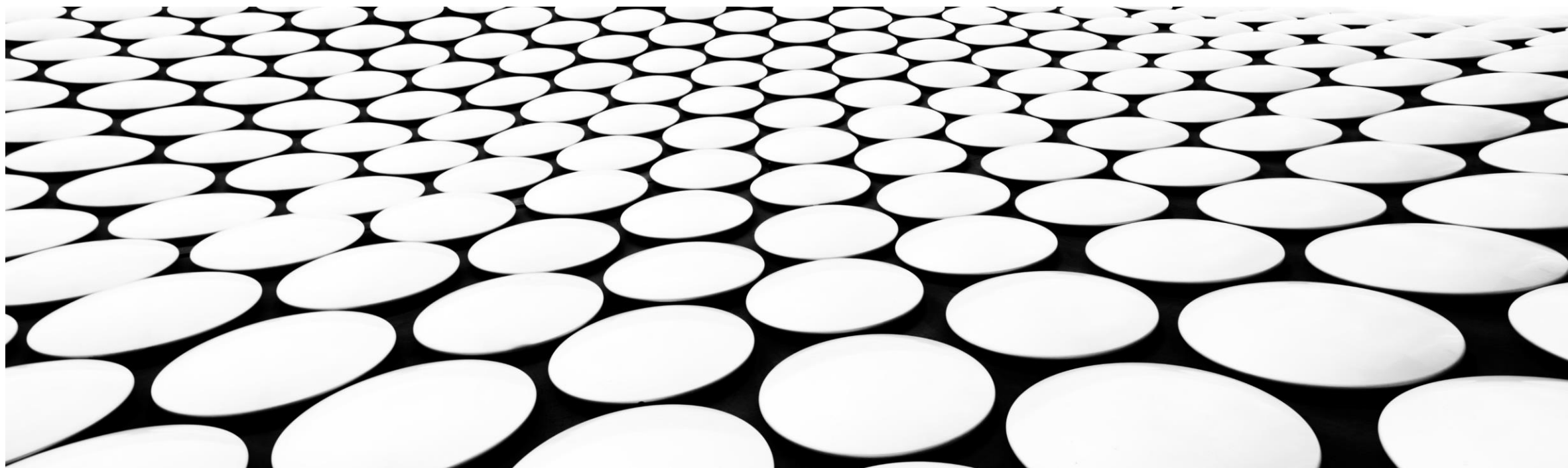


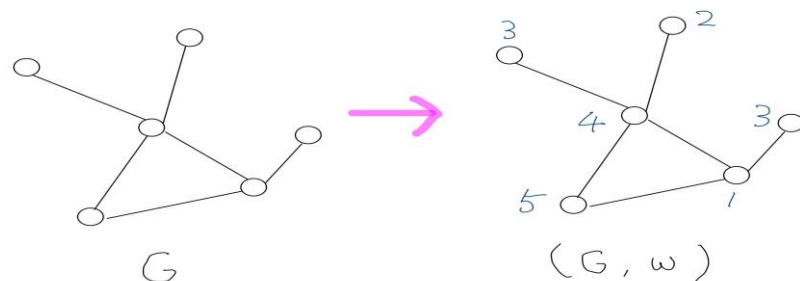
整数重みの組合せに着目したグラフの構造解析

藤田慎也（横浜市立大学）



本講義で考えたい問題：

- 与えられた有限無向単純グラフ G について、各頂点に整数重みを割り当てた重み付きグラフ (G, w) を考える。



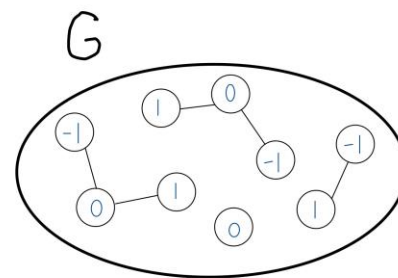
- このとき、単に与えられた一つの重み付きグラフ (G, w) のみを考えるのではなく、様々なバリエーションの $w: V(G) \rightarrow \mathbf{Z}$ を考えて、そうした任意の w に対する (G, w) が、ある共通の性質 $Q(G, w)$ を持つと仮定し、そのグラフ G のもつ構造 $P(G, w)$ を考察したい。
- ※それから、上の趣旨とは若干ずれるかもしれないが、関連する面白そうな話題も紹介予定。

【例 1】 $W : V(G) \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ かつ、重み総和 $W(G) = 0$ の場合

- 性質 $Q(G, w)$ として、「 $-1, 1$ の任意の配置に対して、必ず -1 と 1 からなるマッチングで重み 0 以外の頂点を被覆できる」と設定すると、そのような「 G は完全グラフに限る」という性質 $P(G, w)$ が得られる。逆も成り立つため、 $Q(G, w)$ は完全グラフの特徴付けを与えている。
- 一方で、性質 $Q(G, w)$ を少し弱めて

「 $-1, 1$ の任意の配置に対して、必ず -1 と 1 のマッチングと $-1, 0, 1$ の重み順からなる3点パスで重み 0 以外の頂点を被覆できる」

という性質 $Q'(G, w)$ を考えた場合、 G としてどのような構造が保証されるだろうか？



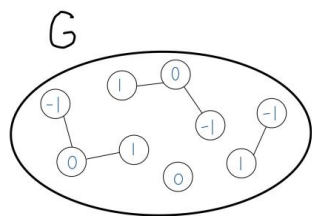
【例 1】 $W : V(G) \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ かつ、重み総和 $W(G) = 0$ の場合

- 性質 $Q(G, w)$ として、「 $-1, 1$ の任意の配置に対して、必ず -1 と 1 からなるマッチングで重み 0 以外の頂点を被覆できる」と設定すると、そのような「 G は完全グラフに限る」という性質 $P(G, w)$ が得られる。逆も成り立つため、 $Q(G, w)$ は完全グラフの特徴付けを与えている。
- 一方で、性質 $Q(G, w)$ を少し弱めて

$Q'(G, w)$: 「 $-1, 1$ の任意の配置に対して、必ず -1 と 1 のマッチングと $-1, 0, 1$ の重み順からなる 3 点パスで重み 0 以外の頂点を被覆できる」という性質 $Q'(G, w)$ を考えた場合、 G としてどのような構造が保証されるだろうか？

この場合、グラフ G の位数を n とおくと G は $\lfloor n/2 \rfloor$ 連結であることが知られており、 $\lfloor n/2 \rfloor$ 連結であれば逆も成り立つことが簡単に示せるため、性質 $Q'(G, w)$ は $\lfloor n/2 \rfloor$ 連結グラフの特徴付けを与えていることが分かる。（※連結グラフ G において、どの $k - 1$ 頂点を取り除いても連結であるとき、 G は k 連結であるという。）

【参考文献】 S.Fujita, H. Liu : *The Balanced Decomposition Number and Vertex Connectivity*, SIAM J. Discrete Math. Vol.24 (2010)



【例 2】 $W:V(G)\rightarrow Z$ による G 上で「頂点を取り合うゲーム」の先手必勝性

- ゲームのルール： G を偶数位数の連結グラフとし、**連結性を維持しながら**先手・後手が交互に (G,w) 上の点を取り合い、合計重みの多い方を勝ちとする。ただし、**引き分けは先手の勝ち**とする。
- G がパスであればいかなる (G,w) においても先手必勝

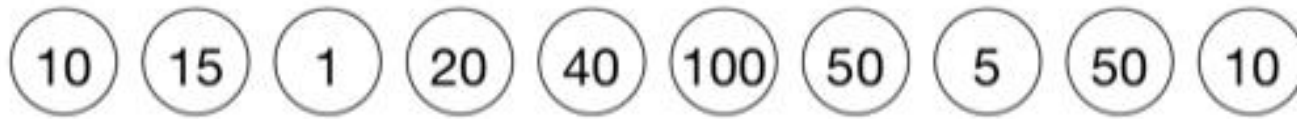


パスの場合は、次スライドで紹介する「コインを取り合うゲーム」と等価

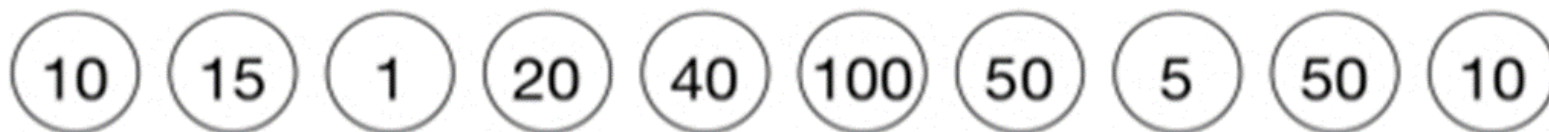
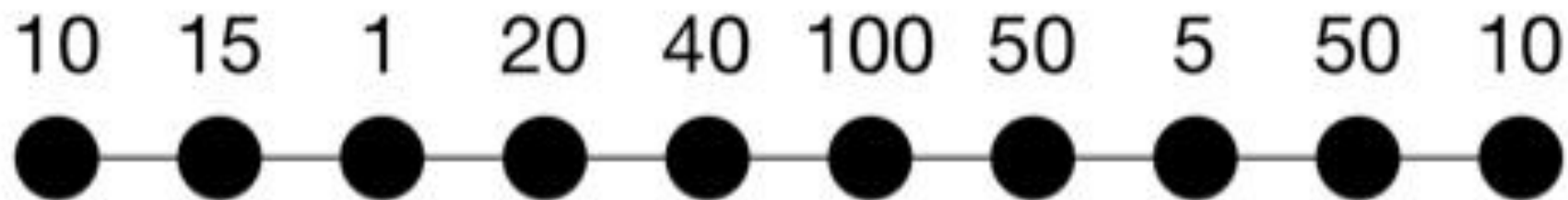
コインを取り合うゲーム：

【ゲームのルール】

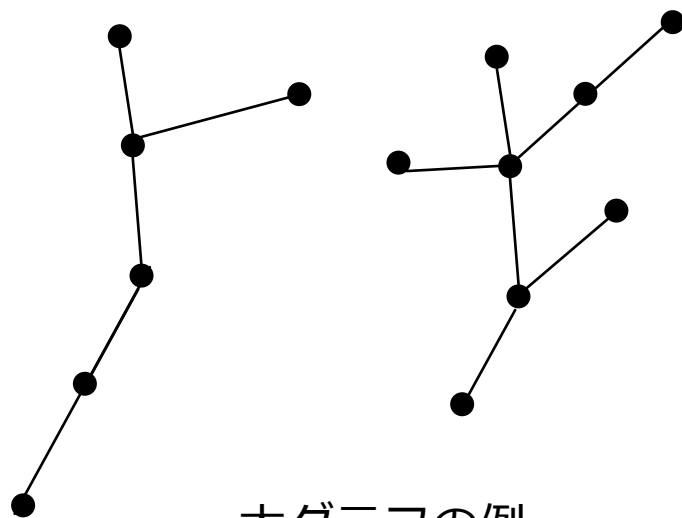
偶数個のコインが1列に並べられて、先手・後手が両端の好きな方から交互に取って行って合計価値の高い方を勝ちとする。



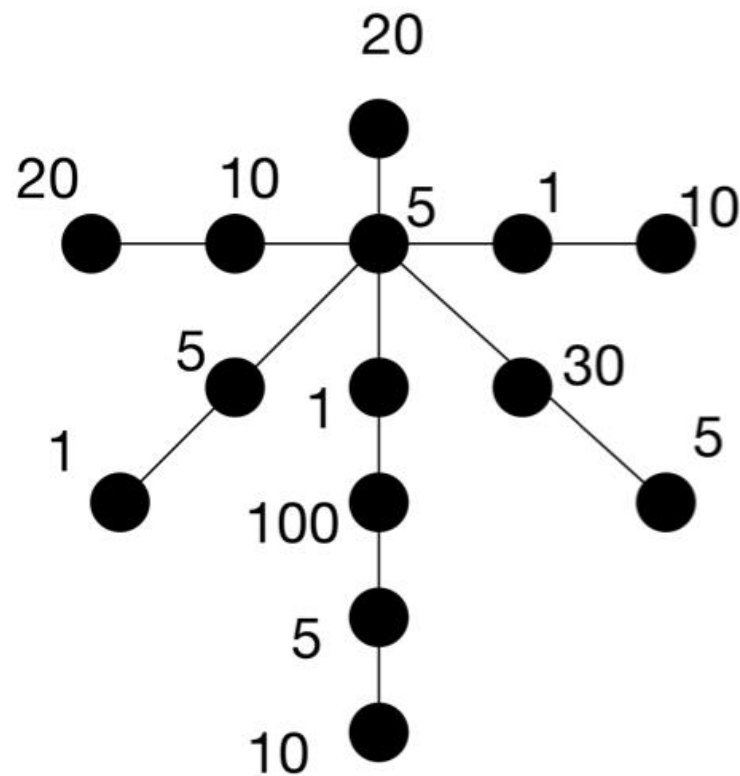
このゲームは、偶数点からなる道状のグラフで重み付き点を両端から取り合うゲームと等価である



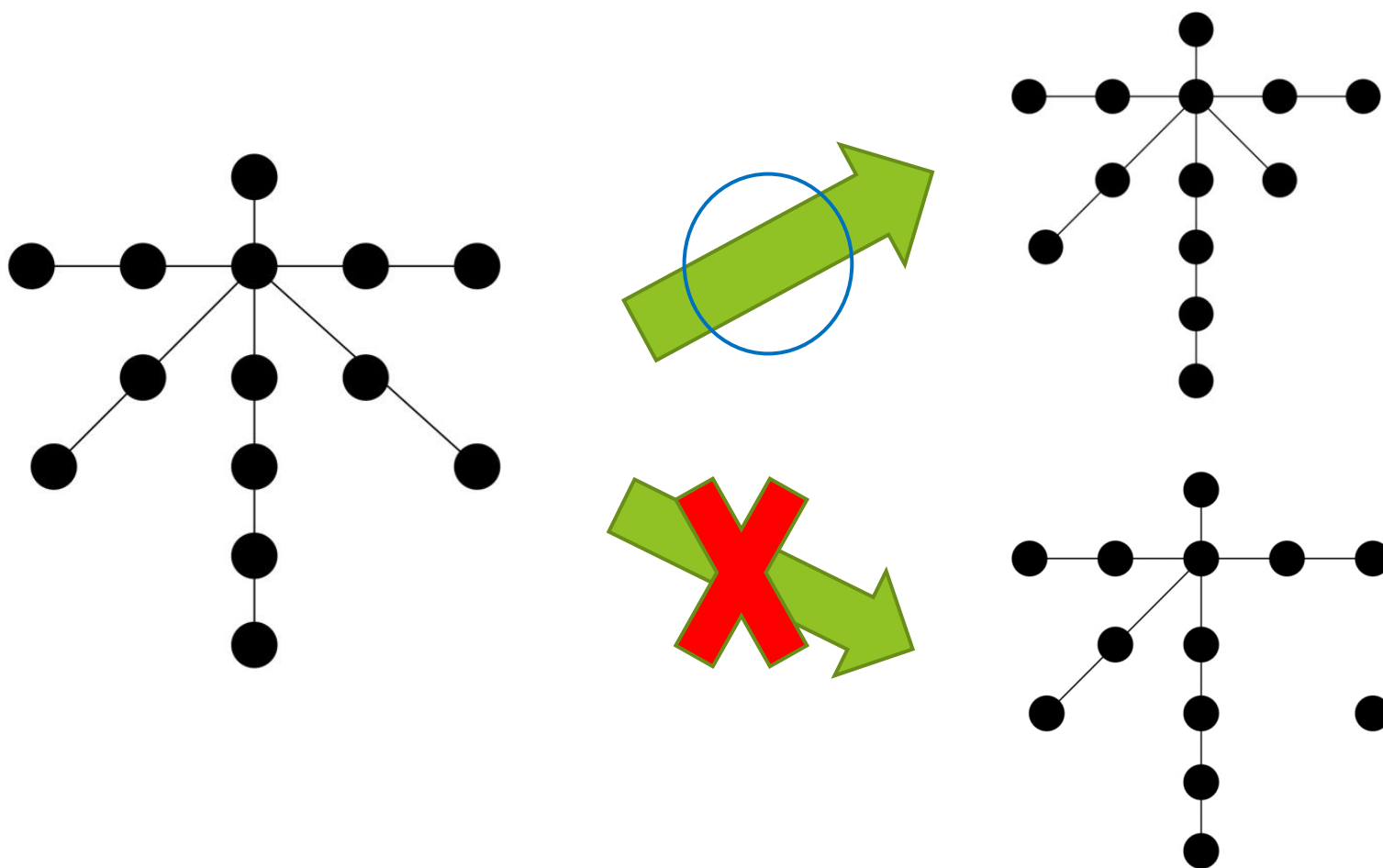
このゲームは、偶数点からなる任意のグラフの木で同様に拡張できる



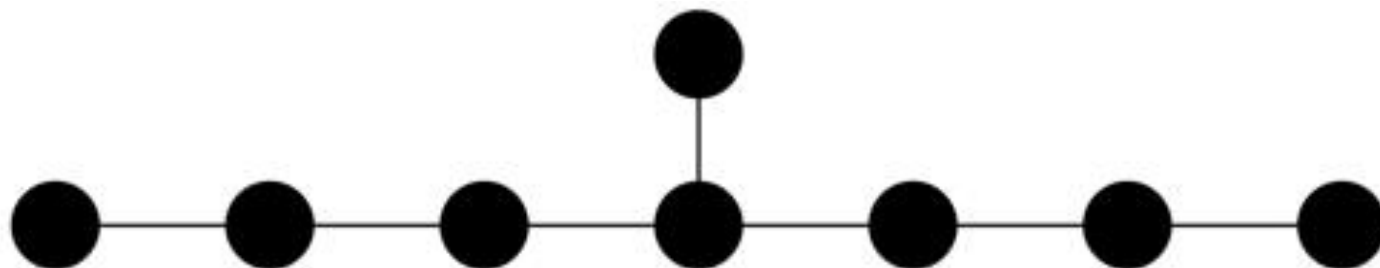
木グラフの例



【注意】 木へ拡張したゲームとは、
「木の連結性を保ちながら点をとっていく」というルールの意味である



例えば、次のような 8 点からなる木においてこのゲームを考えた場合、
「点の任意の重み付けに対して先手必勝」である。
しかし、これを証明するのはパスの場合に比べると格段に難しくなる。



【演習問題】 このことを示せ。

【例 2】 $W:V(G)\rightarrow Z$ による G 上で「頂点を取り合うゲーム」の先手必勝性

- ゲームのルール： G を偶数位数の連結グラフとし、**連結性を維持しながら**先手・後手が交互に (G,w) 上の点を取り合い、合計重みの多い方を勝ちとする。ただし、**引き分けは先手の勝ち**とする。
- G が偶数位数のパスであればいかなる (G,w) においても先手必勝
- 未解決問題：「任意の整数重み w に対する (G,w) において、必ず先手必勝となるようなグラフ G を特徴付けよ」
- 予想：「 G が偶数位数の連結二部グラフであれば先手必勝である」

定理 (Seacrest, Seacrest 2012)：「 G が偶数位数の木であれば先手必勝である」

【参考文献】 D. Seacrest, T. Seacrest : *Grabbing the gold*. Discrete Math. 312 (2012)

- この話題に関する最新の研究論文として、下記を挙げておく。

【参考文献】 M. Doki, Y. Egawa, N. Matsumoto: *Graph grabbing game on graphs with forbidden subgraphs*. Discuss. Math. Graph Theory 171 (2024)

【例 3】 $W:V(G)\rightarrow Z$ による G 上で「隣接優位性」をもつ頂点部分集合

- 与えられた重み付きグラフ (G, w) の頂点部分集合 S が**隣接優位性**をもつとは、 S で誘導される部分グラフ $G[S]$ の成分 C と $G-S$ の成分 D が隣接するとき成分の重み和について「 $w(C) \geq w(D)$ 」が成り立つことを言う。※後に S を**重み付き安全集合**と言い換える。重み付き安全集合の概念は次の論文で提起された。

【参考文献】 R.B. Bapat, S.Fujita, S. Legay, Y. Manoussakis, Y. Matsui, T. Sakuma, Z. Tuza:

Safe sets, network majority on weighted trees. *Networks* 71 (2018)

尚、この論文以前に、グラフの**安全集合**の概念は次の論文で提起された。

【参考文献】 S.Fujita, G. MacGillivray, T. Sakuma: *Safe set problems on graphs.* *Discrete Appl. Math.* 215 (2016)

- 隣接優位性をもつ頂点部分集合 S たちのなかで重みの総和 $w(S)$ が最小の S を最小安全集合と呼ぶことにする。
- 隣接優位性の性質についてはそれ自体面白い概念だと思うので、演習問題で関連する数列の問題を挙げておく。
- ここでの中心的問題は、性質 $Q(G, w)$ として、「任意の w に対して、 $G[S]$ が連結であるような最小安全集合 S が存在する」とおくと、「 $Q(G, w)$ を満たすグラフはどのような構造を持つか？」という問いであり、講演後半は主にこの問題について議論する。

グラフの安全集合に関する補足：

- グラフの安全集合の概念については、理論・応用様々な方向から研究が進められている。
- 詳細は割愛するが、下記の参考文献にあるような有向グラフ版への拡張や数値実験的な研究も展開されている。

【参考文献】

- Y. Bai, J. Bang-Jensen, S. Fujita, H. Ono, A. Yeo: *Safe sets and in-dominating sets in digraphs*. *Discrete Appl. Math.* 346 (2024)
- A. Boggio Tomasaz, R. Cordone, P. Hosteins: *Constructive-destructive heuristics for the safe set problem*.
Computers & Operations Research 159 (2023)
- A. F. U. Macambira, L. Simonetti, H. Barbalho, P. H. Gonzalez, N. Maculan: *A new formulation for the safe set problem on graphs*. *Computer & Operations Research* 111 (2019)

グラフのBALANCED DECOMPOSITION NUMBERの研究紹介

- 例 1 の問題の研究背景は、次の論文で提起したグラフのBalanced decompositionという概念に由来する。

【参考文献】 S. Fujita, T. Nakamigawa: *Balanced decomposition number of a vertex-colored graph.*

Discrete Appl. Math. 156 (2008)

- 連結グラフ G が $w: V(G) \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ による重み付きグラフ (G, w) で重み和 $W(G)=0$ の頂点分割 $V_1, \dots, V_t$ ($|V_1| \geq \dots \geq |V_t|$ とおく)が次の条件を満たすとき、この分割を (G, w) のbalanced decomposition(略してb.d)と呼ぶことにする。
- 【条件】 各 V_i で誘導される重み付きグラフ $G[V_i]$ が連結で、かつ、 $G[V_i]$ において重み和が0であること。
- 考察対象の (G, w) は、 $V(G)$ 自身をbalanced decompositionとみなせるため、 $V_1 = V(G)$ として (G, w) のb.dは存在する。
- 与えられた (G, w) のすべてのb.dで $|V_1|$ が最小となるb.dを考え、 $f(G, w) = \min\{|V_1| : V_1, \dots, V_t \text{は}(G, w)\text{のb.d}\}$ とおく。
- さらに、 $f(G) = \max \{f(G, w) \mid w: V(G) \rightarrow \{-1, 0, 1\} \text{ \& } W(G)=0\}$ と定義する。
この $f(G)$ を G の balanced decomposition number と呼ぶ。

Gがサイクルのときの証明

- ここでは $f(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor + 1$ の証明について紹介する。
- C_n 上の直径を実現する2頂点にそれぞれ $+1$ 、 -1 を配置することにより、 $f(C_n) \geq \lfloor n/2 \rfloor + 1$ が確かめられる。
- 従って、 $f(C_n) \leq \lfloor n/2 \rfloor + 1$ を示せばよい。
- C_n の頂点が閉路上 $v_1, \dots, v_n$ のように並んでいるとし、 $p = \lfloor n/2 \rfloor$ とおくことにする。各 v_j から p 個の点を含む閉路の区間を I_j とおくことにする。与えられた G の b.d に対して、 $V[+1]$ で $+1$ が配置された G の点集合とし、 $V[-1]$ で -1 が配置された点集合とする。
- 各 $j=1, 2, \dots, n$ に対して、 $g(j) = |I_j \cap V[+1]| - |I_j \cap V[-1]|$ と定める。
- ある j に対して $g(j)=0$ が成り立つとき、 I_j と $C_n - I_j$ が所望の b.d となる。従って、どの j に対しても $g(j) \neq 0$ であると仮定して良い。
- ここで $g(j)$ の定め方から、各 j について (mod n 上で) $|g(j) - g(j-1)| \leq 2$ が成り立つ。
- また、どの ± 1 が配置された点も区間 I_j の導入により、ちょうど p 回呼び出されていることから、 $\sum g(j) = 0$ が成り立つ。
- 従って、対称性より、 $g(1) = -1$, $g(2) = +1$ と仮定して良い。このとき、 $w(v_1) = -1$ である。
- すると、 $U = I_2 \cup v_1$ とおくと、 U と $C_n - U$ が所望の b.d を構成する。(Q.E.D)

グラフのBALANCED DECOMPOSITION NUMBERの研究紹介

- このサイクルの結果は、下記の当該分野に関する最初の論文で示された。この結果から、グラフ G が2連結であれば $f(G)$ の上界として $f(G) \leq \lfloor n/2 \rfloor + 1$ が成り立つのではないかとこの予想が提案されていた。

【参考文献】 S. Fujita, T. Nakamigawa: *Balanced decomposition number of a vertex-colored graph*.

Discrete Appl. Math. 156 (2008)

- 後にこの予想は、Chang, Narayananによって肯定的に解決された。

【参考文献】 G.J. Chang, N. Narayanan: *On a conjecture on the balanced decomposition number*. Discrete Math. 313 (2013)

- 一方、 $f(G) \leq 3$ が G が $\lfloor n/2 \rfloor$ 連結であるための必要十分条件であることを示したFujita, Liu(SIDMA 2010)の定理の簡潔な別証明が下記の二つの論文で示されている。

【参考文献】 H-C. Hsu, G.J. Chang: *Graphs with small balanced decomposition numbers*. J. Comb. Optim. 28 (2014)

【参考文献】 T. Sakuma: *On the balanced decomposition number*. Graphs and Combin. 31 (2015)

- 当該分野の研究について、他に目立った進展はなさそうである。 $f(G)=4$ を満たすグラフを特徴付ける問題などは面白いかもしれない。