演習問題

注意：特に断りがない限り，目的関数 f(近接勾配法を考える場合は g) は L-平滑であるものとする．

1. 以下の問いに答えよ．
   (a) スライド 10 ページの狭義 2 次凸関数における正確なステップ幅を導出せよ．
   (b) 十分な降下条件と探索方向のある種の有界性（スライド 17 ページ参照）を満たす反復法を考える．直線探索において分割法と Armijo 条件を用いたとき，
   $$\bar{\alpha} > 0 \quad s.t. \quad \bar{\alpha} \le \alpha_k \quad \text{for all } k$$
   を満たす正の定数 $\bar{\alpha}$ が存在することを示せ．
   (c) 定数ステップサイズの最急降下法 $x_{k+1} = x_k - \eta\nabla f(x_k)$ を考える．このとき，$0 < \eta < \frac{2}{L}$ ならば $f(x_{k+1}) < f(x_k)$ となることを示せ．

2. 準ニュートン法に関して，以下の問いに答えよ．
   (a) 探索方向が降下方向であり，直線探索において Wolfe 条件が満たされているとき，$s_k^\top y_k > 0$ となることを示せ．
   (b) 直線探索において Wolfe 条件が満たされており，B_k が正定値対称行列であるとき，BFGS 公式によって更新された B_{k+1} も正定値対称行列となることを示せ．
   (c) 目的関数 f は 2 回連続微分可能であるとする．B_k は Dennis-Moré 条件を満たす正定値対称行列で，点列 $\{x_k\}$ は $x_{k+1} = x_k - B_k^{-1}\nabla f(x_k)$ で与えられるものとする．さらに，点列 $\{x_k\}$ が $\nabla^2 f(x^*)$ が正定値対称行列であるような局所的最適解 x^* に収束するとき，(k が十分大きいとき) その収束率は超 1 次であることを示せ．ただし，ニュートン法が x^* の近傍で 2 次収束することを使用してよいものとする．

3. 非線形共役勾配法について以下の問いに答えよ．なお，直線探索では Wolfe 条件を満たしているものとする．
   (a) DY 法について，$g_k^\top d_k = \beta_k^{DY} g_{k-1}^\top d_{k-1}$ を示せ．
   (b) $\beta_k^{HS+} = \{0, \frac{g_k^\top y_{k-1}}{d_{k-1}^\top y_{k-1}}\}$ を用いた HS+方法を考える．探索方向が十分な降下条件をみたし，さらに初期点における準位集合 $\{x | f(x) \le f(x_0)\}$ が有界である場合，HS+法は Property*を満たすことを示せ．
   (c) $\beta_k = \frac{g_k^\top y_{k-1}}{d_{k-1}^\top y_{k-1}} - \lambda \frac{\|y_{k-1}\|^2 g_k^\top d_{k-1}}{(d_{k-1}^\top y_{k-1})^2}$ とする (ただし，$\lambda > 1/4$ とする)．このとき，非線形共役勾配法は十分な降下条件を満たすことを示せ．

4. スライド 62 ページの修正メモリーレス BFGS 公式を考える．
   (a) $\det(B_k)$ と $\mathrm{tr}(B_k)$ を求めよ．ただし，$\det(I + u_1 v_1^T + u_2 v_2^T) = (1 + u_1^T v_1)(1 + u_2^T v_2) - (u_1^T v_2)(u_2^T v_1)$ を用いてよい．
   (b) B_k の固有値がスライド 62 ページに記載されているものであることを示せ．
   (c) スライド 63 ページの補題を示せ．

5. (a) スライド 77 ページの命題の (A) を示せ．
   (b) スライド 77 ページの命題の (B) を示せ．
   (c) スライド 78 ページの命題の必要条件「x_k が停留点ならば $d_k = 0$ である」を示せ．

6. 関数 g は 2 回連続微分可能で，かつ $\nabla^2 g$ がリプシッツ連続であるとする．ステップサイズを 1 とし，$B_k = \nabla^2 f(x_k)$ としたニュートン型近接勾配法，つまり，

$$x_{k+1} = \mathrm{Prox}_h^{\nabla^2 g(x_k)}(x_k - \nabla^2 g(x_k)^{-1} \nabla g(x_k))$$

を考える．このとき，点列 $\{x_k\}$ が $\nabla^2 g(x^*)$ が正定値対称行列であるような局所的最適解 x^* に収束するならば，(k が十分大きいとき) その収束率は 2 次であることを示せ．ただし，正定値対称行列 A に対して

$$\|\mathrm{Prox}_h^A(x) - \mathrm{Prox}_h^A(y)\|_A \leq \|x - y\|_A$$

を用いてよい．