (i = 1, 2)$$

$$a_3\colon\ (a_3, p_2) \succ_{a_3} (a_3, p_3) \succ_{a_3} (a_3, p_1)$$

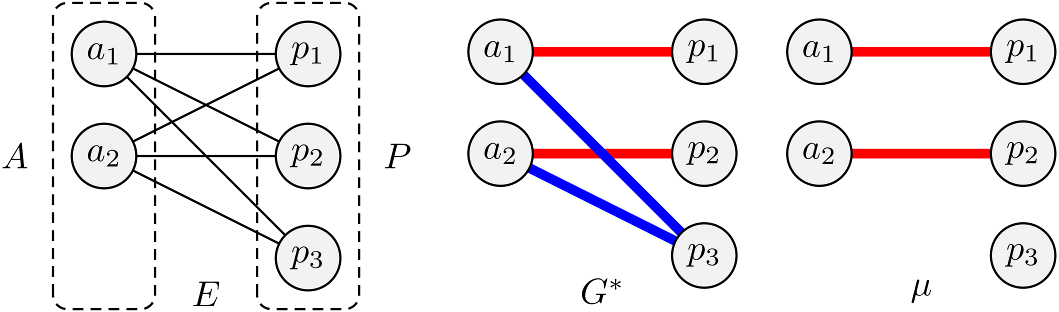
ポピュラーマッチングの特徴付け



$$a_1 \colon \ (a_1, p_1) \succ_{a_1} (a_1, p_2) \succ_{a_1} (a_1, p_3)$$

$$a_2 \colon \ (a_2, p_2) \succ_{a_2} (a_2, p_3) \succ_{a_2} (a_2, p_1)$$

ポピュラーマッチングの特徴付け



$$a_1 : \ (a_1, p_1) \succ_{a_1} (a_1, p_2) \succ_{a_1} (a_1, p_3)$$

$$a_2 : \ (a_2, p_2) \succ_{a_2} (a_2, p_3) \succ_{a_2} (a_2, p_1)$$

定理 1 の証明

定理 1：Abraham et al. (2007)

マッチング μ がポピュラー $\Longleftrightarrow$ 以下の (P1) (P2) を満たす

(P1) $\forall a \in A\colon\ \mu(a) \in \{f(a), s(a)\}$

(P2) $\forall p \in P_f\colon\ \mu(p) \neq \emptyset$

$(\Longrightarrow)$

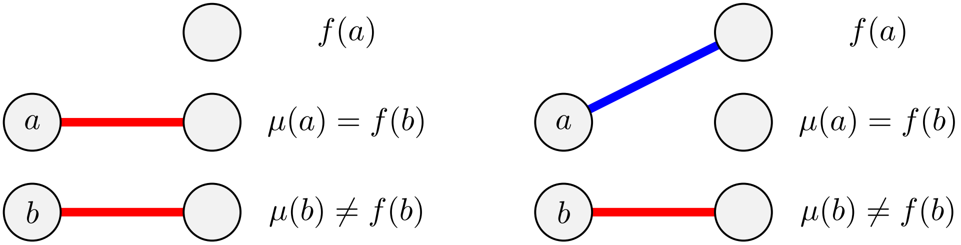
- μ をポピュラーマッチングとする
- $\mu(a) \notin \{f(a), s(a)\}$ を満たす $a \in A$ が存在すると仮定
- まず $\underline{f(a) \succ_a \mu(a) \succ_a s(a)}$ の場合を考える

定理１の証明

- $s(a)$ の定義より $f(b) = \mu(a)$ となる $b \in A \setminus \{a\}$ が存在
- $\mu(f(a)) = \emptyset$ ならば

$$\widehat{\mu}(a) = f(a),\ \ \widehat{\mu}(a') = \mu(a') \quad (a' \neq a)$$

とすれば $\phi(\mu, \widehat{\mu}) = \emptyset$, $\phi(\widehat{\mu}, \mu) = \{a\}$ となり矛盾

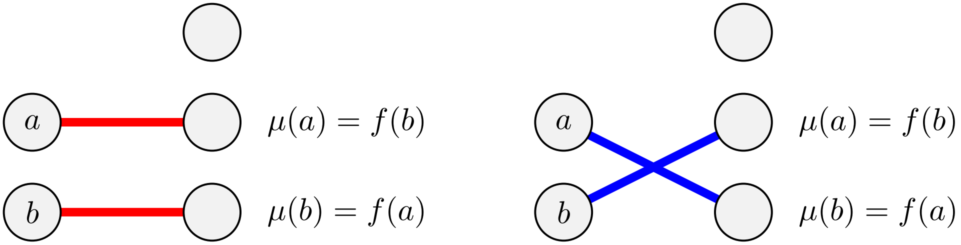


定理１の証明

- 以下では $\mu(f(a)) \neq \emptyset$ と仮定
- $\mu(b) = f(a)$ ならば

$$\widehat{\mu}(a) = f(a),\ \ \widehat{\mu}(b) = f(b),\ \ \widehat{\mu}(a') = \mu(a') \quad (a' \neq a, b)$$

とすれば $\phi(\mu, \widehat{\mu}) = \emptyset$, $\phi(\widehat{\mu}, \mu) = \{a, b\}$ となり矛盾



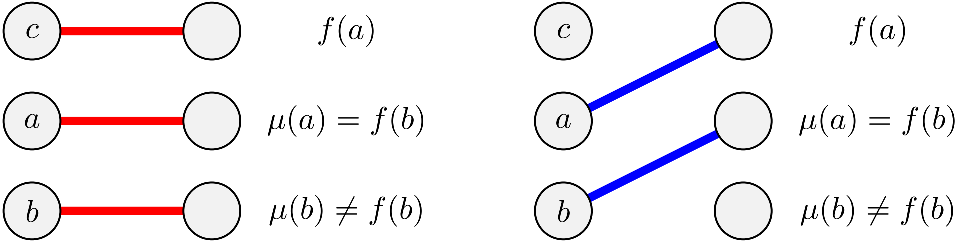
定理１の証明

- $\mu(b) \neq f(a)$ ならば，$\mu(c) = f(a)$ とし

$$\widehat{\mu}(a) = f(a),\ \ \widehat{\mu}(b) = f(b),\ \ \widehat{\mu}(c) = \ell_c,$$

$$\widehat{\mu}(a') = \mu(a') \quad (a' \neq a, b, c)$$

とすれば $\phi(\mu, \widehat{\mu}) = \{c\}$, $\phi(\widehat{\mu}, \mu) = \{a, b\}$ となり矛盾

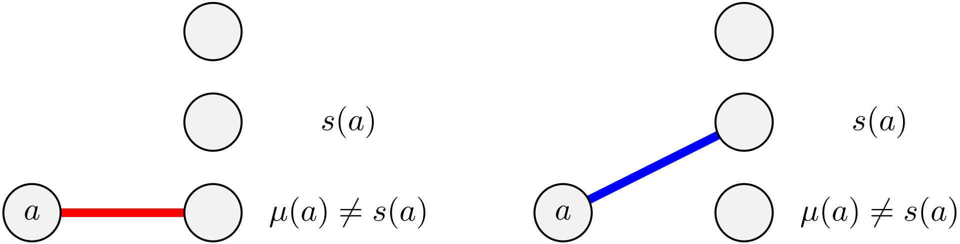


定理１の証明

- 続いて $\underline{s(a) \succ_a \mu(a)}$ の場合を考える
- $\mu(s(a)) = \emptyset$ ならば

$$\widehat{\mu}(a) = s(a),\ \ \widehat{\mu}(a') = \mu(a') \quad (a' \neq a)$$

とすれば $\phi(\mu, \widehat{\mu}) = \emptyset$, $\phi(\widehat{\mu}, \mu) = \{a\}$ となり矛盾

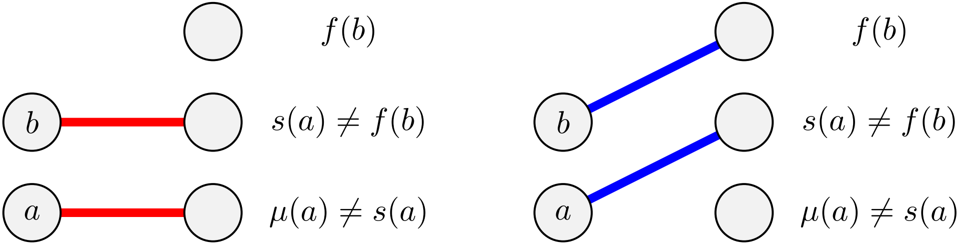


定理 1 の証明

- 以下では $\mu(s(a)) \neq \emptyset$ とし, $\mu(b) = s(a)$ とする
- $\mu(f(b)) = \emptyset$ ならば

$$\widehat{\mu}(a) = s(a),\ \ \widehat{\mu}(b) = f(b),\ \ \widehat{\mu}(a') = \mu(a') \quad (a' \neq a, b)$$

とすれば $\phi(\mu, \widehat{\mu}) = \emptyset$, $\phi(\widehat{\mu}, \mu) = \{a, b\}$ となり矛盾

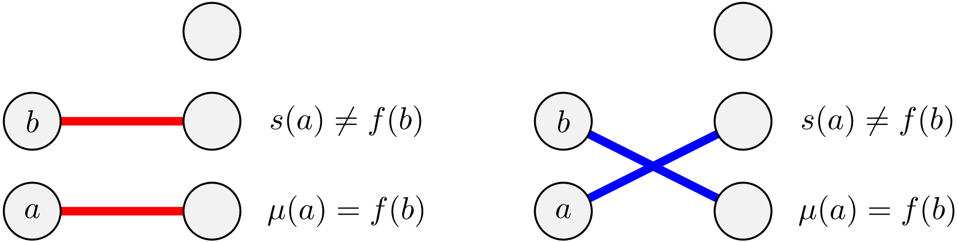


定理１の証明

- 以下では $\mu(f(b)) \neq \emptyset$ と仮定
- $\mu(a) = f(b)$ ならば

$$\widehat{\mu}(a) = s(a),\ \ \widehat{\mu}(b) = f(b),\ \ \widehat{\mu}(a') = \mu(a') \quad (a' \neq a, b)$$

とすれば $\phi(\mu, \widehat{\mu}) = \emptyset$, $\phi(\widehat{\mu}, \mu) = \{a, b\}$ となり矛盾



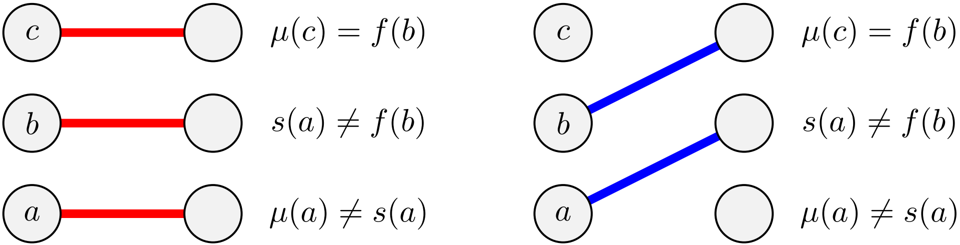
定理 1 の証明

- $\mu(a) \neq f(b)$ ならば, $\mu(c) = f(b)$ とし

$$\widehat{\mu}(a) = s(a), \ \ \widehat{\mu}(b) = f(b), \ \ \widehat{\mu}(c) = \ell_c,$$

$$\widehat{\mu}(a') = \mu(a') \ \ (a' \neq a, b, c)$$

とすれば $\phi(\mu, \widehat{\mu}) = \{c\}$, $\phi(\widehat{\mu}, \mu) = \{a, b\}$ となり矛盾



定理１の証明

- 続いて (P2) を示す
- $\mu(p) = \emptyset$ を満たす $p \in P_f$ が存在すると仮定
- $p \in P_f$ より $f(a) = p$ となる $a \in A$ が存在
- $\mu(p) = \emptyset$ より $\mu(a) \neq f(a)$
- 新たなマッチング $\widehat{\mu}$ を以下のように定義

$$\widehat{\mu}(a) = f(a), \ \ \widehat{\mu}(b) = \mu(b) \ \ \ (b \neq a)$$

- $\phi(\mu, \widehat{\mu}) = \emptyset$, $\phi(\widehat{\mu}, \mu) = \{a\}$ となり矛盾

定理 1 の証明

$(\Longleftarrow)$

- マッチング μ が (P1) (P2) を満たすと仮定
- 他のマッチング σ に対して $|\phi(\mu,\sigma)| \geq |\phi(\sigma,\mu)|$ を示す
- $A^+ := \{a \in A \mid \sigma(a) \succ_a \mu(a)\}$
- 以下を満たす関数 $h\colon A^+ \to A$ を構築する
  - 異なる $a, b \in A^+$ に対して $h(a) \neq h(b)$
  - 任意の $a \in A^+$ に対して $\mu(h(a)) \succ_{h(a)} \sigma(h(a))$
- $|\phi(\sigma,\mu)| = |A^+| = |h(A^+)| \leq |\phi(\mu,\sigma)|$ より証明完了

定理 1 の証明

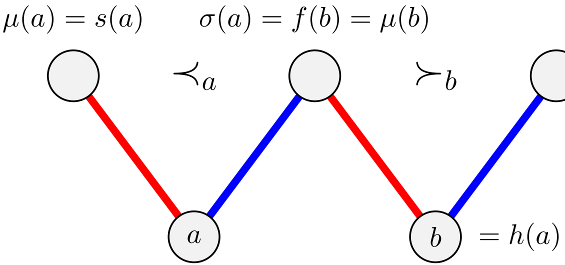
- 任意の $a \in A^+$ を考える
- $\sigma(a) \succ_a \mu(a)$ と (P1) より $\mu(a) = s(a)$

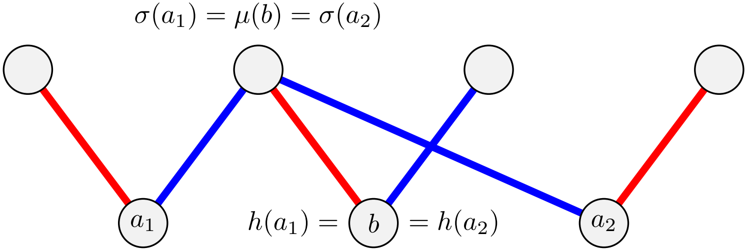
  $\Longrightarrow$ s-edge の定義より $\sigma(a) = f(b)$ となる $b \in A$ が存在
- (P2) より $\sigma(a) = \mu(b)$ となる $b \in A$ が存在
- σ はマッチングなので $\sigma(b) \neq f(b)$

  $\Longrightarrow$ $h(a) = b$ とすれば $\mu(h(a)) \succ_{h(a)} \sigma(h(a))$
- 異なる $a_1, a_2 \in A^+$ に対して $h(a_1) = h(a_2)$ とすると

  $\Longrightarrow$ $\sigma(a_1) = \sigma(a_2)$ となりマッチングであることに矛盾

定理１の証明


$\mu(a) = s(a)$
$\sigma(a) = f(b) = \mu(b)$
$\prec_a$
$\succ_b$
a
b
$= h(a)$


$\sigma(a_1) = \mu(b) = \sigma(a_2)$
a_1
$h(a_1) =$
b
$= h(a_2)$
a_2

Popular Condensation Problem

- ポピュラーマッチングが存在しないときはどうする？
- 一つの案として **Popular Condensation Problem**
- A から点を取り除いてポピュラーマッチングを生み出す
- 例えば $|A|-1$ 点取り除けばよい

問題：Popular Condensation Problem

$G-X$ にポピュラーマッチングが存在するような最小サイズの $X \subseteq A$ を求めよ

- 多項式時間で解ける by Wu et al. (2013) $\Longleftarrow$ これを示す

Popular Condensation Problem

<u>アルゴリズム</u>

1. G^* の元の意味での最大マッチング M^* を求める
2. $X = \{a \in A \mid M^*(a) = \emptyset\}$ を出力する

定理 2：Wu et al. (2013)

上記のアルゴリズムは正しく問題を解く

演習問題 1

$G - X$ にはポピュラーマッチングが存在する

Popular Condensation Problem

- G^* の連結成分を $C_1, C_2, \ldots, C_m$ とする
- $I := \{i \in \{1, 2, \ldots, m\} \mid |A \cap V(C_i)| \geq |P \cap V(C_i)|\}$
- $A_I := \bigcup_{i \in I}(A \cap V(C_i))$, $P_I := \bigcup_{i \in I}(P \cap V(C_i))$,

補題 1

$|X| = |A_I| - |P_I|$

補題 2

∃ポピュラーマッチング in $G - Y \implies |Y| \geq |A_I| - |P_I|$

補題 1 の証明

- 以下を示す
  - 任意の $i \in \{1, 2, \ldots, m\} \setminus I$ に対して
    $$\forall a \in A \cap V(C_i) \colon \ M_i(a) \neq \emptyset$$
    を満たす C_i 上のマッチング M_i が存在
  - 任意の $i \in I$ に対して
    $$\forall p \in P \cap V(C_i) \colon \ M_i(p) \neq \emptyset$$
    を満たす C_i 上のマッチング M_i が存在
- M^* は最大マッチング $\implies |X| = |A_I| - |P_I|$

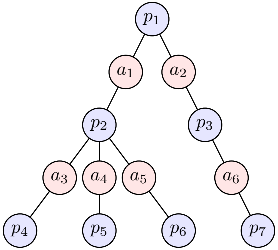
補題 1 の証明

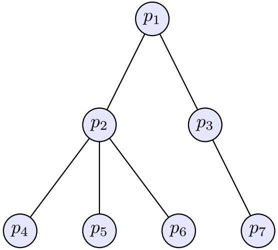
- $i \in \{1, 2, \ldots, m\} \setminus I$ を固定
- 以下を満たすグラフ G_i を考える
  - G_i の点集合は $P \cap V(C_i)$
  - $\exists a \in A \cap V(C_i)\colon E^*(a) = \{(a, p), (a, p')\}$

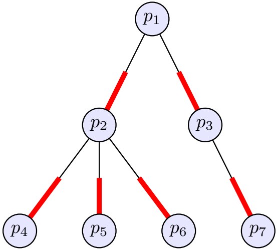
    $\iff$ 辺 $e = \{p, p'\}$ が G_i に存在
- C_i が連結 $\implies$ G_i も連結 $\implies$ G_i は全域木を含む
- $G_i \neq$ 木 $\implies$ $|A \cap V(C_i)| \geq |P \cap V(C_i)|$ $\implies$ $i \notin I$ に矛盾

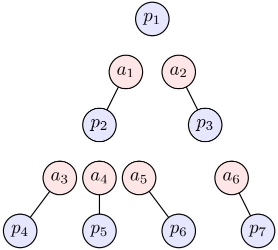
$\therefore G_i$ は木である $\implies$ 葉からマッチングを求めれば良い

補題 1 の証明


p_1
a_1 a_2
p_2 p_3
a_3 a_4 a_5 a_6
p_4 p_5 p_6 p_7


p_1
p_2 p_3
p_4 p_5 p_6 p_7


p_1
p_2 p_3
p_4 p_5 p_6 p_7


p_1
a_1 a_2
p_2 p_3
a_3 a_4 a_5 a_6
p_4 p_5 p_6 p_7

補題 1 の証明

- $i \in I$ を固定
- 先ほどの同じ G_i を考える

$$\implies G_i \text{ は全域木 } T \text{ を含む}$$

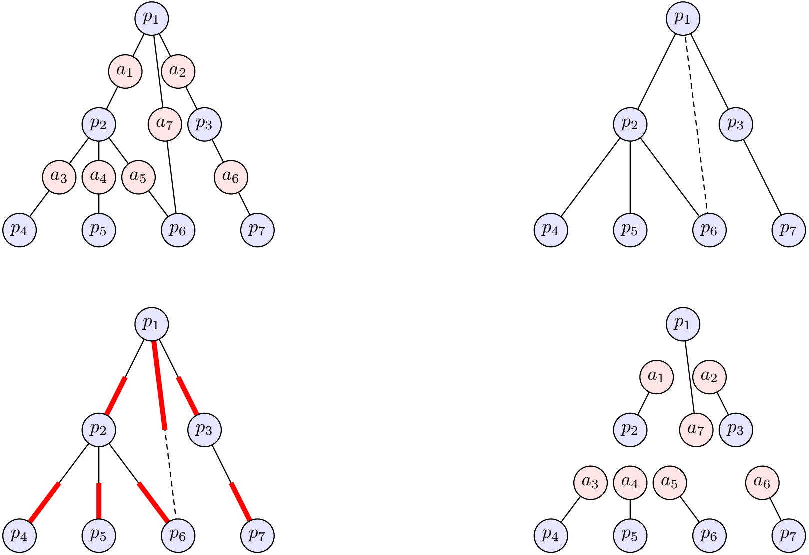
- $i \in I$

$$\implies |A \cap V(C_i)| \geq |P \cap V(C_i)|$$

$$\implies T \text{ に含まれない } G_i \text{ の辺 } e \text{ が存在}$$

- e の一つの端点を T の根とする
- 葉からマッチングを求め根には e を割り当てる

補題 1 の証明



p_1
a_1
a_2
p_2
a_7
p_3
a_3
a_4
a_5
a_6
p_4
p_5
p_6
p_7
p_1
p_2
p_3
p_4
p_5
p_6
p_7
p_1
p_2
p_3
p_4
p_5
p_6
p_7
p_1
a_1
a_2
p_2
a_7
p_3
a_3
a_4
a_5
a_6
p_4
p_5
p_6
p_7

補題 2 の証明

- $G - Y$ における f-edge と s-edge を $f'(\cdot)$, $s'(\cdot)$ とかく
- 任意の $a \in A \setminus Y$ に対して $f'(a) = f(a)$

Claim

$$\exists a \in A \setminus Y : s'(a) \neq s(a) \implies \exists a \in Y : f(a) = s'(a)$$

- $A \setminus Y \subseteq A$ より $s'(a) \succ_a s(a)$

  $\implies f(a) = s'(a)$ を満たす $a \in A$ を取り除く必要がある $\square$

- $E_Y^* := \{f'(a), s'(a) \mid a \in A \setminus Y\}$, $G_Y^* := (A \setminus Y, P; E_Y^*)$

補題 2 の証明

- $Y_1 := Y \cap A_I$, $Y_2 := Y \setminus A_I$
- 各 $Z \subseteq A \setminus Y$ に対して

  $N(Z) :=$ G^*_Y 上の Z の隣接点集合 $\subseteq P$
- $G - Y$ 上にポピュラーマッチングが存在

  $\implies \forall Z \subseteq A \setminus Y : |Z| \leq |N(Z)|$
- 先ほどの Claim より, 各 $a \in A_I \setminus Y_1 = A_I \setminus Y$ に対して

  $N(\{a\}) \subseteq P_I \cup \{f(b) \mid b \in Y\}$

  $\impliedby$ G^* における隣接点 $+ \ s'(a)$ が upgrade された可能性

補題 2 の証明

- 各 $b \in Y_1 \subseteq A_I$ に対して $f(b) \in P_I$

$$\implies P_I \cup \{f(b) \mid b \in Y\} = P_I \cup \{f(b) \mid b \in Y_2\}$$

- よって各 $a \in A_I \setminus Y_1$ に対して

$$N(\{a\}) \subseteq P_I \cup \{f(b) \mid b \in Y\} = P_I \cup \{f(b) \mid b \in Y_2\}$$

- 以上より

$$|A_I \setminus Y_1| \leq |N(A_I \setminus Y_1)| \leq |P_I \cup \{f(b) \mid b \in Y_2\}|$$

$$\leq |P_I| + |\{f(b) \mid b \in Y_2\}| \leq |P_I| + |Y_2|$$

- $|A_I \setminus Y_1| = |A_I| - |Y_1|$ より $|A_I| - |P_I| \leq |Y_1| + |Y_2| = |Y|$

講演概要

1. 問題設定
2. 片側の点のみが選好を持っている場合
3. **両側の点が選好を持っている場合**
4. 発展的な話題
5. 参考文献

ポピュラーマッチングの特徴付け

- マッチング μ を考える
- 各 $e = (a, p) \in E \setminus \mu$ に対して
  - $r_\mu(e) := (+, +)$ if $e \succ_a \mu(a)$ and $e \succ_p \mu(p)$ (type 1)
  - $r_\mu(e) := (+, -)$ if $e \succ_a \mu(a)$ and $\mu(p) \succ_p e$ (type 2)
  - $r_\mu(e) := (-, +)$ if $\mu(a) \succ_a e$ and $e \succ_p \mu(p)$ (type 3)
  - $r_\mu(e) := (-, -)$ if $\mu(a) \succ_a e$ and $\mu(p) \succ_p e$ (type 4)
- **交互パス（サイクル）** $\overset{\text{def}}{\iff}$

  μ の辺と $E \setminus \mu$ の辺を交互に通るパス（サイクル）

ポピュラーマッチングの特徴付け

- G の部分グラフ G^- を以下のように定義
  - G から type 4 の辺を全て取り除いたもの

補題 3：Huang and Kavitha (2013)

μ がポピュラーマッチング $\iff$

G^- に以下の満たす交互サイクル C と交互パス S が無い

(i) type 1 の辺を含む C

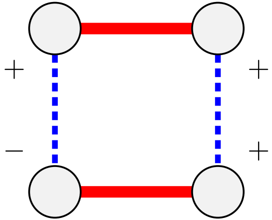
(ii) ∃端点 v: $\mu(v) = \emptyset$ 満たし かつ type 1 の辺を含む S

(iii) type 1 の辺を 2 本以上含む S

補題 3 の証明

$(\Longrightarrow)$ 方針：条件を満たす C or S が存在するとして矛盾を導く

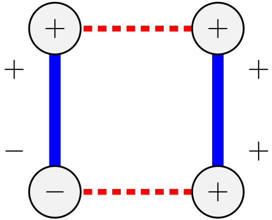
- 赤：μ の辺，　青：$E \setminus \mu$ の辺



補題 3 の証明

$(\Longrightarrow)$ 方針：条件を満たす C or S が存在するとして矛盾を導く

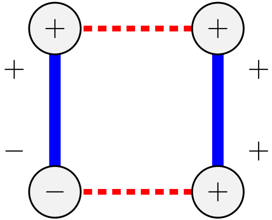
- 赤：μ の辺，　青：$E \setminus \mu$ の辺

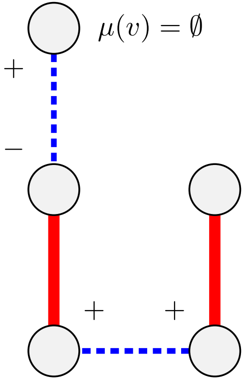


補題 3 の証明

$(\Longrightarrow)$ 方針：条件を満たす C or S が存在するとして矛盾を導く

- 赤：μ の辺，　青：$E \setminus \mu$ の辺

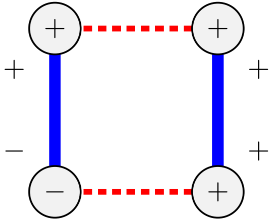


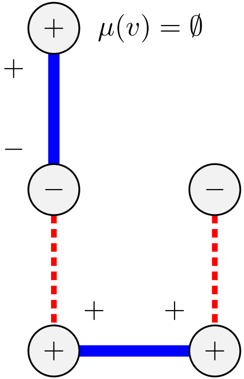


補題 3 の証明

$(\Longrightarrow)$ 方針：条件を満たす C or S が存在するとして矛盾を導く

- 赤：μ の辺，　青：$E \setminus \mu$ の辺

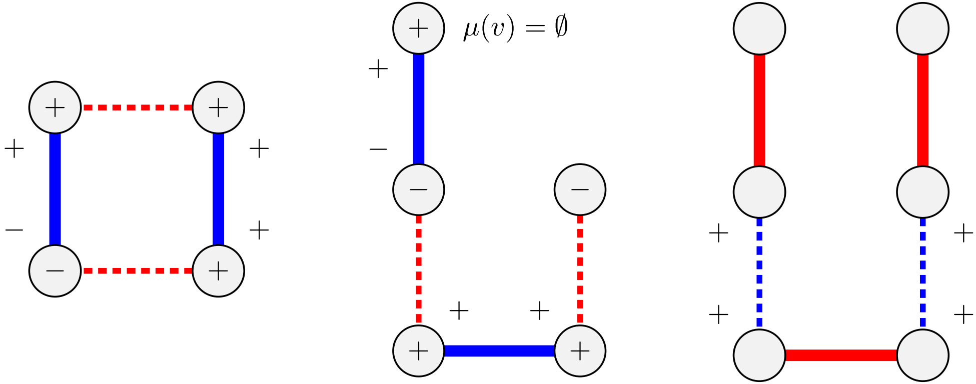




補題 3 の証明

$(\Longrightarrow)$ 方針：条件を満たす C or S が存在するとして矛盾を導く

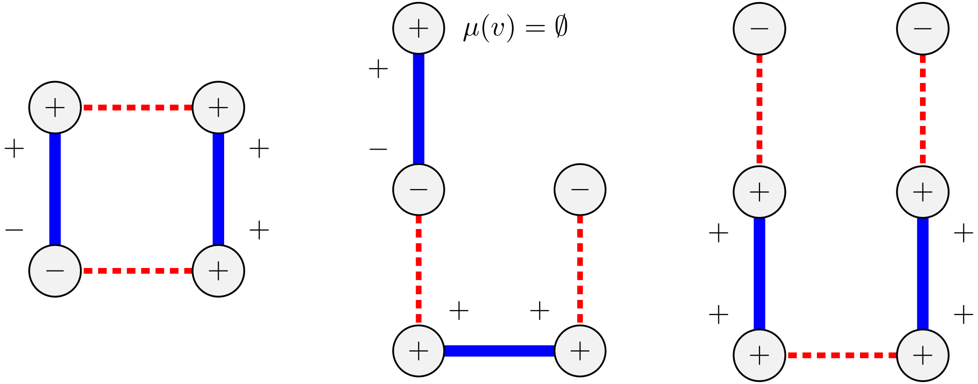
- 赤：μ の辺，　青：$E \setminus \mu$ の辺



補題 3 の証明

$(\Longrightarrow)$ 方針：条件を満たす C or S が存在するとして矛盾を導く

- 赤：μ の辺，　青：$E \setminus \mu$ の辺



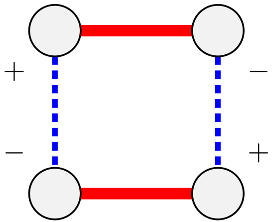
補題 3 の証明

$(\Longleftarrow)$ 方針：他のマッチング σ に対して $\Delta(\mu, \sigma) \geq 0$ を示す

- μ が補題の条件を満たすと仮定し，マッチング σ を考える
- σ から type 4 の辺を取り除く（$\because \Delta(\mu, \sigma)$ に影響しない）
- μ と σ の対称差は G^- 上の交互サイクル（パス）で構成
  - サイクル
  - σ の辺で始まり σ の辺で終わるパス
  - σ の辺で始まり μ の辺で終わるパス
  - μ の辺で始まり μ の辺で終わるパス

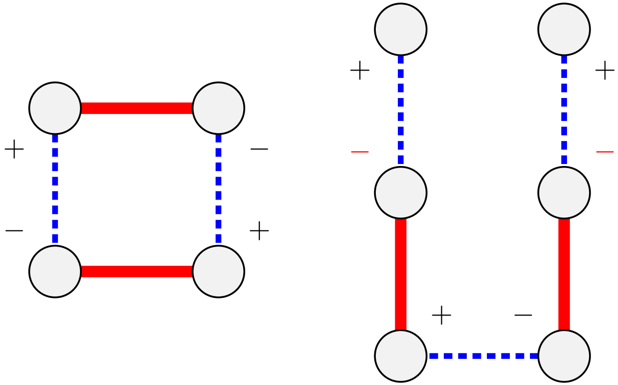
補題 3 の証明

- 赤：μ の辺，　青：σ の辺



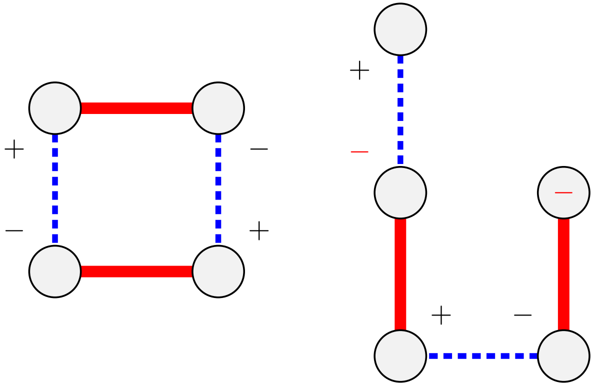
補題 3 の証明

- 赤：μ の辺，　青：σ の辺



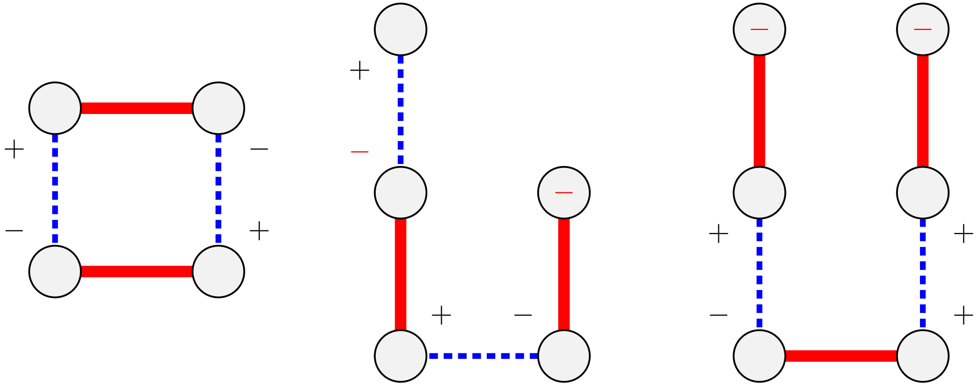
補題 3 の証明

- 赤：μ の辺，　青：σ の辺



補題 3 の証明

- 赤：μ の辺，　青：σ の辺



ポピュラーマッチングと安定マッチング

- $(a,p) \in E \setminus \mu$ がマッチング μ を**ブロックする**
  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $(a,p) \succ_a \mu(a)$ および $(a,p) \succ_p \mu(p)$ が成り立つ
- マッチング μ が**安定** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
  μ をブロックする $E \setminus \mu$ の辺が存在しない

定理 4：Gale and Shapley (1962)

安定マッチングは常に存在する

- 安定マッチングは多項式時間で発見可能

ポピュラーマッチングと安定マッチング

定理 5：Gärdenfors (1975)

安定マッチング $\Longrightarrow$ ポピュラーマッチング

- μ を安定マッチングとすると…

  $r_\mu(e) = (+,+)$ となる $e \in E \setminus \mu$ は存在しない

  $\Longrightarrow$ 補題 3 より μ はポピュラーマッチング $\square$

- 定理 5 と安定マッチングに関する定理 4 より
  - ポピュラーマッチングは常に存在
  - ポピュラーマッチングは多項式時間で見つかる

最大ポピュラーマッチング

- ポピュラーマッチングのサイズは異なる可能性がある
- 最大のポピュラーマッチングは多項式時間で発見可能
  - Huang & Kavitha (2013), Kavitha (2014)
- Kavitha (2014) のアルゴリズムの概要
  - 各辺に対して並行なコピーを加える
  - A は元の辺が好ましい, but P はコピーが好ましい
  - コピーを加えたグラフで安定マッチング μ を求める
  - μ を自然に元のグラフのマッチングと解釈し出力

最小ポピュラーマッチング

定理 6：Huang and Katvith (2013)

安定マッチングは最小サイズポピュラーマッチング

演習問題 2

全ての安定マッチングの端点集合は同一

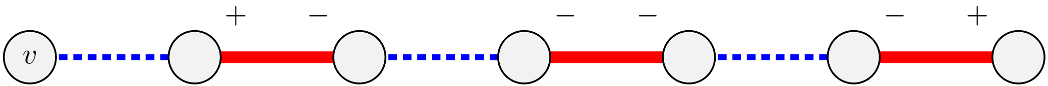
- 安定マッチングの端点の集合を U とする
- ポピュラーマッチング μ と安定マッチング σ を考える
- $\mu(v) = \emptyset$ となる $v \in U$ が存在すると仮定

最小ポピュラーマッチング

- μ と σ の対称差は v から始まる交互パス S を含む
- σ は安定マッチングなので
  - $e \succ_a \sigma(a)$ かつ $e \succ_p \sigma(p)$ かつ

  を満たす S 上の μ の辺 $e = (a, p)$ は存在しない
- S に沿って反転させたマッチングを $\widehat{\mu}$ とする

  $\Longrightarrow$ $\Delta(\mu, \widehat{\mu}) < 0$ となり μ がポピュラーであることに矛盾

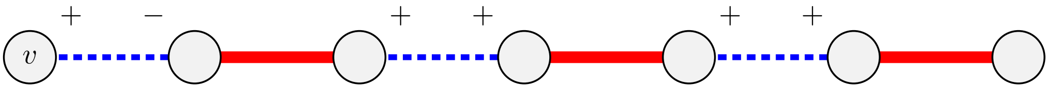


最小ポピュラーマッチング

- μ と σ の対称差は v から始まる交互パス S を含む
- σ は安定マッチングなので
  - $e \succ_a \sigma(a)$ かつ $e \succ_p \sigma(p)$ かつ

  を満たす S 上の μ の辺 $e = (a, p)$ は存在しない
- S に沿って反転させたマッチングを $\widehat{\mu}$ とする

  $\Longrightarrow \ \Delta(\mu, \widehat{\mu}) < 0$ となり μ がポピュラーであることに矛盾

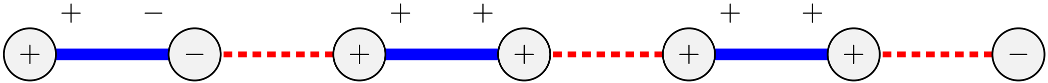


最小ポピュラーマッチング

- μ と σ の対称差は v から始まる交互パス S を含む
- σ は安定マッチングなので
  - $e \succ_a \sigma(a)$ かつ $e \succ_p \sigma(p)$ かつ

  を満たす S 上の μ の辺 $e = (a, p)$ は存在しない
- S に沿って反転させたマッチングを $\widehat{\mu}$ とする

  $\Longrightarrow$ $\Delta(\mu, \widehat{\mu}) < 0$ となり μ がポピュラーであることに矛盾



講演概要

1. 問題設定
2. 片側の点のみが選好を持っている場合
3. 両側の点が選好を持っている場合
4. **発展的な話題**
5. 参考文献

複数の 応募者 and/or ポスト を受け入れる場合

- 片側選好 + ポストが複数の応募者を受け入れる場合
  - 基本的にはポストをコピーすれば良い
  - 直接解くアルゴリズム：Manlove & Sng (2006)
  - 複雑な制約：Nasre et al. (2019), Kamiyama (2016, 2017)
- 片側選好 + 応募者が複数のポストを受け入れる場合
  - 基本的に難しい：Paluch (2014)
- 両側選好 + 多対多の設定
  - Brandl & Kavitha (2020), Kamiyama (2019), Cergely et al. (2022)

選好が同順位を含む場合，一般のグラフの場合

- 選好における同順位 $= e \succsim g$ かつ $g \succsim e$
  選好が同順位を含む場合：
  - 片側選好：基本的には同順位がない場合を拡張可能
  - 両側選好：存在性判定が NP 完全 by Biró et al. (2010)
- 入力のグラフが一般の場合：
  - いわゆる Roommate Problem
  - 存在性判定（同順位なし）は NP 完全

    Faenza et al. (2019), Gupta et al. (2021) $\leftarrow$ 会議版は SODA2019

その他

- 応募者に重みが与えられている場合：
  - 各点に一票の重みが与えられている状況での多数決
  - 片側選好：存在性が多項式時間判定可能 by Mestre (2014)
  - 両側選好：存在性判定は NP 完全 by Heeger & Cseh (2021)
- 片側選好と両側選考を合わせたような設定
  - 両側の点が選好を持つ
  - 片側選好・両側選好両方の意味でポピュラーなもの
  - 存在性が多項式時間判定可能 by Kavitha (2020)

片側選好：ポピュラーマッチングの数え上げ

- ポピュラーマッチング μ を固定する
- 各 $a \in A$ に対して $o(a) := \{f(a), s(a)\} \setminus \{\mu(a)\}$ の要素
- 以下を満たす有向グラフ $D = (P, L)$（**交換グラフ**）を作る

$$(p, q) \in L \iff \exists a \in A\colon\ p = \mu(a),\ q = o(a)$$

- p は f**-vertex** (s**-vertex**) $\overset{\text{def}}{\iff}$ $p \in P_f$ $(\exists a \in A\colon p = s(a))$
- 各点の出次数 $\leq 1 \implies D$ の各連結成分は
  - サイクル $+$ 入ってくる内向木 (Cycle component), or
  - 根が s-vertex である内向木 (Tree component)

片側選好：ポピュラーマッチングの数え上げ

$a_1:\quad p_1 \quad p_2$

$a_2:\quad p_3 \quad p_2$

$a_3:\quad p_3 \quad p_4$

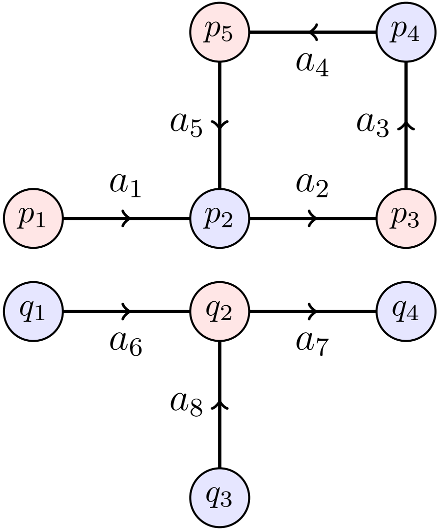
$a_4:\quad p_5 \quad p_4$

$a_5:\quad p_5 \quad p_2$

$a_6:\quad q_2 \quad q_1$

$a_7:\quad q_2 \quad q_4$

$a_8:\quad q_2 \quad q_3$



片側選好：ポピュラーマッチングの数え上げ

- Cycle component C 上のサイクルが以下を満たすとする
  - $p_1 \to a_1 \to p_2 \to a_2 \to \cdots \to a_k \to p_1$
  - $p_1, p_2, \ldots, p_k \in P$, $a_1, a_2, \ldots, a_k \in A$
- C に沿って μ を**反転させる** $\overset{\text{def}}{\iff}$

  μ を以下を満たすマッチング $\widehat{\mu} = \mu \oplus C$ に変形する
  - $\widehat{\mu}(a_i) = (a_i, p_{i+1})$ for $i = 1, 2, \ldots, k-1$
  - $\widehat{\mu}(a_k) = (a_k, p_1)$
  - $\widehat{\mu}(a) = \mu(a)$ for $a \neq a_1, a_2, \ldots, a_k$

片側選好：ポピュラーマッチングの数え上げ

$a_1:\quad p_1 \quad p_2$

$a_2:\quad p_3 \quad p_2$

$a_3:\quad p_3 \quad p_4$

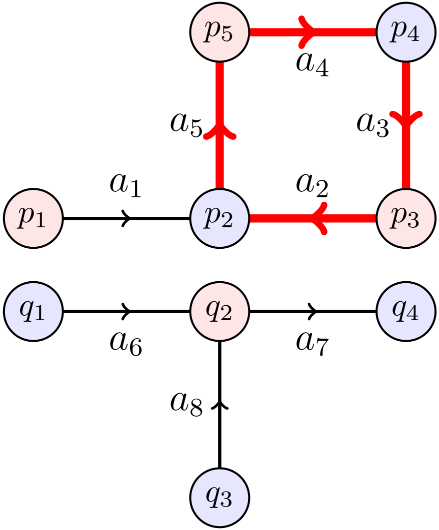
$a_4:\quad p_5 \quad p_4$

$a_5:\quad p_5 \quad p_2$

$a_6:\quad q_2 \quad q_1$

$a_7:\quad q_2 \quad q_4$

$a_8:\quad q_2 \quad q_3$



片側選好：ポピュラーマッチングの数え上げ

- Tree component T 上の以下を満たす有向パス S を考える
  - $p_1 \to a_1 \to p_2 \to a_2 \to \cdots \to a_{k-1} \to p_k$
  - $p_1, p_2, \ldots, p_k \in P$, $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1} \in A$,
  - p_1 は s-vertex, p_k は T の根（つまり s-vertex）
- S（**適格なパス**と呼ぶ）に沿って μ を**反転させる** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

  μ を以下を満たすマッチング $\widehat{\mu} = \mu \oplus S$ に変形する
  - $\widehat{\mu}(a_i) = (a_i, p_{i+1})$ for $i = 1, 2, \ldots, k-1$
  - $\widehat{\mu}(a) = \mu(a)$ for $a \neq a_1, a_2, \ldots, a_k$

片側選好：ポピュラーマッチングの数え上げ

$a_1:\quad {\color{red}p_1}\quad p_2$

$a_2:\quad p_3\quad {\color{red}p_2}$

$a_3:\quad {\color{red}p_3}\quad p_4$

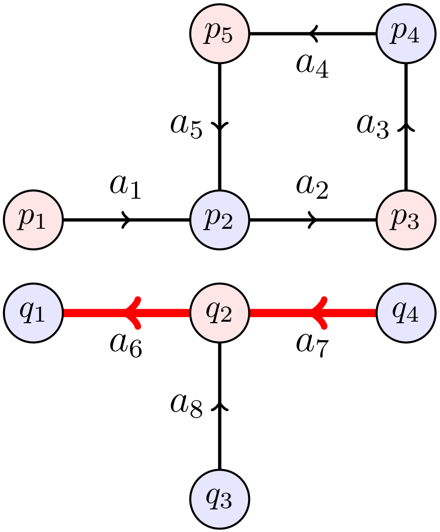
$a_4:\quad p_5\quad {\color{red}p_4}$

$a_5:\quad {\color{red}p_5}\quad p_2$

$a_6:\quad {\color{blue}q_2}\quad q_1$

$a_7:\quad q_2\quad {\color{blue}q_4}$

$a_8:\quad q_2\quad {\color{red}q_3}$



片側選好：ポピュラーマッチングの数え上げ

$a_1:\quad p_1 \quad p_2$

$a_2:\quad p_3 \quad p_2$

$a_3:\quad p_3 \quad p_4$

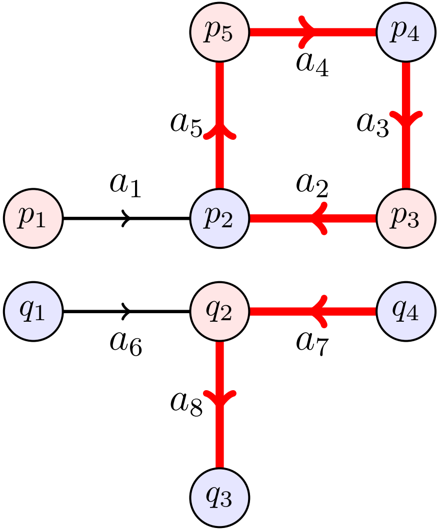
$a_4:\quad p_5 \quad p_4$

$a_5:\quad p_5 \quad p_2$

$a_6:\quad q_2 \quad q_1$

$a_7:\quad q_2 \quad q_4$

$a_8:\quad q_2 \quad q_3$



片側選好：ポピュラーマッチングの数え上げ

- Cycle component の集合 $= C_1, C_2, \ldots, C_k$
- Tree component の集合 $= T_1, T_2, \ldots, T_m$
- $\mathcal{S}(T_j) := T_j$ の中の s-vertex の数

定理 7：McDermid and Irving (2011)

ポピュラーマッチングの個数 $= 2^k \cdot \prod_{j=1}^{m} \mathcal{S}(T_j)$

- C_i に沿って反転する or しない $= 2$ 通り
- T_j 上の適格なパスの数 $= \mathcal{S}(T_j) - 1$

定理 7 の証明

演習問題 3

$\widehat{C}_1, \widehat{C}_2, \ldots, \widehat{C}_x :=$ Cycle component の部分集合

$\widehat{T}_1, \widehat{T}_2, \ldots, \widehat{T}_y :=$ Tree component の部分集合

$S_1, S_2, \ldots, S_y :=$ 各 $\widehat{T}_1, \widehat{T}_2, \ldots, \widehat{T}_y$ 上の適格なパス

$\widehat{\mu} := \widehat{C}_1, \ldots, \widehat{C}_x,\ S_1, \ldots, S_y$ に沿って μ を反転させたもの

$\implies \widehat{\mu}$ はポピュラー

- 演習問題 3 より後は逆を示せばよい

定理 7 の証明

補題 4

$\widehat{\mu}$ をポピュラーマッチング $\Longrightarrow$

ある

Cycle component の部分集合 $\widehat{C}_1, \widehat{C}_2, \ldots, \widehat{C}_x$

Tree component の部分集合 $\widehat{T}_1, \widehat{T}_2, \ldots, \widehat{T}_y$

各 $\widehat{T}_1, \widehat{T}_2, \ldots, \widehat{T}_y$ 上の適格なパス $S_1, S_2, \ldots, S_y$

が存在して

$\widehat{\mu} = \widehat{C}_1, \ldots, \widehat{C}_x, S_1, \ldots, S_y$ に沿って μ を反転させたもの

補題 4 の証明

- $\widehat{\mu}$ に対する交換グラフを考える

  $\Longleftarrow$ μ に対する D と辺の向きが違うだけ

- 以下の条件は μ および $\widehat{\mu}$ の交換グラフでも同じ
  - 各点の出次数は 1 以下
  - Tree component の根は s-vertex

- 以上よりある component の辺の向きが異なっていたら

  Cycle component $\Longrightarrow$ 閉路の向きを反転させたもの

  Tree component $\Longrightarrow$ 適格なパスに沿って反転させたもの

片側選好：最適ポピュラーマッチング

- $\mathcal{M} :=$ ポピュラーマッチングの集合
- $\mathcal{M}$ 上に以下を満たす関係 $\lesssim$ を仮定

  (O1) $\forall \mu, \sigma \in \mathcal{M}\colon\ \mu \lesssim \sigma$ and/or $\sigma \lesssim \mu$

  (O2) $\mu_1 \lesssim \mu_2,\ \mu_2 \lesssim \mu_3 \implies \mu_1 \lesssim \mu_3,$

  (O3) $e \in \mu \cap \sigma,\ \mu \lesssim \sigma \implies \mu \setminus \{e\} \lesssim \sigma \setminus \{e\}$

- $\mu \lesssim \sigma$ は多項式時間で判定可能とする
- $\lesssim$ は例えば rank-maximality, min-cost などを含む
- $\mu^* \in \mathcal{M}$ が最適 $\overset{\text{def}}{\iff} \forall \mu \in \mathcal{M}\colon \mu^* \lesssim \mu \quad \Longleftarrow$ これを求める

片側選好：最適ポピュラーマッチング

- ポピュラーマッチング μ を固定
- μ に対する交換グラフに関して
  - $C_1, \ldots, C_k$ と $T_1, \ldots, T_m$ を先程と同じように定義
  - $\mathcal{P}_j := T_j$ 上の適格なパスの集合

補題 5

$\mu \oplus C_1 \lesssim \mu$ (resp. $\mu \lesssim \mu \oplus C_1$) ならば

$\Longrightarrow$ $\exists$ 最適な $\mu^* \in \mathcal{M}$: C_1 の辺の向きが $\mu \oplus C_1$ と一致

(resp. $\exists$ 最適な $\mu^* \in \mathcal{M}$: C_1 の辺の向きが μ と一致)

補題 5 の証明

- $\mu \oplus C_1 \lesssim \mu$ の場合を証明
- 適当な最適ポピュラーマッチング μ^* を考える
- μ^* の C_1 の辺の向きが $\mu \oplus C_1$ と一致 $\Longrightarrow$ 証明完
- μ^* の C_1 の辺の向きが μ と一致していると仮定
- C_1 に制限すると μ と μ^* は同じ

  $\therefore$ (O3) より $\quad \mu^* \oplus C_1 \lesssim \mu^* \iff \mu \oplus C_1 \lesssim \mu$
- $\mu \oplus C_1 \lesssim \mu$ より $\mu^* \oplus C_1 \lesssim \mu^*$

  $\Longrightarrow$ μ^* は最適なので $\mu^* \oplus C_1$ も最適

片側選好：最適ポピュラーマッチング

- $\mu \oplus C_1 \lesssim \mu$ ならば $\mu_1 := \mu \oplus C_1$, otherwise $\mu_1 := \mu$ とする
- μ_1 と C_2 に同様の議論を適用して μ_2 を定義
- $\mu^\circ := C_1, C_2, \ldots, C_k$ に対して上を実行して得られたもの
- $\exists$ 最適な $\mu^* \in \mathcal{M}$: $C_1, \ldots, C_k$ の辺の向きが μ° と一致
- $\mathcal{M}^\circ :=$ 上の条件を満たす最適な $\mu^* \in \mathcal{M}$ の集合

補題 6

$S_1 \in \mathcal{P}_1$ が $\forall S \in \mathcal{P}_1 \colon \mu^\circ \oplus S_1 \lesssim \mu^\circ \oplus S$ を満たす

$\Longrightarrow$ $\exists$ 最適な $\mu^* \in \mathcal{M}^\circ$: T_1 の辺の向きが $\mu^\circ \oplus S_1$ と一致

補題 6 の証明

- 適当な最適ポピュラーマッチング $\mu^* \in \mathcal{M}^\circ$ を考える
- μ^* の T_1 の辺の向きは

  ある $S \in \mathcal{P}_1$ に対する $\mu^\circ \oplus S$ の T_1 の辺の向き

  と一致する
- $\widehat{\mu} := \mu^*$ の T_1 の辺の向きを $\mu^\circ \oplus S_1$ と一致させたもの
- (O3) より $\quad \widehat{\mu} \lesssim \mu^* \iff \mu^\circ \oplus S_1 \lesssim \mu^\circ \oplus S$
- $\mu^\circ \oplus S_1 \lesssim \mu^\circ \oplus S \implies \widehat{\mu} \lesssim \mu^*$

  $\implies \mu^*$ は最適なので $\widehat{\mu}$ も最適

片側選好：最適ポピュラーマッチング

- 補題 6 の条件を満たす S_1 に対して　$\mu_1^\circ := \mu^\circ \oplus S_1$ と定義
- μ_1° と T_2 に対して同様の議論を適用して μ_2° を定義
- $\mu^\bullet := T_1, T_2, \ldots, T_m$ に対して上を実行して得られたもの
- ∃ 最適な $\mu^* \in \mathcal{M}^\circ$:　$T_1, \ldots, T_m$ の辺の向きが $\mu^\bullet$ と一致
- 明らかにこのような μ^* に対して $\mu^\bullet = \mu^*$ が成り立つ

  $\Longrightarrow$　μ^* は最適なので $\mu^\bullet$ も最適
- 以上より最適ポピュラーマッチングが多項式時間で求まる
- この問題に関しては Kavitha & Nasre (2009) も参照

ポピュラー混合マッチング

- **混合マッチング**とは $P = \{(\mu_i, \alpha_i)\}_{i=1}^{k}$
  - $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ はマッチング
  - $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}_+$ かつ $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$
- 混合マッチング $P = \{(\mu_i, \alpha_i)\}_{i=1}^{k}$ と $Q = \{(\sigma_i, \beta_i)\}_{i=1}^{m}$

$$\Delta(P, Q) := \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j (|\phi(\mu_i, \sigma_j)| - |\phi(\sigma_j, \mu_i)|)$$

- 混合マッチング $P = \{(\mu_i, \alpha_i)\}_{i=1}^{k}$ が**ポピュラー** $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$\forall \text{混合マッチング } Q = \{(\sigma_i, \beta_i)\}_{i=1}^{m} : \ \Delta(P, Q) \geq 0$$

ポピュラー混合マッチング

定理 8：Kavitha et al.（2011)

ポピュラー混合マッチングは常に存在する

- $\mathbf{L}$, $\mathbf{R}$ を以下のように定義

$$\mathbf{L} := \max_{\{(\mu_i,\alpha_i)\}_{i=1}^{k}} \min_{\{(\sigma_i,\beta_i)\}_{i=1}^{m}} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j \Delta(\mu_i, \sigma_j)$$

$$\mathbf{R} := \min_{\{(\sigma_i,\beta_i)\}_{i=1}^{m}} \max_{\{(\mu_i,\alpha_i)\}_{i=1}^{k}} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j \Delta(\mu_i, \sigma_j)$$

- ポピュラー混合マッチングが存在 $\iff$ $\mathbf{L} \geq 0$

定理 8 の証明

演習問題 4

$\mathbf{L} = \mathbf{R}$

- $\mathbf{R}$ の式の右辺で $\{(\mu_i, \alpha_i)\}_{i=1}^k := \{(\sigma_i, \beta_i)\}_{i=1}^m$ とすると

$$\mathbf{R} \geq \min_{\{(\sigma_i,\beta_i)\}_{i=1}^m} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \beta_i \beta_j \Delta(\sigma_i, \sigma_j) = 0$$

- 演習問題 4 の結果より $\mathbf{L} = \mathbf{R} \geq 0$

$\Longrightarrow$ ポピュラー混合マッチングが存在 $\square$

多面体的ゼロサムゲーム

- r 個の制約からなる polytope $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}_+^d$ が与えられる

$$\mathcal{P} = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^d \mid \sum_{j=1}^{d} M_{ij} x(j) \geq b_i \quad (i = 1, \ldots, r) \right\}$$

- 2 人のプレーヤー R, C の純戦略は $\mathcal{P}$ の端点
- R が端点 x, C が端点 y を選んだ時の R (resp. C) の利得を

$$\text{payoff}(x, y) := \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} w_{ij} x(i) y(j) \qquad (\text{resp. } -\text{payoff}(x, y))$$

で定義（w_{ij} は入力として与えられる）

多面体的ゼロサムゲーム

- 混合戦略 $= \mathcal{P}$ 内の点　　（payoff も自然に拡張）

  （端点 $x_1, \ldots, x_N$ と $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$ を満たす $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}_+$）

- 混合戦略 $x \in \mathcal{P}$ が**最適戦略** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ x が以下の最適解

$$\max_{x \in \mathcal{P}} \min_{y \in \mathcal{P}} \text{payoff}(x, y) = \max_{x \in \mathcal{P}} \min_{y \in \mathcal{P}} \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} w_{ij} x(i) y(j)$$

- $\mathcal{D}_x := \left\{ \gamma \in \mathbb{R}_+^r \mid \sum_{i=1}^{r} M_{ij} \gamma(i) \leq \sum_{i=1}^{d} w_{ij} x(i) \quad (j = 1, \ldots, d) \right\}$

- $\min_{y \in \mathcal{P}} \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} w_{ij} x(i) y(j)$ の双対問題 $= \max_{\gamma \in \mathcal{D}_x} \sum_{i=1}^{r} b_i \gamma(i)$

多面体的ゼロサムゲーム

- よって最適戦略を求める問題は以下のようにかける

$$
\begin{aligned}
\text{Maximize} \quad & \sum_{i=1}^{r} b_i \gamma(i) \\
\text{such that} \quad & \sum_{i=1}^{r} M_{ij}\gamma(i) \le \sum_{i=1}^{d} w_{ij} x(i) \quad (j = 1, \ldots, d) \\
& \sum_{j=1}^{d} M_{ij} x(j) \ge b_i \quad (i = 1, \ldots, r) \\
& x \in \mathbb{R}_+^d, \; \gamma \in \mathbb{R}_+^r
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$ 最適戦略が多項式時間で求まる by Kavitha et al (2011)

ポピュラー混合マッチング

- $\mathcal{X}$ を以下を満たす $x \in \mathbb{R}_+^E$ の集合とする

$$\forall a \in A\colon \sum_{e \in E(a)} x(e) = 1, \quad \forall p \in P\colon \sum_{e \in E(p)} x(e) \leq 1$$

- $\mathcal{X}$ の端点の集合はマッチングの集合と一致する

演習問題 5

ポピュラー混合マッチングを求める問題は $\mathcal{X}$ 上の多面体的ゼロサムゲームの最適戦略を求める問題に帰着できることを示せ

片側選好：重み付きポピュラーマッチング

- 片側選好の重み付きポピュラーマッチングの設定
  - 片側選好の入力
  - 重み関数 $\omega\colon A \to \mathbb{R}_+$
- マッチング μ が**ポピュラー** $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$\forall \text{マッチング}\,\sigma\colon \sum_{a\in\phi(\mu,\sigma)} \omega(a) - \sum_{a\in\phi(\sigma,\mu)} \omega(a) \geq 0$$

- $\{\omega(a) \mid a \in A\} = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k\}$ と仮定
- $\omega(a) = \omega_i \implies a$ のランクを i とする

片側選好：重み付きポピュラーマッチング

- ランク i の $a \in A$ の f-edge と s-edge を以下のように定義
- <u>f-edge の定義</u>

  どのランク $i-1$ 以下の応募者の f-edge になっていない $E(a)$ の辺のなかで最も好ましい辺
- <u>s-edge の定義</u>

  どのランク i 以下の応募者の f-edge になっていない $E(a)$ の辺のなかで最も好ましい辺
- 注：ランク 1 の $a \in A$ の f-edge は単に最も好ましい辺

片側選好：重み付きポピュラーマッチング

- マッチング μ が **well-formed** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ μ において
  - 全ての応募者は f-edge か s-edge に割り当てられている
  - あるランク i の応募者の f-edge になっている辺はランク i の応募者に割り当てられている

演習問題 6

Well-formed だがポピュラーではないマッチングが存在する問題例を作成せよ

講演概要

1. 問題設定
2. 片側の点のみが選好を持っている場合
3. 両側の点が選好を持っている場合
4. 発展的な話題
5. **参考文献**

参考文献

1. Peter Gärdenfors. Match making: assignments based on bilateral preferences. Behavioural Science, 20: 166-173 (1975)
2. David J. Abraham, Robert W. Irving, Telikepalli Kavitha, Kurt Mehlhorn: Popular Matchings. SIAM J. Comput. 37(4):1030-1045 (2007)
3. Yen-Wei Wu, Wei-Yin Lin, Hung-Lung Wang, Kun-Mao Chao: An Optimal Algorithm for the Popular Condensation Problem. IWOCA 2013:412-422
4. David Gale, Lloyd S. Shapley: College admissions and the stability of marriage. Amer. Math. Monthly 69(1): 9-15 (1962)
5. Chien-Chung Huang, Telikepalli Kavitha: Popular matchings in the stable marriage problem. Inf. Comput. 222:180-194 (2013)
6. Telikepalli Kavitha: A Size-Popularity Tradeoff in the Stable Marriage Problem. SIAM J. Comput. 43(1):52-71 (2014)
7. David F. Manlove, Colin T. S. Sng: Popular Matchings in the Capacitated House Allocation Problem. ESA 2006:492-503

8. Naoyuki Kamiyama: The popular matching and condensation problems under matroid constraints. J. Comb. Optim. 32(4):1305-1326 (2016)
9. Naoyuki Kamiyama: Popular Matchings with Ties and Matroid Constraints. SIAM J. Discret. Math. 31(3):1801-1819 (2017)
10. Meghana Nasre, Prajakta Nimbhorkar, Nada Pulath: Classified Rank-Maximal Matchings and Popular Matchings - Algorithms and Hardness. WG 2019:244-257
11. Katarzyna E. Paluch: Popular and clan-popular b-matchings. Theor. Comput. Sci. 544:3-13 (2014)
12. Florian Brandl, Telikepalli Kavitha: Two Problems in Max-Size Popular Matchings. Algorithmica 81(7):2738-2764 (2019)
13. Naoyuki Kamiyama: Popular matchings with two-sided preference lists and matroid constraints. Theor. Comput. Sci. 809:265-276 (2020)
14. Cergely Csáji, Tamás Király, Yu Yokoi: Solving the Maximum Popular Matching Problem with Matroid Constraints. CoRR abs/2209.02195 (2022)
15. Julián Mestre: Weighted popular matchings. ACM Trans. Algorithms 10(1):2:1-2:16 (2014)

16. Klaus Heeger, Ágnes Cseh: Popular matchings with weighted voters. CoRR abs/2110.05901 (2021)
17. Péter Biró, Robert W. Irving, David F. Manlove: Popular Matchings in the Marriage and Roommates Problems. CIAC 2010:97-108
18. Yuri Faenza, Telikepalli Kavitha, Vladlena Powers, Xingyu Zhang: Popular Matchings and Limits to Tractability. SODA 2019:2790-2809
19. Sushmita Gupta, Pranabendu Misra, Saket Saurabh, Meirav Zehavi: Popular Matching in Roommates Setting is NP-hard. ACM Trans. Comput. Theory 13(2):9:1-9:20 (2021)
20. Telikepalli Kavitha: Popular Matchings with One-Sided Bias. ICALP 2020:70:1-70:18
21. Eric McDermid, Robert W. Irving: Popular matchings: structure and algorithms. J. Comb. Optim. 22(3):339-358 (2011)
22. Telikepalli Kavitha, Meghana Nasre: Optimal popular matchings. Discret. Appl. Math. 157(14):3181-3186 (2009)
23. Telikepalli Kavitha, Julián Mestre, Meghana Nasre: Popular mixed matchings. Theor. Comput. Sci. 412(24):2679-2690 (2011)