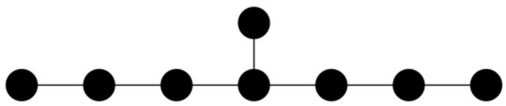
最適化セミナー 演習問題

次の各問いに答えよ。尚、問題文中の用語の定義については、講義資料を参照せよ。

1. G を位数 $n \geq 4$ の 2 連結グラフとし、G の任意の 4 頂点に $1, -1$ を二つずつ、かつ、残りの頂点にそれぞれ 0 を配置する重み付きグラフ (G, ω) を考える。このとき (G, ω) から、各分割のサイズが $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ 以下となるような balanced decomposition が必ず得られることを示せ。尚、2 連結グラフ G に対して $f(G) = \lfloor n/2 \rfloor + 1$ であることは既知のため、その結果を利用してはならないが、講義で説明した $f(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor + 1$ である事実や 2 連結グラフの構造でよく知られている事実は利用して良いこととする。
2. 下図のような位数 8 の木の上で講義で紹介したコインを取り合うゲームを行うとき、任意のコイン配置に対して先手必勝であることを示せ。尚、任意の偶数位数の木においてこのゲームが先手必勝であることは既知のため、その結果を利用してはならない。但し、位数 6 以下の木やパスの場合にこのゲームは先手必勝である事実を利用して良いこととする。



3. n を自然数とし、$2n+1$ 個の自然数からなる数列 $b_1, a_1, b_2, a_2, \ldots, a_{n-1}, b_n, a_n, b_{n+1}$ が $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して $a_i \geq \max\{b_i, b_{i+1}\}$ を満たすとき、次の不等式が成り立つことを示せ。
$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n+1} b_i}{n+1}$$
4. 位数 7 のパス $P_7 = v_1 v_2 \ldots v_7$ において、$\{v_2, v_4, v_6\}$ が $\omega(v_2) + \omega(v_4) + \omega(v_6) = 21$ を満たし、かつ、(P, ω) における唯一の最小安全集合であるような重み付きパス (P_7, ω) を構成せよ。
5. G が木であるとき、$cs(G) \leq 2s(G) - 1$ が成り立つことを示せ。
6. 位数 n の連結グラフ G が次数 $n-1$ の頂点を含むとき、$G \in \mathcal{G}^{cs}$ であることを示せ。
7. G を位数 5 以上の連結グラフとする。G の任意の非隣接 2 頂点 u, v に対して $G - \{u, v\}$ が非連結であるならば、G はサイクルか完全グラフであることを示せ。