主双対内点法
その始まりから今日まで
Part II：内点法写像の同相性

吉瀬章子
筑波大学システム情報系

組合せ最適化セミナー（COSS）　2024 年 8 月 8 日

目次

目次

対称錐上の錐最適化問題:

$$\text{最小化}\ \langle c, x\rangle \quad \text{制約}\ Ax = b, x \in K$$

ただし

- 実数体上のベクトル空間 V と内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$
- 線形写像 $A : V \to \mathbb{R}^m,\ b \in \mathbb{R}^m,\ c \in V$
- 閉凸錐 $K \subseteq V$:
  - 1980 年代 非負象限 $\Rightarrow$ 線形計画問題
  - 1990 年代 半正定値対称行列錐，2 次錐 $\Rightarrow$ SDP，SOCP
  - 2000 年代 対称錐，等質錐，双曲錐 $\Rightarrow$ 錐最適化問題

対称行列全体からなる集合について

- 通常の行列の積 AB について閉じていない
- 双線形な積 $A \circ B = (AB + BA)/2$ については閉じている

$\Longrightarrow$ (Euclid 的) Jordan 代数

Jordan, Neumann and Wigner
On algebraic generalization of the quantum mechanical formalism
Annals of Mathematics 36 (1934) 29–64

- **Jordan 代数**

ベクトル空間 V と，V 上の双線形な積 $(x, y) \mapsto x \circ y$ による代数系 $(V, \circ)$

$$\begin{cases} x \circ y = y \circ x, \\ x \circ (x^2 \circ y) = x^2 \circ (x \circ y) \ \text{ただし}\ x^2 = x \circ x. \end{cases}$$

- **Jordan 代数が，Euclid 的であるとは** [Koecher 1999, Alizadeh 2012])
  - $x^2 + y^2 = 0 \implies [x = 0,\ y = 0]$
  - あるいは等価に，$\exists$ 内積：$\langle x \circ y, z \rangle = \langle y, x \circ z \rangle$
  - あるいは等価に，$\mathrm{tr}(x \circ y)$ ($x \circ y$ の最小多項式の第 1 係数) が対称かつ正定値

$\implies \langle x, y \rangle = \mathrm{tr}(x \circ y)$ と定義できる

- $(V, \circ)$ の対称錐（の閉包）$K \subset V$：

自己双対な閉凸錐かつ, 等質（以下の自己同型群の元 G が存在）：

$$\forall x, y \in \mathrm{int}K,\ \exists G : V \to V\ (\text{可逆な線形変換}),\ G(K) = K, G(x) = y$$

対称錐について以下の性質が知られている：

- $K = \{x \circ x \mid x \in V\} = K^*$
- $\forall (x, y) \in K \times K, [\langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow x \circ y = 0]$
- Euclid 的 Jordan 代数に対して対称錐は唯一存在し，その逆もなりたつ
- 「障壁関数の自己整合性（$\approx$ 内点法の多項式時間性）による凸錐の特徴づけ」 [Nesterov and Todd 1997] と一致する [Hauser and Güler 2002]

- 対称錐は以下の５つの錐とそれらの直積としてのみ与えられる
  [Jordan, Neumann and Wigner 1934, Faraut and Korányi 1994]

  (1) n 次元 2 次錐
  (2) 実数を要素とする $n \times n$ 半正定値対称行列錐
  (3) 複素数を要素とする $n \times n$ 半正定値 Hermite 行列錐
  (4) 四元数を要素とする $n \times n$ 半正定値 Hermite 行列錐
  (5) 八元数を要素とする 3×3 半正定値 Hermite 行列錐

- $\mathbb{R}^n$ における非負象限は，1×1 半正定値対称行列錐の n 個の直積で与えられる対称錐

錐最適化で取り上げられることが多い代表的な対称錐：

- $\mathbb{R}^n$ における非負象限

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0 \; (i = 1, 2, \ldots, n)\}$$

- $n \times n$ 半正定値対称行列錐

$$S^n_+ = \{n \times n \text{ 対称行列 } X \mid \forall x \in \mathbb{R}^n,\; d^T X d \geq 0\}$$

- n 次元 2 次錐 Q^n

$$Q^n = \left\{ x = (x_0, \bar{x}) \in \mathbb{R}^n \mid \|\bar{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2} \leq x_0 \right\}$$

対称錐の例１：$n \times n$ 半正定値対称行列錐 S_+^n

$$K = S_+^n = \{X \in S^n \mid X \succeq 0\}$$

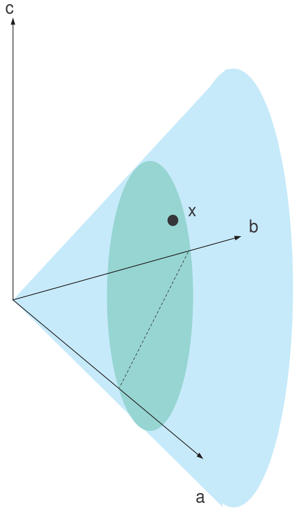
- 双線形積 $\circ$：$X \circ Y = (XY + YX)/2$
- 等質性を保証する自己同型群の元 G：$X, Y \in \mathrm{int} K$ に対して，標準形 $P^T XP = \Lambda, Q^T YQ = \Omega$ であるとき

$$G(Z) = (Q\Omega^{1/2}\Lambda^{-1/2}P^T)Z(P\Lambda^{-1/2}\Omega^{1/2}Q^T)$$

  とすれば，$G : V \to V$ は可逆な線形変換であり，$G(K) = K, G(X) = Y$
- 最小多項式の第 1 係数：$\mathrm{tr}(X) = \mathrm{Tr}(X)$
- 最小多項式の定数項：$\det(x) = \mathrm{Det}(X)$

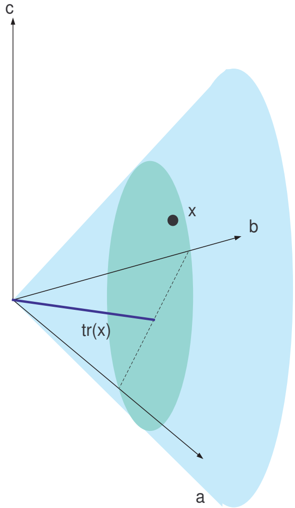
$$K = \left\{ (a,b,c) \;\middle|\; \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \succeq O \right\} = \{(a,b,c) \mid a, b \geq 0,\ ab - c^2 \geq 0\}$$

$$(a+b=1, ab-c^2 \geq 0 \implies (a-1/2)^2 + c^2 \leq 1/4)$$



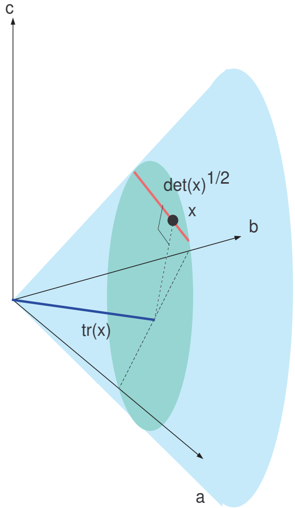
$$K = \left\{ (a,b,c) \;\middle|\; \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \succeq O \right\} = \{(a,b,c) \mid a,b \geq 0,\ ab - c^2 \geq 0\}$$

$$(a + b = 1, ab - c^2 \geq 0 \implies (a - 1/2)^2 + c^2 \leq 1/4)$$



$$K = \left\{ (a,b,c) \;\middle|\; \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \succeq O \right\} = \{(a,b,c) \mid a, b \geq 0,\ ab - c^2 \geq 0\}$$

$$(a+b=1, ab-c^2 \geq 0 \implies (a-1/2)^2 + c^2 \leq 1/4)$$



対称錐の例２：$\mathbb{R}^n$ における非負象限 $\mathbb{R}^n_+$

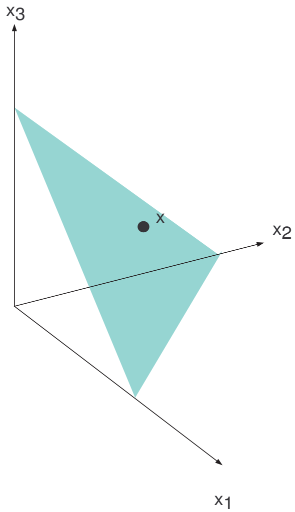
$$K = \mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0\}$$

- 双線形積 $\circ$：$x \circ y = (x_1y_1, x_2y_2, \cdots, x_ny_n)$
- 等質性を保証する自己同型群の元 G：$x, y \in \mathrm{int}K$ に対して，

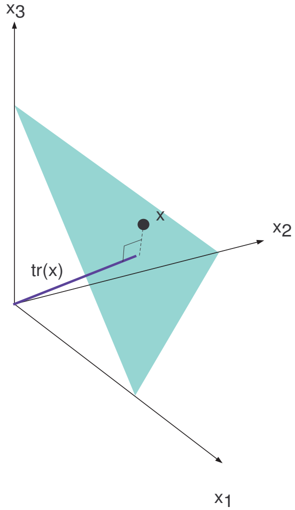
$$G = \mathrm{diag}\,\{y_i/x_i\}$$

  とすれば，$G : V \to V$ は可逆な線形変換であり，$G(K) = K, G(x) = y.$
- 最小多項式の第 1 係数 n 個の和：$\mathrm{tr}(x) = \sum_{i=1}^n x_i$
- 最小多項式の定数項 n 個の積：$\det(x) = \prod_{i=1}^n x_i$

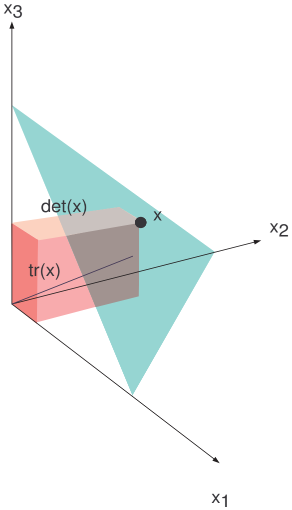
$$K = \mathbb{R}^3_+ = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \geq 0\}$$



$$K = \mathbb{R}^3_+ = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \geq 0\}$$



$$K = \mathbb{R}^3_+ = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \geq 0\}$$



対称錐の例３：n 次元 2 次錐 Q^n　$\bar{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ として，

$$K = Q^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|\bar{x}\| \leq x_0\}$$

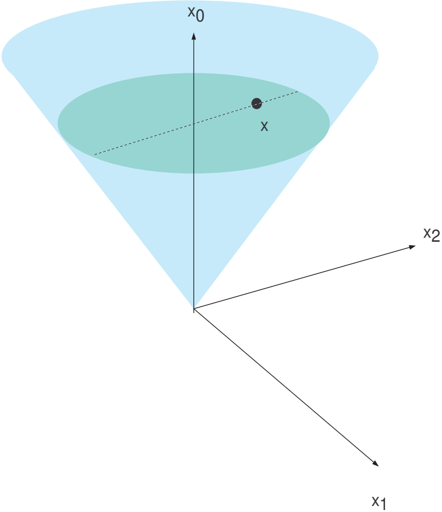
- 双線形積 $\circ$：$x \circ y = (x_0 y_0 + \bar{x}^T \bar{y},\ x_0 \bar{y} + y_0 \bar{x})$
- 等質性を保証する自己同型群の元 G：$x, y \in \mathrm{int} K$ に対して，

$$G = \beta \begin{pmatrix} \alpha & z^T \\ z & I + \frac{zz^T}{1+\alpha} \end{pmatrix}$$

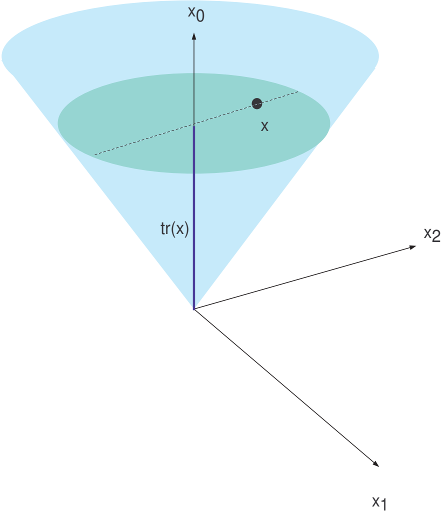
とすれば，$G(K) = K, G(x) = y$ である $\alpha > 0, \beta > 0, z$ が定まる．

- 最小多項式の第 1 係数：$\mathrm{tr}(x) = 2x_0$
- 最小多項式の定数項：$\det(x) = x_0^2 - \|\bar{x}\|^2$

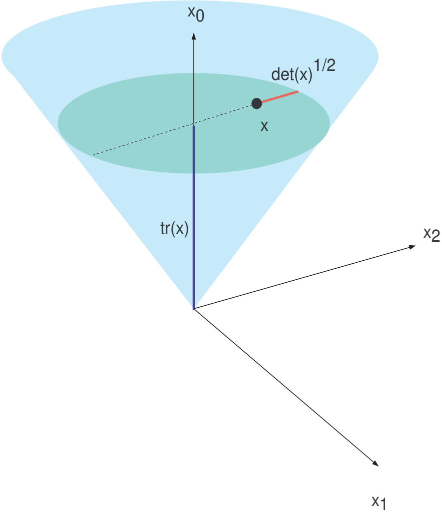
$$K = Q^3 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \le x_0 \right\}$$



$$K = Q^3 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \le x_0 \right\}$$



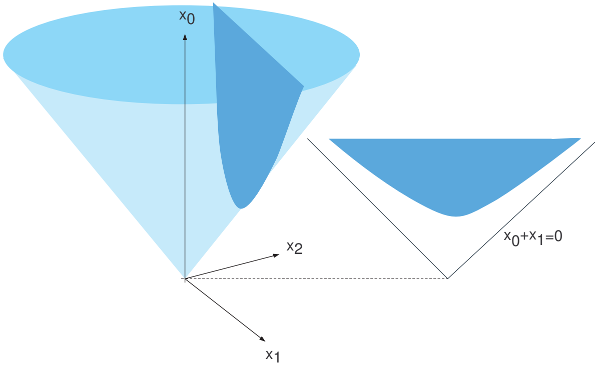
$$K = Q^3 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \le x_0 \right\}$$



目次

1. 基本定理がなりたたない (有界な最適値 $\not\Rightarrow$ 最適解の存在)

$$
\begin{aligned}
&\inf\left\{x_0 + x_1 \mid x_2 = 1,\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \le x_0\right\} \\
=\ &\inf\left\{x_0 + x_1 \mid (x_0 + x_1)(x_0 - x_1) \ge 1,\ x_0 \ge 0\right\} = 0
\end{aligned}
$$



2. 線形計画問題に対する双対定理は（必ずしも）なりたたない

線形計画問題の強双対定理

Dual \ Primal	feasible	infeasible
feasible	primal-dual opt. sol.	dual unbounded
infeasible	primal unbounded	primal-dual infeasible

2. 線形計画問題に対する双対定理は（必ずしも）なりたたない
双対定理を導く２つの鍵：

(1) 凸多面体 K と線形写像 A について，$A(K)$ は常に閉凸集合
(2) 分離超平面定理

2. 線形計画問題に対する双対定理は（必ずしも）なりたたない
対称錐 K について，$A(K)$ は凸であるが, 必ずしも閉ではない

$$K = \left\{ (a,b,c) \;\middle|\; \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \succeq O \right\} = \{(a,b,c) \mid a,b \geq 0,\ ab - c^2 \geq 0\}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

とすれば，

$$[A_1, A_2](K) = \{(a, 2c) \mid a,b \geq 0,\ ab - c^2 \geq 0\}$$

このとき下記の点列は

$$\{(1/k, 2) \mid k = 1, 2, \ldots, \} \subseteq [A_1, A_2](K)$$

だがその集積点は

$$(0,2) \notin [A_1, A_2](K)$$

であり，$[A_1, A_2](K)$ は閉ではない

2. 線形計画問題に対する双対定理は（必ずしも）なりたたない

錐最適化問題の双対定理

Primal

Dual		feasible		infeasible	
		strictly fesible	others	asympt. feasible	others
feasible	strictly fesible	primal dual opt.sol.	primal opt.sol		dual unbounded
	others	dual opt.sol.			
infeasible	asympt. feasible			primal dual infeasible	
	others	primal unbouded			

目次

- 閉凸錐 K 上の主双対錐最適化問題 を考える：

$$\begin{aligned}&(\mathrm{P})\ \alpha_{\mathrm{P}} := \inf\{\langle c, x\rangle \mid Ax = b,\ x \in K\},\\ &(\mathrm{D})\ \alpha_{\mathrm{D}} := \sup\{b^T z \mid A^T z + y = c,\ y \in K\}.\end{aligned}$$

ただし，$A : V \to \mathbb{R}^m$ は線形作用素，$b \in \mathbb{R}^m$， $c \in V$

- このとき以下の双対定理が成り立つ [Renegar 2001]

定理 3.1 (錐最適化の双対定理 [Renegar 2001])

- 双対問題 (D) が強実行可能 （$y \in \mathrm{int}K$ である実行可能解が存在) かつ
主問題 (P) が実行可能 $\Longrightarrow$ 主問題 (P) は最適解をもつ
- 主問題 (P) が強実行可能（$x \in \mathrm{int}K$ である実行可能解が存在）かつ
双対問題 (D) が実行可能 $\Longrightarrow$ 双対問題 (D) は最適解をもつ
- いずれの場合も $\alpha_P = \alpha_D$ をみたす．

- 任意の (P) の実行可能解 x と双対問題 (D) の実行可能解 (y, z) について以下がなりたつ：

$$\langle c, x\rangle - b^T z = \langle A^T z + y, x\rangle - (Ax)^T z = \langle y, x\rangle \geq 0$$

（最後の不等式は対称錐 K の自己双対性と $x \in K$， $y \in K$ より）

- ここで以下を定義し

$$P := \begin{pmatrix} O \\ A \end{pmatrix},\ Q := \begin{pmatrix} I \\ O \end{pmatrix},\ R := \begin{pmatrix} A^T \\ O \end{pmatrix},\ a := \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix}$$

- $F(x, y, z) = Px + Qy + Rz - a \in V \times \mathbb{R}^m$ とすれば

- 錐最適化問題の最適性の条件は以下で与えられる：

$$\left| \begin{array}{ll} \text{Find} & (x, y, z) \in K \times K \times \mathbb{R}^m \\ \text{s.t.} & F(x, y, z) = 0,\ \langle x, y\rangle = 0 \end{array} \right.$$

- 錐最適化問題の最適性の条件は以下で与えられる：

$$\left|\begin{array}{ll} \text{Find} & (x,y,z) \in K \times K \times \mathbb{R}^m \\ \text{s.t.} & F(x,y,z) = 0,\ \langle x,y\rangle = 0 \end{array}\right.$$

- $(V,\circ)$ が **Euclid 的 Jordan 代数であれば，**

$$\forall x \in K, \forall y \in K,\ [\langle x,y\rangle = 0 \ \Leftrightarrow\ x \circ y = 0 \text{ (相補性条件)}]$$

- よって以下の
錐相補性問題 **(Conic Complementarity Problem: CCP)** に帰着できる：

$$\textbf{(CCP)}\left|\begin{array}{ll} \text{Find} & (x,y,z) \in K \times K \times \mathbb{R}^m \\ \text{s.t.} & F(x,y,z) = 0,\ x \circ y = 0 \end{array}\right.$$

- 以下をみたすとき F は単調である：

$$\forall (x^1, y^1, z^1), (x^2, y^2, z^2) \in K \times K \times \mathbb{R}^m,$$
$$F(x^1, y^1, z^1) = F(x^2, y^2, z^2) \implies \langle x^1 - x^2, y^1 - y^2 \rangle \geq 0$$

- 先ほどの

$$P := \begin{pmatrix} O \\ A \end{pmatrix}, \quad Q := \begin{pmatrix} I \\ O \end{pmatrix}, \quad R := \begin{pmatrix} A^T \\ O \end{pmatrix}, \quad a := \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix},$$

$F(x, y, z) = Px + Qy + Rz - a \in V \times \mathbb{R}^m$ は以下をみたす：

$$\forall (x^1, y^1, z^1), (x^2, y^2, z^2) \in K \times K \times \mathbb{R}^m,$$
$$F(x^1, y^1, z^1) = F(x^2, y^2, z^2) \implies \langle x^1 - x^2, y^1 - y^2 \rangle = 0$$

- よって錐最適化問題の最適性の条件は

  単調な線形錐相補性問題に帰着できる

- 凸半正定値計画問題, 2 次錐計画問題,

  線形計画問題，凸 2 次計画問題

  これらも単調な線形錐相補性問題に帰着できる

目次

- **対象錐上の錐相補性問題 (CCP)：**

$$
\textbf{(CCP)} \left| \begin{array}{lll} \text{Find} & (x,y,z) \in K \times K \times \mathbb{R}^m & \\ \text{s.t.} & F(x,y,z) = 0 & \textbf{(等式条件)} \\ & x \circ y = 0 & \textbf{(相補性条件)} \end{array} \right.
$$

- **CCP に対する内点法写像**（Interior Point Map)
$H : K \times K \times \mathbb{R}^m \to V \times V \times \mathbb{R}^m$

$$
H(x,y,z) := (x \circ y,\ F(x,y,z)) .
$$

- **以下を定義する** $U := \{(x,y) \in \mathrm{int}K \times \mathrm{int}K \mid x \circ y \in \mathrm{int}K\}$.

問題 1

$K = \mathbb{R}^n_+$ **のとき** $U = \mathrm{int}K \times \mathrm{int}K$ **が成り立つが，**
$K = S^n_+$ **のとき** $U \subsetneq \mathrm{int}K \times \mathrm{int}K$ **である．**
$K = S^2_+$ **で** $X \in \mathrm{int}K \times \mathrm{int}K \setminus U$ **である** X **の例を示せ．**

定理 4.1 (単調 CCP に対する内点法写像の性質 [Yoshise 2007])

$F : \mathrm{int}K \times \mathrm{int}K \times \mathbb{R}^m \to V \times \mathbb{R}^m$ が単調性や連続性に関する
“しかるべき条件” を満たすならば， 内点法写像

$$H(x, y, z) := (x \circ y,\ F(x, y, z))$$

は以下を満たす.

(i) H は $U \times \mathbb{R}^m$ を同相的に $H\left(U \times \mathbb{R}^m\right)$ に写像する.

(ii) $H\left(U \times \mathbb{R}^m\right) = \mathrm{int}K \times F\left(U \times \mathbb{R}^m\right)$.

(iii) $H\left(U \times \mathbb{R}^m\right)$ は凸である.

内点法写像の同相性に関する研究:

$K = \mathbb{R}^n_+$:

- [Megiddo 1989] 線形単調
- [Kojima, Megiddo and Noma 1991] 非線形十分
- [Güler 1993] 非線形極大単調
- [Monteiro and Pang 1996] 非線形一般化単調
- etc.

内点法写像の同相性に関する研究：

$K = S^n_+$:

- [Shida, Shindoh and Kojima 1997] 非線形極大単調
- [Monteiro and Pang 1998] 非線形一般化単調
- etc.

対称錐 K:

- [Yoshise 2007] 非線形一般化単調
- [Chua and Yi 2010] 非線形一般化十分
- [Chi, Gowda and Tao 2019] 重み付き線形一般化十分
- [Tang and Zhou 2023] 重み付き非線形一般化単調
- etc.

定理 4.1 (単調 CCP に対する内点法写像の同相性)

$\Downarrow$

F が単調性や連続性に関する “しかるべき条件” を満たすならば
ホモトピー法を基盤として多くのアルゴリズムが設計可能

例えば

- 非許容点列内点法 (Infeasible interior-point method)
- 目標追跡法 (Target-following method)
- 重み付き中心パス追跡法 (Weighted-path-following method
- 同次法 (Homogeneous method)

- **CCP の簡単な例:**

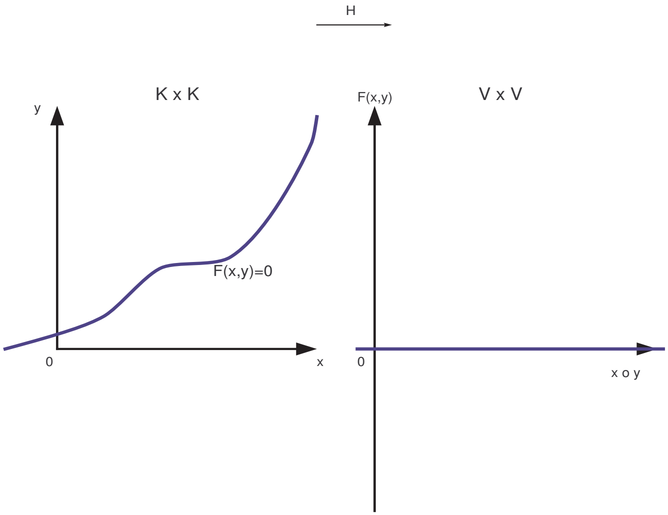
$$
\begin{array}{lll}
\textbf{CCP}: & \text{Find} & (x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \\
& \text{s.t.} & F(x,y) := y - \psi(x) = 0 \in \mathbb{R}, \\
& & x \circ y = 0.
\end{array}
$$

- $V = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{R}_+$, $m = 0$,
- ψ **は 1 変数の単調非減少関数:**

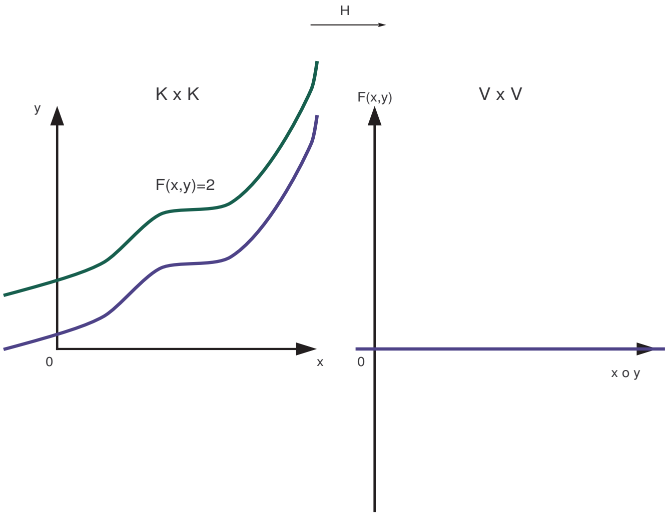
$$
\forall x^1, x^2 \in \mathbb{R}_+, \quad \langle x^1 - x^2, \psi(x^1) - \psi(x^2) \rangle \geq 0.
$$

- **このとき内点法写像 H は以下で与えられる**

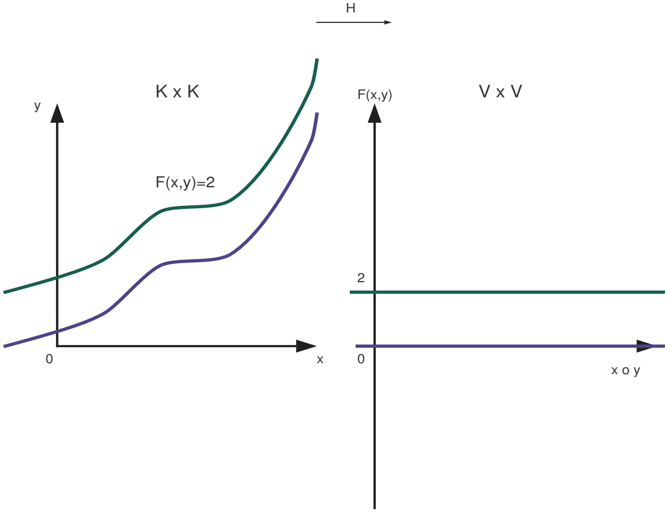
$$
H(x,y) := (x \circ y,\ y - \psi(x)).
$$



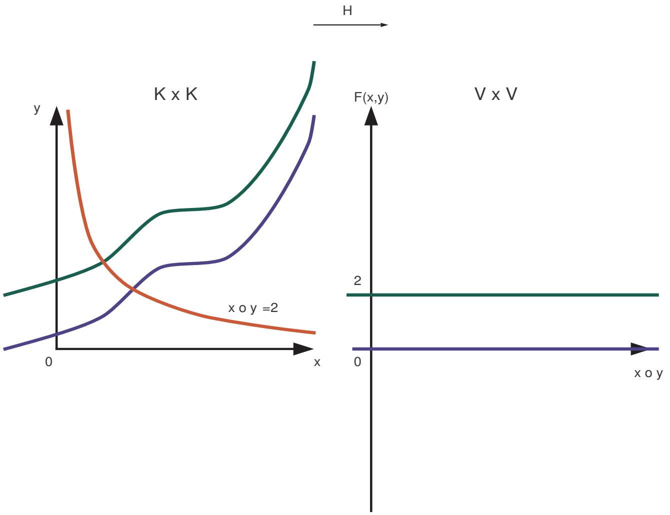
CCP の簡単な例: $V = \mathbb{R}, K = \mathbb{R}_+, m = 0$



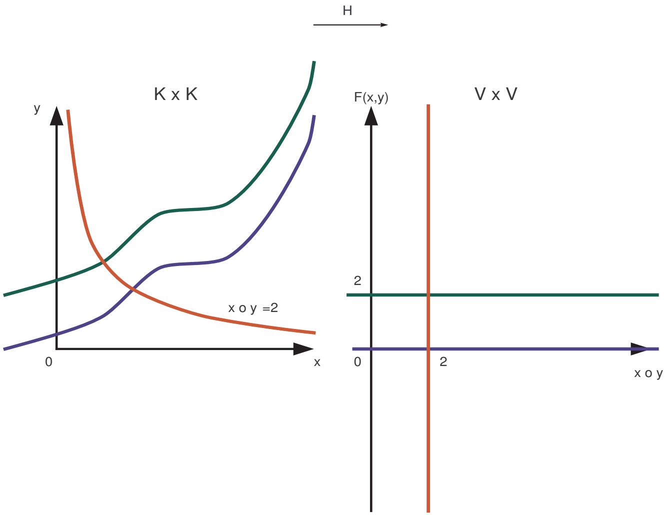
CCP の簡単な例: $V=\mathbb{R}, K=\mathbb{R}_+, m=0$



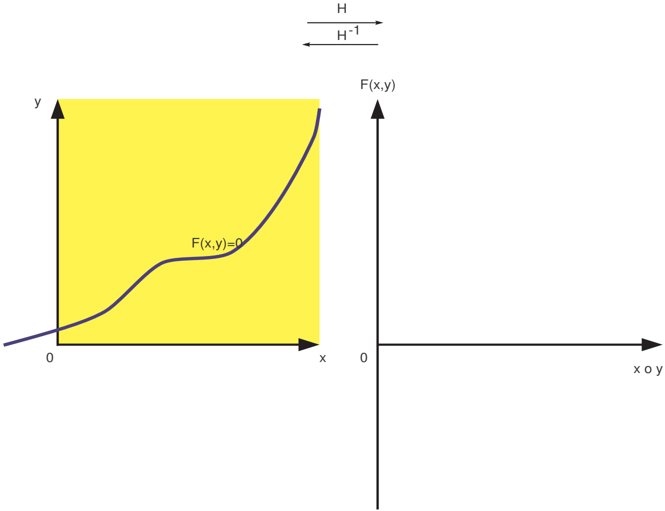
CCP の簡単な例: $V = \mathbb{R}, K = \mathbb{R}_+, m = 0$



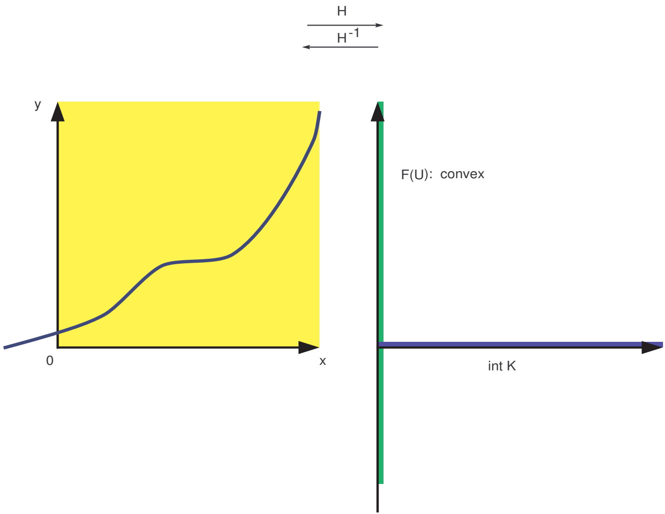
CCP の簡単な例: $V = \mathbb{R}, K = \mathbb{R}_+, m = 0$



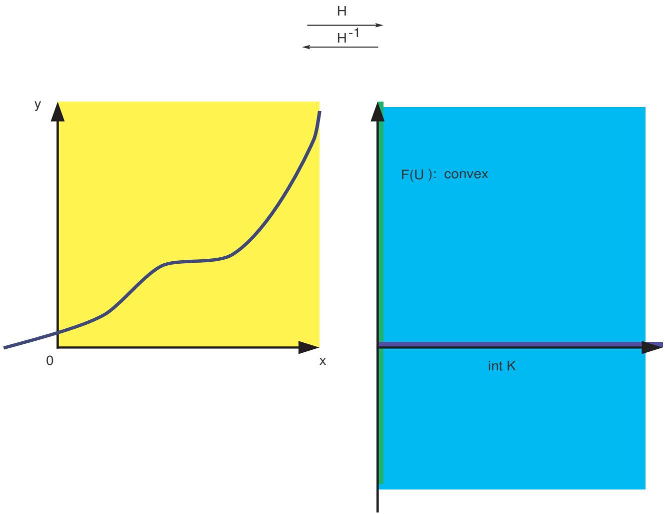
CCP の簡単な例: $V = \mathbb{R}, K = \mathbb{R}_+, m = 0$



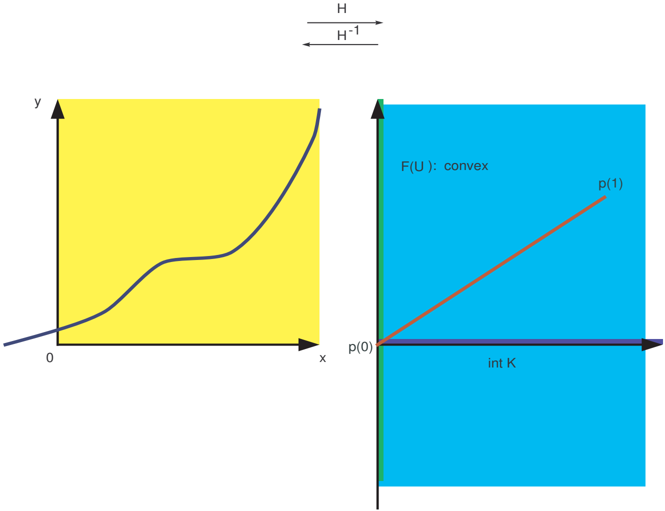
簡単な例における内点法写像: $V = \mathbb{R}, K = \mathbb{R}_+, m = 0, U = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$



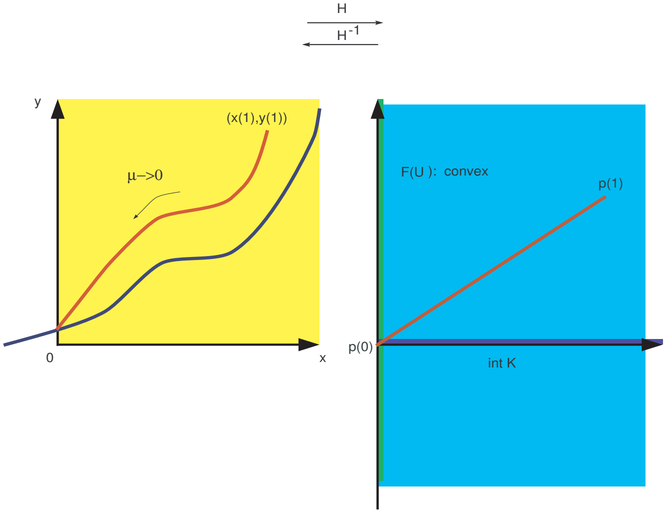
簡単な例における内点法写像: $V = \mathbb{R}, K = \mathbb{R}_+, m = 0, U = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$



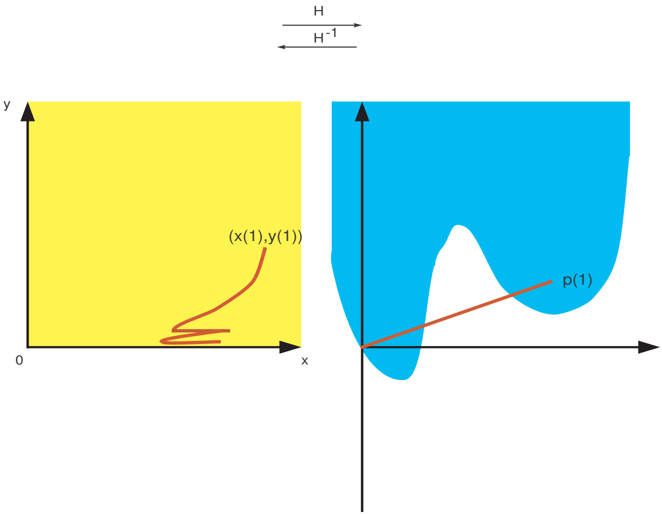
簡単な例における内点法写像: $V = \mathbb{R}, K = \mathbb{R}_+, m = 0, U = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$



簡単な例における内点法写像: $V = \mathbb{R}, K = \mathbb{R}_+, m = 0, U = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$



簡単な例における内点法写像: $V = \mathbb{R}, K = \mathbb{R}_+, m = 0, U = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$



簡単な例における内点法写像: $V = \mathbb{R}, K = \mathbb{R}_+, m = 0, U = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$

目次

定理 4.1 (単調 CCP に対する内点法写像の性質 [Yoshise 2007])

$F : \mathrm{int}K \times \mathrm{int}K \times \mathbb{R}^m \to V \times \mathbb{R}^m$ が単調性や連続性に関する"しかるべき条件" を満たすならば，内点法写像

$$H(x, y, z) := (x \circ y,\ F(x, y, z))$$

は以下を満たす．

(i) H は $U \times \mathbb{R}^m$ を同相的に $H(U \times \mathbb{R}^m)$ に写像する．

(ii) $H(U \times \mathbb{R}^m) = \mathrm{int}K \times F(U \times \mathbb{R}^m)$.

(iii) $H(U \times \mathbb{R}^m)$ は凸である.

まず (i) を示すことを考える．

定理 5.1 (領域不変性の定理 (Domain invariance theorem), [Brouwer 1912])

ベクトル空間 N の開部分集合 M 上の写像 $H : M \to N$ が連続かつ単射であるとき，$H(M)$ は N において開であり，H は M と $H(M)$ 間の同相写像である．

$H(x, y, z) := (x \circ y,\ F(x, y, z))$ が連続かつ単射であることを示せばよい．
連続性については，$x \circ y$ は有限次元ベクトル空間 V 上の双線形写像であるので，連続であり，仮定 (A)「F が連続」であれば H も連続である．

問題 2

V が n 次元ベクトル空間であるとき，双線形写像 $B : V \times V \to V$ は連続であることを示せ．

$H(x,y,z) := (x \circ y,\ F(x,y,z))$ が性質 5.1 をもてば単射性が得られる：

$$H(x^0,y^0,z^0) = H(x^1,y^1,z^1) \implies (x^0,y^0,z^0) = (x^1,y^1,z^0)$$

性質 5.1 (双線形写像 $\circ$ と F の単調性, z-単射性)

(i) 任意の $(x^0,y^0,z^0),(x^1,y^1,z^1) \in U \times \mathbb{R}^m$ に対して以下が成り立つ．

$$F(x^0,y^0,z^0) = F(x^1,y^1,z^1) \implies \langle x^0 - x^1, y^0 - y^1 \rangle \geq 0$$

(ii) 任意の $(x^0,y^0),(x^1,y^1) \in U$ に対して以下が成り立つ．

$$\langle x^0 - x^1, y^0 - y^1 \rangle \geq 0 \text{ and } x^0 \circ y^0 = x^1 \circ y^1 \implies (x^0,y^0) = (x^1,y^1)$$

(iii) 任意の $(x^0,y^0,z^0),(x^1,y^1,z^1) \in U \times \mathbb{R}^m$ に対して，

$$(x^0,y^0) = (x^1,y^1) \text{ and } F(x^0,y^0,z^0) = F(x^1,y^1,z^1) \implies z^0 = z^1$$

(i) を仮定 (B)「F の (x,y)-単調性」, (iii) を仮定 (C)「F の z-単射性」とする．

$H(x,y,z) := (x \circ y,\ F(x,y,z))$ が性質 5.1 をもてば単射性が得られる：

$$H(x^0,y^0,z^0) = H(x^1,y^1,z^1) \implies (x^0,y^0,z^0) = (x^1,y^1,z^0)$$

性質 5.1 (双線形写像 $\circ$ と F の単調性，z-単射性)

(i) 任意の $(x^0,y^0,z^0),(x^1,y^1,z^1) \in U \times \mathbb{R}^m$ に対して以下が成り立つ．

$$(Fx^0,y^0,z^0) = F(x^1,y^1,z^1) \implies \langle x^0 - x^1, y^0 - y^1 \rangle \geq 0$$

(ii) 任意の $(x^0,y^0),(x^1,y^1) \in U$ に対して以下が成り立つ．

$$\langle x^0 - x^1, y^0 - y^1 \rangle \geq 0 \text{ and } x^0 \circ y^0 = x^1 \circ y^1 \implies (x^0,y^0) = (x^1,y^1)$$

(iii) 任意の $(x^0,y^0,z^0),(x^1,y^1,z^1) \in U \times \mathbb{R}^m$ に対して，

$$(x^0,y^0) = (x^1,y^1) \text{ and } F(x^0,y^0,z^0) = F(x^1,y^1,z^1) \implies z^0 = z^1$$

仮定 (B)「F の単調性」，(C)「F の z-単射性」下で，(ii) は成り立つか？

補題 5.1 (線形単調関数 F_L の存在)

$(x^0, y^0), (x^1, y^1) \in U$ に対して $\langle x^0 - x^1, y^0 - y^1 \rangle \geq 0 \implies (x^0, y^0) = (x^1, y^1)$ が成り立たないとき，以下をみたす線形写像 $F_L : V \times V \to V$ が存在：

$$F_L(x^0 - x^1, y^0 - y^1) = 0 \implies \langle x^0 - x^1, y^0 - y^1 \rangle \geq 0 \text{（F_L の単調性)}$$

定理 5.2 (単調線形 CCP の内点法写像 [Monteiro and Pang 1998])

線形写像 $F_L : V \times V \to V$ が上記の単調性を満たすならば， 内点法写像 $H_L(x, y) := (x \circ y,\ F_L(x, y))$ は以下を満たす．

(i) H_L は U を同相的に $\mathrm{int}K \times F_L(U)$ に写像する．

(ii) $H_L(U) = \mathrm{int}K \times F_L(U)$.

すなわち性質 5.1 の (ii) が導かれ，元の内点法写像 H の単射性が得られる：

$$\langle x^0 - x^1, y^0 - y^1 \rangle \geq 0 \text{ and } x^0 \circ y^0 = x^1 \circ y^1 \implies (x^0, y^0) = (x^1, y^1)$$

補題 5.1 (線形単調関数 F_L の存在)

$(x^0, y^0), (x^1, y^1) \in U$ に対して $\langle x^0 - x^1, y^0 - y^1 \rangle \geq 0 \implies (x^0, y^0) = (x^1, y^1)$ が成り立たないとき，以下をみたす線形写像 $F_L : V \times V \to V$ が存在：

$$F_L(x^0 - x^1, y^0 - y^1) = 0 \implies \langle x^0 - x^1, y^0 - y^1 \rangle \geq 0 \ \ (F_L \text{ の単調性})$$

証明.

$\Delta x = x^0 - x^1$, $\Delta y = y^0 - y^1$ とする．

(1) $\Delta x \neq 0, \ \Delta y = 0 \implies F_L(\Delta x, \Delta y) = \Delta y - O\Delta x$

(2) $\Delta x \neq 0, \ \Delta y \neq 0 \implies F_L(\Delta x, \Delta y) = \Delta y - M\Delta x$

ここで M を

$\langle \Delta x, \Delta y \rangle > 0 \ \Rightarrow \ M(\Delta x) = \Delta y \text{ and } \forall v \in \{\Delta y\}^{\perp}, M(v) = 0$

$\langle \Delta x, \Delta y \rangle = 0 \ \Rightarrow \ M(\Delta x) = \Delta y, \ M(\Delta y) = -\frac{\|\Delta y\|^2}{\|\Delta x\|^2}\Delta x$

$\text{and } \forall v \in \{\Delta x, \Delta y\}^{\perp}, M(v) = 0$

と定めれば，$\langle \Delta x, \Delta y \rangle \geq 0$ より F_L の単調性が得られる． □

定理 5.2 (線形単調 CCP の内点法写像 [Monteiro and Pang 1998])

線形写像 $F_L : V \times V \to V$ が単調性を満たすならば，内点法写像 $H_L(x,y) := (x \circ y,\ F_L(x,y))$ は以下を満たす．

(i) H_L は U を同相的に $\mathrm{int}K \times F_L\,(U)$ に写像する．

(ii) $H_L\,(U) = \mathrm{int}K \times F_L\,(U)$.

以下の逆関数定理により保証される局所的同相写像と，
大域的な同相性を与える固有写像 (proper map) の性質を利用

定理 5.3 (逆関数定理 (Inverse function theorem))

U を有限次元ベクトル空間 V の開部分集合，$G : U \to V$ を連続微分可能な関数とする．G が $w \in U$ において可逆なヤコビ行列 $G'(w)$ をもつのであれば，w の V における，ある開近傍 B_w が存在して，$G|_{(B_w, H(B_w))}$ は局所的な微分同相写像となる．

cf. [Ambrosetti and Prodi 1995, Ortega and Rheinboldt 1970]

定義 5.1 (固有写像 (Proper map))

M, N を計量空間，$N_0 \subseteq N$ とする．
連続写像 $G : M \to N$ が，N_0 の任意のコンパクト部分集合 $C \subseteq N_0$ について

$$G^{-1}(C) := \{u \in M \mid G(u) \in C\}$$

がコンパクトであるとき，G は集合 N_0 での固有写像であるという．
$N_0 = N$ のとき単なる固有写像という．

問題 3

連続写像ではあるが固有写像ではない $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ の例を示せ．

cf. [Ambrosetti and Prodi 1995, Ortega and Rheinboldt 1970]

定理 5.4 (連結性と固有・同相写像の性質 [Monteiro and Pang 1996])

M, N を計量空間の部分集合であり，G が M で局所的同相であるとき

(i) （固有性が重要）M が弧状連結，N が単連結のとき，

$$G : M \to N \text{ は固有} \iff G : M \to N \text{ は同相}$$

(ii) （像より少しはみ出しても）$N_0 \subseteq N, G(M) \cap N_0 \neq \emptyset$ のとき，

$$G \text{ は } N_0 \text{ で固有} \implies G : G^{-1}(N_0) \to N_0 \text{ は局所的同相かつ固有}$$

さらに N_0 が連結であれば，$G(M) \supseteq N_0$.

(iii) （凸性の保証）M が弧状連結ならば，

$$\forall y_0, y_1 \in G(M), G^{-1}([y_0, y_1]) \text{ がコンパクト}$$
$$\implies G : M \to G(M) \text{ は同相かつ } G(M) \text{ は凸}$$

定理 5.2 を示すため，まず $M = U$ での $G = H_L$ の局所的同相性を示す．

$M = U$ での $G = H_L$ の局所的同相性を示す．

定理 5.3 (逆関数定理 (Inverse function theorem))

U を有限次元ベクトル空間 V の開部分集合，$G : U \to V$ を連続微分可能な関数とする．G が $w \in U$ において可逆なヤコビ行列 $G'(w)$ をもつのであれば，w の V における，ある開近傍 B_w が存在して，$G|_{(B_w, H(B_w))}$ は局所的な微分同相写像となる．

U が開集合であること，$H'_L(x,y)$ が U 上で可逆であることを示す．

補題 5.2 (U は開で連結)

$U = \{(x,y) \in \mathrm{int}K \times \mathrm{int}K \mid x \circ y \in \mathrm{int}K\}$ は非空，開，かつ星状

問題 4

V の単位元 $e \in \mathrm{int}K$ の存在を既知として，補題 5.2 が成り立つことを示せ．

定理 5.3 (逆関数定理 (Inverse function theorem))

U を有限次元ベクトル空間 V の開部分集合，$G : U \to V$ を連続微分可能な関数とする．G が $w \in U$ において可逆なヤコビ行列 $G'(w)$ をもつのであれば，w の V における，ある開近傍 B_w が存在して，$G|_{(B_w, H(B_w))}$ は局所的な微分同相写像となる．

U が開であることは示したので，$H'_L(x,y)$ が可逆であることを示す．

補題 5.3 ($H'_L(x,y)$ は可逆)

$H_L(x,y) := (x \circ y,\ F_L(x,y))$ は，$(x,y) \in U$，$(\Delta x, \Delta y) \in V \times V$ に対して

(i) $\langle \Delta x, \Delta y \rangle \geq 0,\ x \circ \Delta y + y \circ \Delta x = 0 \implies \Delta x = \Delta y = 0$
(Appendix 1 of [Faybusovich 1997])

(ii) F_L は単調線形関数であり，$F'_L(\Delta x, \Delta y) = 0 \implies \langle \Delta x, \Delta y \rangle \geq 0$

(iii) $H'_L(x,y)(\Delta x, \Delta y) = (0,0) \implies \Delta x = \Delta y = 0$ であり，$H'_L(x,y)$ は可逆．

定理 5.4 (連結性と固有・同相写像の性質 [Monteiro and Pang 1996])

M, N を計量空間の部分集合であり，G が M で局所的同相であるとき

(i) （固有性が重要）M が弧状連結，N が単連結のとき，

$$G : M \to N \text{ は固有} \iff G : M \to N \text{ は同相}$$

(ii) （像より少しはみ出しても）$N_0 \subseteq N, G(M) \cap N_0 \neq \emptyset$ のとき，

$$G \text{ は } N_0 \text{ で固有} \implies G : G^{-1}(N_0) \to N_0 \text{ は局所的同相かつ固有}$$

さらに N_0 が連結であれば，$G(M) \supseteq N_0$.

(iii) （凸性の保証）M が弧状連結ならば，

$$\forall y_0, y_1 \in G(M), G^{-1}([y_0, y_1]) \text{ がコンパクト}$$
$$\implies G : M \to G(M) \text{ は同相かつ } G(M) \text{ は凸}$$

$M = U$ での H_L の局所的同相性が得られているので，
$N = \mathrm{int}K \times F_L(U)$ 上での固有性を示す．

補題 5.4 (H_L の固有写像性)

$F_L : V \times V \to V$ が線形かつ単調であるとき，
$H_L(x, y) = (x \circ y, F_L(x, y))$ は $\mathrm{int}K \times F_L(U)$ 上での固有写像である．

証明.

任意のコンパクト集合 $C \subseteq \mathrm{int}K \times F_L(U)$ に対して，$H_L^{-1}(C)$ がコンパクトであることを示す．
H_L は連続写像であるので，$H_L^{-1}(C)$ は閉である．（続く）

$\square$

補題 5.4 (H_L の固有写像性)

$F_L : V \times V \to V$ が線形かつ単調であるとき，
$H_L(x,y) = (x \circ y, F_L(x,y))$ は $\mathrm{int}K \times F_L(U)$ 上の固有写像である．

証明.

（続き）以下の４つの性質から $H_L^{-1}(C)$ の有界性が導かれる．

(i) $H_L(x,y) = (x \circ y, F_L(x,y))$ より，
$H_L(x,y) \in C \subseteq \mathrm{int}K \times F_L(U) \implies \langle x,y\rangle = \mathrm{tr}(x \circ y)$ は有界

(ii) 任意の閉凸錐 K，任意の $y \in \mathrm{int}K^*, \eta > 0$ に対して
$\{x \in K \mid \langle x,y\rangle \le \eta\}$ はコンパクト（問題 5）

(iii) F_L の単調性より，任意の $(x^0,y^0),(x^1,y^1) \in U$ に対して

$$F(x,y) = F(x^0,y^0) \implies \langle x,y^0\rangle + \langle y,x^0\rangle \le \langle x,y\rangle + \langle x^0,y^0\rangle$$

(iv) F_L は単調であり，(ii) と H_L の U 上での局所的同相性を用いれば，
$\exists \eta > 0, H_L^{-1}(C) \subseteq \{(x,y) \mid \langle x,e\rangle + \langle y,e\rangle \le \eta\}$ が得られ，
(ii) より有界性が得られ，前頁とあわせてコンパクト性を得る

問題 5

（補題 5.4 の証明のステップ (ii)）
任意の閉凸錐 $K \subseteq V$，任意の $y \in \mathrm{int}K^*, \eta > 0$ に対して
$\{x \in K \mid \langle x, y \rangle \leq \eta\}$ はコンパクトであることを示せ

[Faraut and Korányi 1994] の証明の手順

1. 非空閉凸錐 $K \subseteq V$ と V の単位球 $S(V)$ について以下がなりたつ．

$$D = \{y \mid \langle x, y \rangle > 0,\ \forall x \in K \setminus \{0\}\} = \{y \mid \langle x, y \rangle > 0,\ \forall x \in K \cap S(V)\}$$

2. D は開であり，$D \subseteq \mathrm{int}K^*$ である．
3. さらに $\mathrm{int}K^* \subseteq D$ であり，$D = \mathrm{int}K^*$ である．
4. $C \subseteq \mathrm{int}K^*$ がコンパクトであるとき，ある $\rho > 0$ が存在して，任意の $x \in K$ と任意の $y \in C$ に対して，$\langle x, y \rangle \geq \rho \|x\|$ が成り立つ．
5. 任意の $y \in \mathrm{int}K^*, \{x \in K \mid \langle x, y \rangle \leq 1\}$ は閉であり，有界である．

定理 5.4 (連結性と固有・同相写像の性質 [Monteiro and Pang 1996])

M, N を計量空間の部分集合であり，G が M で局所的同相であるとき

(i) （固有性が重要）M が弧状連結，N が単連結のとき，

$$G : M \to N \text{ は固有} \iff G : M \to N \text{ は同相}$$

(ii) （像より少しはみ出しても）$N_0 \subseteq N, G(M) \cap N_0 \neq \emptyset$ のとき，

$$G \text{ は } N_0 \text{ で固有} \implies G : G^{-1}(N_0) \to N_0 \text{ は局所的同相かつ固有}$$

さらに N_0 が連結であれば，$G(M) \supseteq N_0$.

(iii) （凸性の保証）M が弧状連結ならば，

$$\forall y_0, y_1 \in G(M), G^{-1}([y_0, y_1]) \text{ がコンパクト}$$
$$\implies G : M \to G(M) \text{ は同相かつ } G(M) \text{ は凸}$$

H_L の局所的同相性，$\mathrm{int}K \times F_L(U)$ 上の固有性が得られたので，次に U と $\mathrm{int}K \times F_L(U)$ の連結性を確認する．

定義 5.2 (計量空間における部分集合の連結性)

計量空間における部分集合 M について，

(i) 非空かつ開の V_1 と V_2 による M の分割 (V_1, V_2) が存在しないとき，
M は連結しているという

(ii) 任意の 2 点 $u_0, u_1 \in M$ に対して，$p(0) = u_0$，$p(1) = u_1$ をみたす
連続関数 $p : [0, 1] \to M$（path）が存在するとき，
M は弧状連結 (path connected) であるという

(iii) 任意のパス $p : [0, 1] \to M$，$p(0) = p(1) = u$ に対して，
任意の $s \in [0, 1]$ に対して $\alpha_p(s, 0) = p(s), \alpha_p(s, 1) = u$ であり，
任意の $t \in [0, 1]$ に対して $\alpha_p(0, t) = \alpha_p(1, t) = u$ である
連続写像 $\alpha_p : [0, 1] \times [0, 1] \to M$ が存在するとき，
M は単連結 (simply connected) であるという

- ある $u_0 \in M$ が存在して，任意の $u_1 \in M$ に対して $[u_0, u_1] \subseteq M$ であるとき，M は星状であるという

問題 6

計量空間における部分集合 M について

(i) M が連結であるとき，任意の連続写像 G に対して，$G(M)$ は連結であることを示せ．

(ii) M が星状であるとき，任意の線形写像 F に対して $F(M)$ は星状であることを示せ．

(iii) M が非空かつ凸であるとき，M は星状であることを示せ．

(iv) M が星状であるとき，M は単連結であることを示せ．

(v) （後で使用）M^1, M^2 が弧状連結であるとき，$M^1 \times M^2$ は弧状連結であることを示せ．

以上から，下記が得られる：

- 星状である U は弧状連結であり，線形写像の像 $F_L(U)$ も星状で単連結
- 非空凸である $\mathrm{int}K$ は星状であり，$\mathrm{int}K \times F_L(U)$ も星状で単連結

- 星状である U は弧状連結であり，線形写像の像 $F_L(U)$ も星状で単連結
- 非空凸である $\mathrm{int}K$ は星状であり，$\mathrm{int}K \times F_L(U)$ も星状で単連結
- H_L は U 上で局所的同相であり，$\mathrm{int}K \times F_L(U)$ 上の固有写像

定理 5.4 (連結性と固有・同相写像の性質 [Monteiro and Pang 1996])

M, N を計量空間の部分集合であり，G が M で局所的同相であるとき

(i) （固有性が重要）M が弧状連結，N が単連結のとき，

$$G : M \to N \text{ は固有} \iff G : M \to N \text{ は同相}$$

において，$G = H_L, M = U, N = \mathrm{int}K \times F_L(U)$ とすれば，

定理 5.2 (i) 「H_L は U を同相的に $\mathrm{int}K \times F_L(U)$ に写像する」

が得られる．

- 星状である U は弧状連結であり，線形写像の像 $F_L(U)$ も星状で単連結
- 非空凸である $\mathrm{int}K$ は星状であり，$\mathrm{int}K \times F_L(U)$ も星状で単連結
- H_L は U 上で局所的同相であり，$\mathrm{int}K \times F_L(U)$ 上の固有写像

定理 5.4 (連結性と固有・同相写像の性質 [Monteiro and Pang 1996])

M, N を計量空間の部分集合であり，G が M で局所的同相であるとき

(ii) （像より少しはみ出しても）$N_0 \subseteq N, G(M) \cap N_0 \neq \emptyset$ のとき，

$$G \text{ は } N_0 \text{ で固有} \implies G : G^{-1}(N_0) \to N_0 \text{ は局所的同相かつ固有}$$

さらに N_0 が連結であれば，$G(M) \supseteq N_0$.

において，$G = H_L, M = U, N_0 = \mathrm{int}K \times F_L(U)$ とすれば，

$$H_L(U) \supseteq \mathrm{int}K \times F_L(U)$$

$H_L(x,y) = (x \circ y, F_L(x,y))$，$U = \{(x,y) \in \mathrm{int}K \times \mathrm{int}K \mid x \circ y \in \mathrm{int}K\}$ より

$$H_L(U) \subseteq \mathrm{int}K \times F_L(U)$$

が得られ，定理 5.2 (ii) 「$H_L(U) = \mathrm{int}K \times F_L(U)$」を得る．

補題 5.1 (線形単調関数 F_L の存在)

$(x^0,y^0),(x^1,y^1)\in U$ に対して $\langle x^0-x^1,y^0-y^1\rangle\geq 0 \implies (x^0,y^0)=(x^1,y^1)$ が成り立たないとき，以下をみたす線形関数 $F_L:V\times V\to V$ が存在：

$$F_L(x^0-x^1,y^0-y^1)=0 \implies \langle x^0-x^1,y^0-y^1\rangle\geq 0 \quad F_L \text{ の単調性)}$$

定理 5.2 (単調線形 CCP の内点法写像 [Monteiro and Pang 1998])

$F_L:V\times V\to V$ が上記の単調性を満たすならば， 内点法写像 $H_L(x,y):=(x\circ y,\ F_L(x,y))$ は以下を満たす．

(i) H_L は U を同相的に $\mathrm{int}K\times F_L(U)$ に写像する．

(ii) $H_L(U)=\mathrm{int}K\times F_L(U)$.

すなわち性質 5.1 の (ii) が導かれ，元の内点法写像 H の単射性が得られる：

$$\langle x^0-x^1,y^0-y^1\rangle\geq 0 \text{ and } x^0\circ y^0=x^1\circ y^1 \implies (x^0,y^0)=(x^1,y^1)$$

仮定 (B)「F の z-単射性」とあわせて

性質 5.1 (双線形写像 $\circ$ と F の単調性，z-単射性)

(i) 任意の $(x^0, y^0), (x^1, y^1) \in U$ に対して以下が成り立つ．

$$\langle x^0 - x^1, y^0 - y^1 \rangle \geq 0 \text{ and } x^0 \circ y^0 = x^1 \circ y^1 \implies (x^0, y^0) = (x^1, y^1)$$

(ii) 任意の $(x^0, y^0, z^0), (x^1, y^1, z^1) \in U \times \mathbb{R}^m$ に対して，

$$(x^0, y^0) = (x^1, y^1) \text{ and } F(x^0, y^0, z^0) = F(x^1, y^1, z^1) \implies z^0 = z^1$$

が得られ，

定理 4.1 (単調 CCP に対する内点法写像の性質 [Yoshise 2007])

$F : \mathrm{int}K \times \mathrm{int}K \times \mathbb{R}^m \to V \times \mathbb{R}^m$ が単調性や連続性に関する
“しかるべき条件” を満たすならば， 内点法写像
$H(x, y, z) := (x \circ y,\ F(x, y, z))$ は以下を満たす．

(i) H は $U \times \mathbb{R}^m$ を同相的に $H\,(U \times \mathbb{R}^m)$ に写像する．

が示せた．

定理 4.1 (単調 **CCP** に対する内点法写像の性質 [Yoshise 2007])

$F : \mathrm{int}K \times \mathrm{int}K \times \mathbb{R}^m \to V \times \mathbb{R}^m$ が単調性や連続性に関する“しかるべき条件” を満たすならば，内点法写像

$$H(x,y,z) := (x \circ y,\ F(x,y,z))$$

は以下を満たす．

(i) H は $U \times \mathbb{R}^m$ はを同相的に $H(U \times \mathbb{R}^m)$ に写像する．

(ii) $H(U \times \mathbb{R}^m) = \mathrm{int}K \times F(U \times \mathbb{R}^m)$.

(iii) $H(U \times \mathbb{R}^m)$ は凸である．

(i) $\Longrightarrow$ H は $U \times \mathbb{R}^m$ 上で局所的同相

であることを用いて，再び「定理 5.4（連結性と固有・同相写像の性質）」を用いて (ii)，(iii) を示す．

補題 5.4 (H_L の固有写像性 ： F_L の線形性を直接利用していないことに注意)

$F_L : V \times V \to V$ が線形かつ単調であるとき，
$H_L(x, y) = (x \circ y, F_L(x, y))$ は $\mathrm{int}K \times F_L(U)$ 上の固有写像である．

証明.

（続き）以下の４つの性質から $H_L^{-1}(C)$ の有界性が導かれる．

(i) $H_L(x, y) = (x \circ y, F_L(x, y))$ より，
$H_L(x, y) \in C \subseteq \mathrm{int}K \times F_L(U) \implies \langle x, y\rangle = \mathrm{tr}(x \circ y)$ は有界

(ii) 任意の閉凸錐 K，$y \in \mathrm{int}K^*, \eta > 0$ に対して $\{x \in K \mid \langle x, y\rangle \leq \eta\}$ はコンパクト

(iii) F_L の単調性より，任意の $(x^0, y^0), (x^1, y^1) \in U$ に対して

$$F(x, y) = F(x^0, y^0) \implies \langle x, y^0\rangle + \langle y, x^0\rangle \leq \langle x, y\rangle + \langle x^0, y^0\rangle$$

(iv) F_L は単調であり，H_L の U 上での**局所的同相性**を用いれば，
$\exists \eta > 0, H_L^{-1}(C) \subseteq \{(x, y) \mid \langle x, e\rangle + \langle y, e\rangle \leq \eta\}$ でありコンパクト

□

補題 5.5 (H の固有写像性)

$F : \mathrm{int}K \times \mathrm{int}K \times \mathbb{R}^m \to V \times \mathbb{R}^m$ が単調であるとき，
$H(x,y,z) = (x \circ y, F(x,y,z))$ は $\mathrm{int}K \times F(U \times \mathbb{R}^m)$ 上の固有写像である．

証明.

（続き）以下の４つの性質から $H^{-1}(C)$ の有界性が導かれる．

(i) $H(x,y,z) = (x \circ y, F(x,y,z))$ より，
$H(x,y,z) \in C \subseteq \mathrm{int}K \times F(U \times \mathbb{R}^m) \implies \langle x,y \rangle = \mathrm{tr}(x \circ y)$ は有界

(ii) 任意の閉凸錐 K，$y \in \mathrm{int}K^*, \eta > 0$ に対して $\{x \in K \mid \langle x,y \rangle \le \eta\}$ はコンパクト

(iii) F の単調性より，任意の $(x^0,y^0),(x^1,y^1) \in U$ に対して

$$F(x,y,z) = F(x^0,y^0,z^0) \implies \langle x,y^0 \rangle + \langle y,x^0 \rangle \le \langle x,y \rangle + \langle x^0,y^0 \rangle$$

(iv) F は単調であり，H の $U \times \mathbb{R}$ 上での局所的同相性を用いれば，
$\exists \eta > 0, H^{-1}(C) \subseteq \{(x,y) \mid \langle x,e \rangle + \langle y,e \rangle \le \eta\}$ でありコンパクト

□

- 星状である U は弧状連結であり，$U \times \mathbb{R}^m$ も弧状連結
- H は $U \times \mathbb{R}$ 上で局所的同相であり，$\mathrm{int}K \times F(U \times \mathbb{R})$ 上の固有写像
- 定義より，$H(U \times \mathbb{R}) \subseteq \mathrm{int}K \times F(U \times \mathbb{R})$

定理 5.4 (連結性と固有・同相写像の性質 [Monteiro and Pang 1996])

M, N を計量空間の部分集合であり，G が M で局所的同相であるとき

(ii) （像より少しはみ出しても）$N_0 \subseteq N, G(M) \cap N_0 \neq \emptyset$ のとき，

$$G \text{ は } N_0 \text{ で固有} \implies G : G^{-1}(N_0) \to N_0 \text{ は局所的同相かつ固有}$$

さらに N_0 が連結であれば，$G(M) \supseteq N_0$．

において，$G = H, M = U \times \mathbb{R}^m, N_0 = \mathrm{int}K \times F(U \times \mathbb{R}^m)$ とすれば，

$$H(U \times \mathbb{R}^m) \supseteq \mathrm{int}K \times F(U \times \mathbb{R}^m)$$

であるので，

定理 4.1 (ii) 「$H(U \times \mathbb{R}^m) = \mathrm{int}K \times F(U \times \mathbb{R}^m)$」

が得られ，

- 星状である U は弧状連結であり，$U \times \mathbb{R}^m$ も弧状連結
- H は $U \times \mathbb{R}^m$ 上で局所的同相であり，$\mathrm{int}K \times F(U \times \mathbb{R}^m)$ 上の固有写像
- 定義より，$H(U \times \mathbb{R}^m) \subseteq \mathrm{int}K \times F(U \times \mathbb{R}^m)$

定理 5.4 (連結性と固有・同相写像の性質 [Monteiro and Pang 1996])

M, N を計量空間の部分集合であり，G が M で局所的同相であるとき

(iii) （凸性の保証）M が弧状連結ならば，

$$\forall y_0, y_1 \in G(M), G^{-1}([y_0, y_1]) \text{ がコンパクト}$$
$$\Longrightarrow \quad G : M \to G(M) \text{ は同相かつ } G(M) \text{ は凸}$$

において，$G = H, M = U \times \mathbb{R}^m$ とすれば，
H が $H(U \times \mathbb{R}^m) = \mathrm{int}K \times F(U \times \mathbb{R}^m)$ 上の固有写像であることから

定理 4.1 (iii) 「$H(U \times \mathbb{R}^m)$ は凸である」

を得る．

定理 4.1 (単調 CCP に対する内点法写像の性質 [Yoshise 2007])

$F : \mathrm{int}K \times \mathrm{int}K \times \mathbb{R}^m \to V \times \mathbb{R}^m$ が単調性や連続性に関する
"しかるべき条件" を満たすならば，内点法写像

$$H(x, y, z) := (x \circ y,\ F(x, y, z))$$

は以下を満たす．

(i) H は $U \times \mathbb{R}^m$ を同相的に $H(U \times \mathbb{R}^m)$ に写像する．

(ii) $H(U \times \mathbb{R}^m) = \mathrm{int}K \times F(U \times \mathbb{R}^m)$.

(iii) $H(U \times \mathbb{R}^m)$ は凸である．

定理 4.1 (単調 CCP に対する内点法写像の性質 [Yoshise 2007])

$F : \mathrm{int}K \times \mathrm{int}K \times \mathbb{R}^m \to V \times \mathbb{R}^m$ が

仮定 (A)：連続性，仮定 (B)：(x, y)-単調性，仮定（C）：z-単射性

を満たすならば，内点法写像

$$H(x, y, z) := (x \circ y,\ F(x, y, z))$$

は以下を満たす．

(i) H は $U \times \mathbb{R}^m$ を同相的に $H(U \times \mathbb{R}^m)$ に写像する．

(ii) $H(U \times \mathbb{R}^m) = \mathrm{int}K \times F(U \times \mathbb{R}^m)$.

(iii) $H(U \times \mathbb{R}^m)$ は凸である．

定理 4.1 (単調 CCP に対する内点法写像の同相性)

$\Downarrow$

F が単調性や連続性に関する "しかるべき条件" を満たすならば
ホモトピー法を基盤として多くのアルゴリズムが設計可能

例えば

- 非許容点列内点法 (Infeasible interior-point method)
- 目標追跡法 (Target-following method)
- 重み付き中心パス追跡法 (Weighted-path-following method)
- 同次法 (Homogeneous method)

目次

- ここでは単純に，以下の標準 CCP を考える:

$$\text{標準 CCP:}\quad \begin{array}{ll} \text{Find} & (x, y) \in K \times K \\ \text{s.t.} & F(x, y) := y - \psi(x) = 0, \\ & x \circ y = 0. \end{array}$$

ただし，

- K は $(V, \circ)$ の対称錐であり
- $\psi : K \to V$ は連続かつ，以下をみたす単調写像であるとする．

$$\forall x^1, x^2 \in K,\ \langle x^1 - x^2, \psi(x^1) - \psi(x^2) \rangle \geq 0.$$

- 同次写像 ψ_{H} を以下のように定義する
(cf. 非負象限に対する Andersen and Ye (1999)):

$$\forall (x, \tau) \in K \times \mathbb{R}_{++}, \;\; \psi_{\mathrm{H}}(x, \tau) := \begin{pmatrix} \tau \psi(x/\tau) \\ -\langle \psi(x/\tau), x \rangle \end{pmatrix}$$

- ψ が単調であれば，ψ_{H} も単調
- ψ がアフィンであっても ψ_{H} は非線形
- ψ が **Lipschitz** 連続であれば ψ_{H} も **Lipschitz** 連続
- 上記の関数に対応する錐 $K_{\mathrm{H}} := K \times \mathbb{R}_{+}$ は $V \times \mathbb{R}$ 以下の演算で定まる対称錐である．

$$(x, \tau) \circ (y, \kappa) := (x \circ y, \tau\kappa),$$
$$\langle (x, \tau), (y, \kappa) \rangle := \langle x, y \rangle + \tau\kappa,$$
$$\mathrm{int} K_{\mathrm{H}} = \mathrm{int}(K \times \mathbb{R}_{+}) = \mathrm{int} K \times \mathbb{R}_{++}.$$

- **CCP に対する同次モデル (HCCP) を定義する：**

$$\begin{array}{lll} \textbf{HCCP:} & \text{Find} & (x, \tau, y, \kappa) \in \mathrm{int}K_{\mathrm{H}} \times \mathrm{int}K_{\mathrm{H}} \\ & \text{s.t.} & F_{\mathrm{H}}(x, \tau, y, \kappa) := (y, \kappa) - \psi_{\mathrm{H}}(x, \tau) = 0 \in V \times \mathbb{R}, \\ & & (x, \tau) \circ (y, \kappa) = 0. \end{array}$$

- **同次モデル (HCCP) の内点法写像は以下で与えられる：**

$$H_{\mathrm{H}}(x, \tau, y, \kappa) := ((x, \tau) \circ (y, \kappa),\ F_{\mathrm{H}}(x, \tau, y, \kappa))$$

- **同次モデルは 漸近的実行可能，すなわち，** $0 \in \mathrm{cl}\,(H_{\mathrm{H}}(U_{\mathrm{H}}))$

$$U_{\mathrm{H}} = \{(x, \tau, y, \kappa) \in \mathrm{int}K_{\mathrm{H}} \times \mathrm{int}K_{\mathrm{H}} \mid (x, \tau) \circ (y, \kappa) \in \mathrm{int}K_{\mathrm{H}}\},$$
$$x^{(k)} := (1/2)^k e, \tau^{(k)} := (1/2)^k, y^{(k)} := (1/2)^k e, \kappa^{(k)} := (1/2)^k$$

- H_{H} **は解集合を高次に写像** $\Longrightarrow$ **対応する中心パス は多くの情報を含む**

定理 4.1 (単調 CCP に対する内点法写像の同相性) より，

定理 6.1 (単調同次モデル HCCP に対する内点法写像の性質 [Yoshise 2007])

$\psi : K \to V$ が連続かつ単調写像であるとき，内点法写像

$$H_{\mathrm{H}}(x, \boldsymbol{\tau}, y, \boldsymbol{\kappa}) := ((x, \boldsymbol{\tau}) \circ (y, \boldsymbol{\kappa}),\ F_{\mathrm{H}}(x, \boldsymbol{\tau}, y, \boldsymbol{\kappa}))$$

は以下を満たす．

(i) H_{H} は U_{H} を同相的に $H_{\mathrm{H}}(U_{\mathrm{H}})$ に写像する．

(ii) $H_{\mathrm{H}}(U_{\mathrm{H}}) = \mathrm{int} K_{\mathrm{H}} \times F_{\mathrm{H}}(U_{\mathrm{H}})$.

(iii) $H_{\mathrm{H}}(U_{\mathrm{H}})$ は凸である．

よって，自明な初期点 $(e, 1, e, 1)$ をもつ，中心パス P の議論が行える．

$$\begin{aligned} P = \{ & (x(t), \boldsymbol{\tau}(t), y(t), \boldsymbol{\kappa}(t)) \in U_{\mathrm{H}} \mid \\ & H_{\mathrm{H}}((x(t), \boldsymbol{\tau}(t), y(t), \boldsymbol{\kappa}(t)) = tH_{\mathrm{H}}(e, 1, e, 1),\ t \in (0, 1] \} \end{aligned}$$

$$P = \{(x(t), \tau(t), y(t), \kappa(t)) \in U_{\mathrm{H}} \mid H_{\mathrm{H}}((x(t), \tau(t), y(t), \kappa(t)) = tH_{\mathrm{H}}(e, 1, e, 1),\ t \in (0, 1]\}$$

定理 6.2 (中心パス P の性質 [Yoshise 2007])

$\psi : K \to V$ が単調写像であるとき，

(i) 任意の $t \in (0, 1]$ に対して，$H_{\mathrm{H}}((x(t), \tau(t), y(t), \kappa(t)) = tH_{\mathrm{H}}(e, 1, e, 1)$ をみたす $((x(t), \tau(t), y(t), \kappa(t)) \in U_{\mathrm{H}}$ が存在

(ii) 中心パス P は有界であり集積点 $(x(0), \tau(0), y(0), \kappa(0))$ は HCCP の解

証明.

(i)：$H_{\mathrm{H}}(U_{\mathrm{H}})$ は開凸であり，$H_{\mathrm{H}}(e, 1, e, 1) \in H_{\mathrm{H}}(U_{\mathrm{H}}) = \mathrm{int} H_{\mathrm{H}}(U_{\mathrm{H}})$ かつ $0 \in \mathrm{cl}\,(H_{\mathrm{H}}(U_{\mathrm{H}}))$ である． $\square$

問題 7

S は $\mathrm{int} S \neq \emptyset$ な凸集合で，$a \in \mathrm{int} S$，$b \in \mathrm{cl} S$, あるとき，任意の $t \in (0, 1]$ に対して $ta + (1 - t)b \in \mathrm{int} S$ であることを示せ

定理 6.3 (元の問題 CCP の実行可能性の判定 [Yoshise 2007])

$\psi : K \to V$ が単調写像であるとき，

(i) 元の問題 CCP が解をもつ $\iff \tau(0) > 0$.
この場合，$(x(0)/\tau(0), y(0)/\tau(0))$ は CCP の解である.

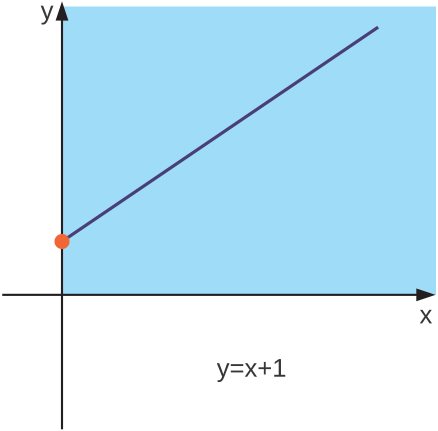
(ii) ψ が Lipschitz 連続であるならば，

元の問題 CCP が強く非許容
$\implies \kappa(0) > 0$
$\implies$ 元の問題 CCP は非許容.

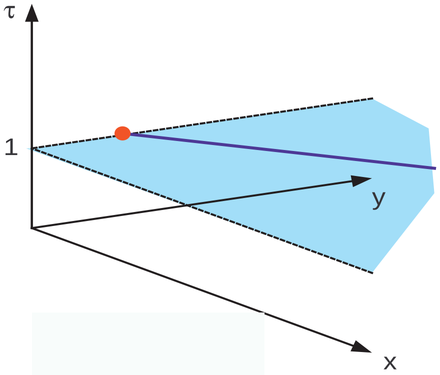
この場合，$(x(0)/\kappa(0), y(0)/\kappa(0))$ は
元の問題 CCP の非許容を判定する情報（分離超平面）を与える.

	$\kappa(0) = 0$	$\kappa(0) > 0$
$\tau(0) = 0$	**非許容** **例 3**	**非許容** **(判定のための情報)** **例 4**
$\tau(0) > 0$	**可解** **(元の問題の解)** **例 1, 2**	—

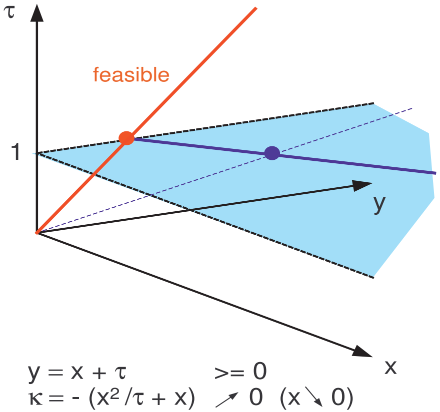
例 1: $K = \mathbb{R}^1_+, F(x,y) = y - (x+1)$ (**狭義許容 (strictly feasible)**)



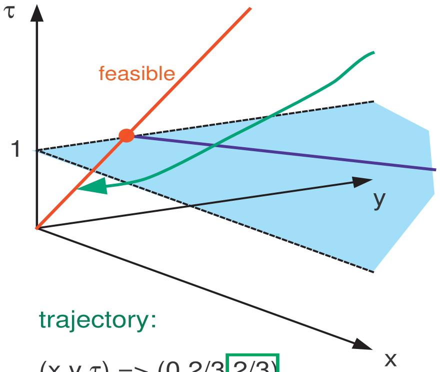
例 1: $K = \mathbb{R}^1_+,\ F(x,y) = y - (x+1)$ (**狭義許容 (strictly feasible)**)



例 1: $K = \mathbb{R}^1_+$, $F(x,y) = y - (x+1)$ (**狭義許容 (strictly feasible)**)



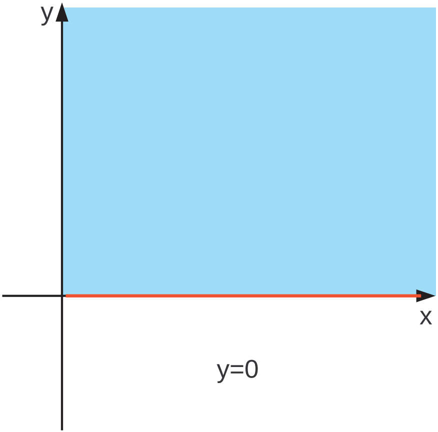
例 1: $K = \mathbb{R}^1_+,\ F(x,y) = y - (x+1)$ (**狭義許容 (strictly feasible)**)



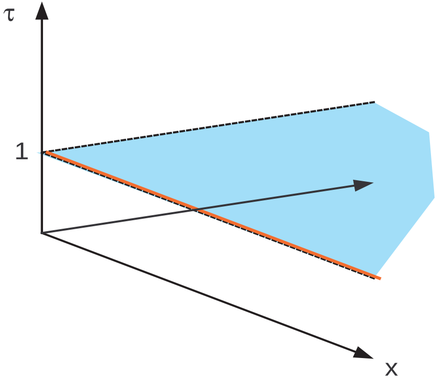
trajectory:

(x,y,τ) => (0,2/3,$\boxed{2/3}$)
(x/τ, y/τ) => (0,1)
κ => $\boxed{0}$

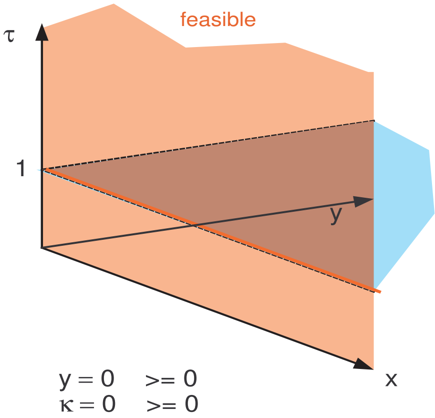
例 2: $K = \mathbb{R}^1_+, F(x, y) = y$ (**許容**)



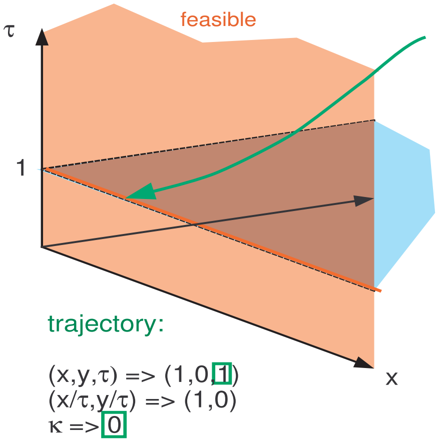
例 2: $K = \mathbb{R}^1_+, F(x, y) = y$ (**許容**)



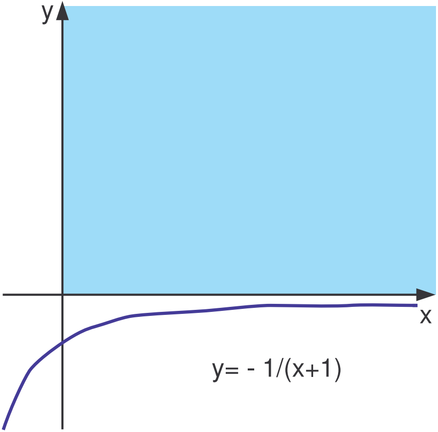
例 2: $K = \mathbb{R}^1_+, F(x, y) = y$ (**許容**)



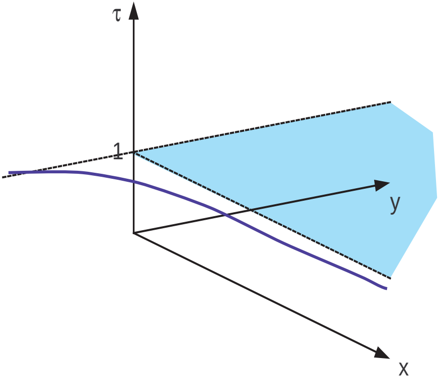
例 2: $K = \mathbb{R}^1_+, F(x,y) = y$ (**許容**)



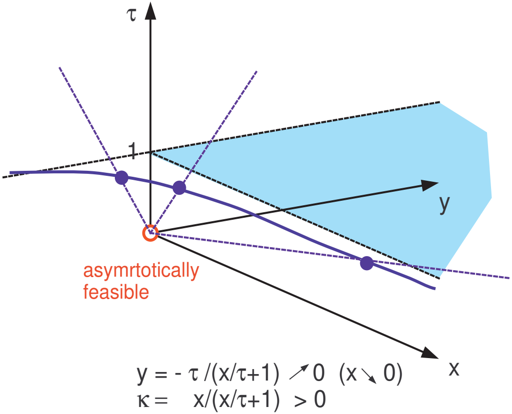
例 3: $K = \mathbb{R}^1_+, F(x,y) = y - \frac{1}{x+1}$ **(漸近的許容)**



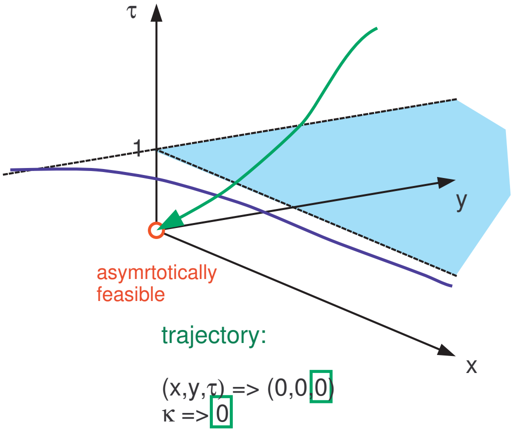
例 3: $K = \mathbb{R}^1_+, F(x,y) = y - \frac{1}{x+1}$ **(漸近的許容)**



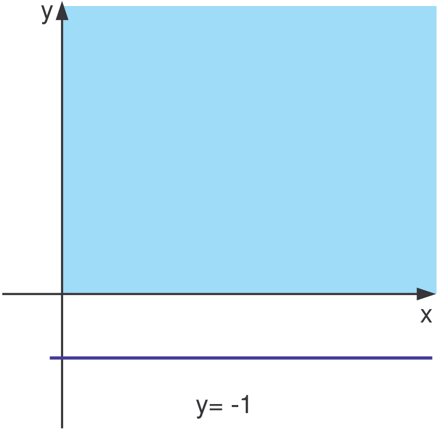
例 3: $K = \mathbb{R}^1_+$, $F(x,y) = y - \frac{1}{x+1}$ (漸近的許容)



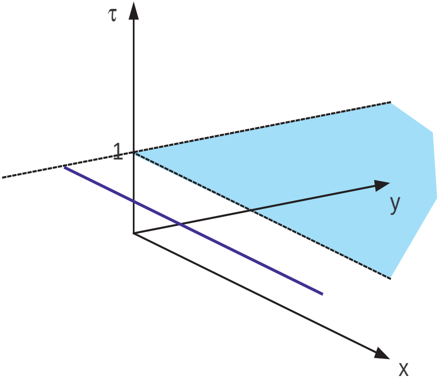
例 3: $K = \mathbb{R}^1_+$, $F(x,y) = y - \frac{1}{x+1}$ **(漸近的許容)**



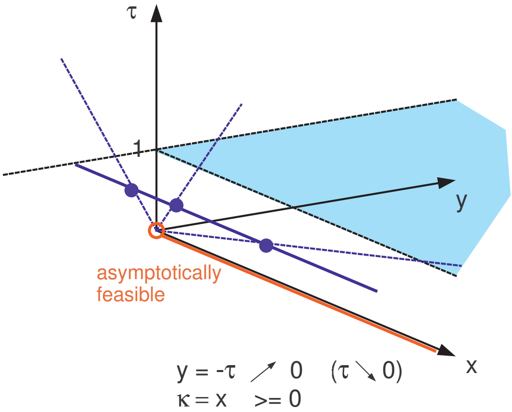
例 4: $K = \mathbb{R}^1_+,\ F(x,y) = y + 1$ (**強非許容 (strongly infeasible)**)



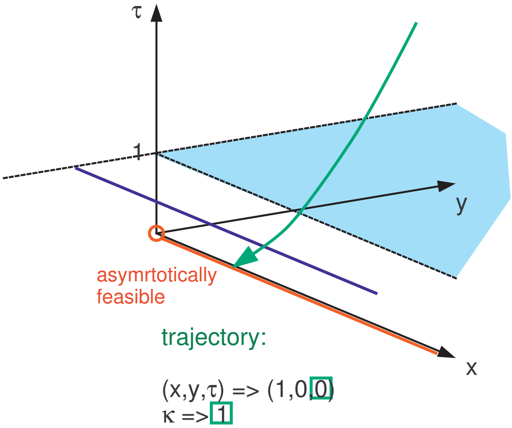
例 4: $K = \mathbb{R}^1_+$, $F(x, y) = y + 1$ (**強非許容 (strongly infeasible)**)



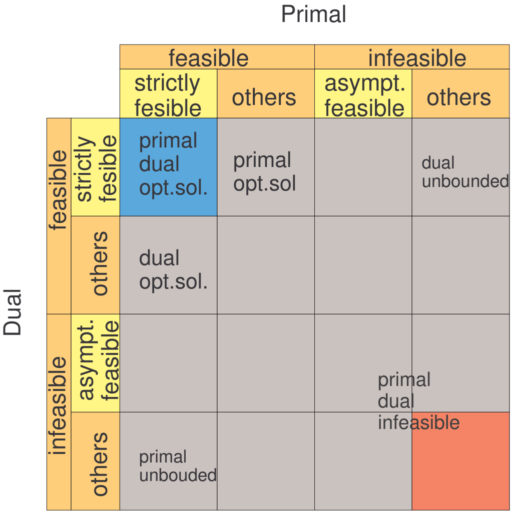
例 4: $K=\mathbb{R}^1_+,\ F(x,y)=y+1$ (**強非許容 (strongly infeasible)**)



例 4: $K = \mathbb{R}^1_+, F(x, y) = y + 1$ (**強非許容 (strongly infeasible)**)



相補性問題 CCP に対する同次モデルで判定できるケース



線形な錐最適化問題に限定した場合に判定できるケース

			Primal			
			feasible		infeasible	
			strictly fesible	others	asympt. feasible	others
Dual	feasible	strictly fesible	primal dual opt.sol.	primal opt.sol		dual unbounded
		others	dual opt.sol.			
	infeasible	asympt. feasible			primal dual infeasible	
		others	primal unbouded			

目次

- 内点法写像の拡張可能性 1：**CP-関数を用いた平滑化（半平滑化）法**
  - **CP-関数** $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $[\phi(a,b) = 0 \iff (a,b) \geq (0,0),\ \ ab = 0]$
  - **CP-関数の例** [Chen and Mangasarian 1995, Fischer 1992, Chen and Harker 1993, Kanzow 1996, Smale 1986], etc.

$$\begin{aligned}\phi(a,b) &= a - (a-b)_+ = a - \max\{0, a-b\}\\ \phi(a,b) &= a + b - \sqrt{a^2 + b^2}\\ \phi(a,b) &= a + b - \sqrt{(a-b)^2}\end{aligned}$$

  - K **が非負象限の場合の同型写像とパスの存在** [Hotta and Yoshise 1999]
  - **対称錐への拡張** [Tseng 1998, Gowda, Sznajder and Tao 2004, Kong, Tunçel and Xiu 2006], etc.
  - **単調テンソル相補性問題への拡張** [Zhang, Sun and Luan 2023], etc.

- 内点法写像の拡張可能性 2：**リーマン多様体上のホモトピー法**

参考文献 I

[Alizadeh 2012] Alizadeh, F. (2012). An introduction to formally real Jordan algebras and their applications in optimization. *Handbook on Semidefinite, Conic and Polynomial Optimization*, 297-337.

[Ambrosetti and Prodi 1995] Ambrosetti, A., & Prodi, G. (1995). *A primer of nonlinear analysis (No. 34)*. Cambridge University Press.

[Brouwer 1912] Brouwer, L. E. J. (1912). Continuous one-one transformations of surfaces in themselves (5th communication.). *Proc. of the Section of Sciences, K. Nederlandse Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, 15*, 352-360.

[Chen and Harker 1993] Chen, B., & Harker, P. T. (1993). A non-interior-point continuation method for linear complementarity problems. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 14*(4), 1168-1190.

[Chen and Mangasarian 1995] Chen, C., & Mangasarian, O. L. (1995). Smoothing methods for convex inequalities and linear complementarity problems. *Mathematical programming, 71*(1), 51-69.

[Chi, Gowda and Tao 2019] Chi, X., Gowda, M. S., & Tao, J. (2019). The weighted horizontal linear complementarity problem on a Euclidean Jordan algebra. *Journal of Global Optimization, 73*(1), 153-169.

[Chua and Yi 2010] Chua, C. B., & Yi, P. (2010). A continuation method for nonlinear complementarity problems over symmetric cones. *SIAM Journal on Optimization, 20*(5), 2560-2583.

[Güler 1993] Güler, O. (1993). Existence of interior points and interior paths in nonlinear monotone complementarity problems. *Mathematics of Operations Research, 18*(1), 128-147.

参考文献 II

[Faraut and Korányi 1994] Faraut, J., & Korányi, A. (1994). *Analysis on symmetric cones*. Oxford University Press.

[Faybusovich 1997] Faybusovich, L. (1997). Euclidean Jordan algebras and interior-point algorithms. *Positivity, 1*, 331-357.

[Fischer 1992] Fischer, A. (1992). A special Newton-type optimization method. *Optimization, 24*(3-4), 269-284.

[Gowda, Sznajder and Tao 2004] Gowda, M. S., Sznajder, R., & Tao, J. (2004). Some P-properties for linear transformations on Euclidean Jordan algebras. *Linear algebra and its applications, 393*, 203-232.

[Hauser and Güler 2002] Hauser, R. A., & Güler, O. (2002). Self-scaled barrier functions on symmetric cones and their classification. *Foundations of Computational Mathematics, 2*, 121-143.

[Hotta and Yoshise 1999] Hotta, K., & Yoshise, A. (1999). Global convergence of a class of non-interior point algorithms using Chen-Harker-Kanzow-Smale functions for nonlinear complementarity problems. *Mathematical Programming, 86*, 105-133.

[Jordan, Neumann and Wigner 1934] Jordan, P., Neumann, J. V., & Wigner, E. (1934). On an Algebraic Generalization of the Quantum Mechanical Formalism. *Annals of Mathematics, 35*(1), 29-64.

[Kanzow 1996] Kanzow, C. (1996). Some noninterior continuation methods for linear complementarity problems. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 17*(4), 851-868.

参考文献 III

[Koecher 1999] Koecher, M. (1999). *The Minnesota notes on Jordan algebras and their applications* (Vol. 1710). Springer Science & Business Media. Edited by Kreig, A. and Walcher, S. based on Lectures given at The University of Minnesota (1960)

[Kojima, Megiddo and Noma 1991] Kojima, M., Megiddo, N., & Noma, T. (1991). Homotopy continuation methods for nonlinear complementarity problems. *Mathematics of Operations Research, 16*(4), 754-774.

[Kong, Tunçel and Xiu 2006] Kong, L., Tunçel, L., & Xiu, N. (2009). Vector-valued implicit Lagrangian for symmetric cone complementarity problems. *Asia-Pacific Journal of Operational Research, 26*(02), 199-233.

[Megiddo 1989] Megiddo, N. (1989). Pathways to the optimal set in linear programming. In *Progress in Mathematical Programming: Interior-point and Related Methods* (pp. 131-158). New York, NY: Springer New York.

[Monteiro and Pang 1996] Monteiro, R. D., & Pang, J. S. (1996). Properties of an interior-point mapping for mixed complementarity problems. *Mathematics of Operations Research, 21*(3), 629-654.

[Monteiro and Pang 1998] Monteiro, R. D., & Pang, J. S. (1998). On two interior-point mappings for nonlinear semidefinite complementarity problems. *Mathematics of Operations Research, 23*(1), 39-60.

[Nesterov and Todd 1997] Nesterov, Y. E., & Todd, M. J. (1997). Self-scaled barriers and interior-point methods for convex programming. *Mathematics of Operations Research, 22*(1), 1-42.

参考文献 IV

[Ortega and Rheinboldt 1970] Ortega, J. M., & Rheinboldt, W. C. (1970). *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables* (Vol. 30). SIAM.

[Renegar 2001] Renegar, J. (2001). *A Mathematical View of Interior-point Methods in Convex Optimization*. Society for Industrial and Applied Mathematics.

[Shida, Shindoh and Kojima 1997] Shida, M., Shindoh, S., & Kojima, M. (1997). Centers of monotone generalized complementarity problems. *Mathematics of Operations Research, 22*(4), 969-976.

[Smale 1986] Smale, S., Algorithms for Solving Equations. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Berkeley, California, pp. 172-195, 1986.

[Tang and Zhou 2023] Tang, J., & Zhou, J. (2023). The solvability of weighted complementarity problems and a smoothing Newton algorithm under the local error bound. *Optimization*, 1-31.

[Tseng 1998] Tseng, P. (1998). An incremental gradient (-projection) method with momentum term and adaptive stepsize rule. *SIAM Journal on Optimization, 8*(2), 506-531.

[Yoshise 2007] Yoshise, A. (2007). Interior point trajectories and a homogeneous model for nonlinear complementarity problems over symmetric cones. *SIAM Journal on Optimization, 17*(4), 1129-1153.

[Zhang, Sun and Luan 2023] Zhang, L., Sun, D., & Luan, Z. (2023). Solvability of monotone tensor complementarity problems. *Science China Mathematics, 66*(3), 647-664.