「オンライン組合せ最適化とリグレット解析」 演習問題

問題 1 (ダブリングトリック)**.** ハイパーパラメータ T' をもつオンライン学習アルゴリズムがあり，任意の $T \leq T'$ に対して $R_T \leq C\sqrt{T'}$ を満たすと仮定する．ただし，$C > 0$ は T および T' に依存しない定数とする．また，このアルゴリズムではハイパーパラメータ T' は事前に設定され，アルゴリズムの実行中に変更することはできないものとする．

　このようなアルゴリズムに対して，T' の設定とリスタートを適切に繰り返すことで，任意の T に対して $R_T = O(C\sqrt{T})$ を満たすアルゴリズムを構成できることを示せ．

問題 2. 凸集合の組 $X \subseteq \mathbb{R}^d, Y \subseteq \mathbb{R}^d$ に対して，任意の $x \in X, y \in Y$ に対して $|x^\top y| \leq 1$ が成り立つと仮定する．ベクトル $y \in Y$ の入力に対して $\arg\min_{x \in X} y^\top x$ の元を返す，X 上の線形最適化オラクルが与えられているとする．このとき，$\{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \subseteq Y$ が与えられたときに，次の最適化問題を考える：

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & f(x) := \displaystyle\max_{j \in \{1,\ldots,n\}} \{y_j^\top x\} \\ \text{subject to} & x \in X \end{array}$$

線形最適化オラクルを用いてこの最適化問題の近似解を求めるアルゴリズムを設計せよ．具体的には，任意の所与の $\epsilon > 0$ に対して $f(\hat{x}) - \min_x f(x) \leq \epsilon$ を満たす $\hat{x}$ を求めるアルゴリズムを設計し，その際に線形最適化オラクルを呼び出す回数を評価せよ．

問題 3. エキスパート問題において，任意の決定的（deterministic）アルゴリズムについて最悪ケースのリグレットが $\Omega(T)$ であることを示せ．

問題 4 (適応的ステップサイズ)**.** 時変ステップサイズ η_t をもつオンライン学習アルゴリズムについて，リグレットが次の形式の上界をもつことを仮定する：

$$R_T \leq \sum_{t=1}^{T} \eta_t z_t + \frac{1}{\eta_{T+1}} h.$$

ここで任意の t について $0 \leq z_t < \bar{z}$, $h > 0$ とする．パラメータ η_t を $\eta_t = \Theta\left(\sqrt{\frac{h}{\bar{z} + \sum_{s=1}^{t-1} z_t}}\right)$ としたとき，任意の T について $R_T = O\left(\sqrt{h \cdot (\bar{z} + \sum_{t=1}^{T} z_t)}\right)$ が成り立つことを示せ．

問題 5. 講義中で扱ったアルゴリズムと問題 4 の結果を組み合わせることでどのようなリグレット上界を導けるか考察せよ．特に，オンライン勾配降下法と Hedge アルゴリズムについて，g_t および ℓ_t に依存するリグレット上界を示せ．

問題 6. 確率単体 $\Delta(N)$ 上で (1/2)-Tsallis エントロピー $\psi : \Delta(N) \to \mathbb{R}$ は次のように定義される：

$$\psi(x) = -\sum_{i=1}^{N} \sqrt{x(i)}. \tag{1}$$

この (1/2)-Tsallis エントロピーについて次のことを示せ．

(i) 任意の $\eta > 0$, $\ell \in \mathbb{R}^N_{\geq 0}$, $x, y \in \Delta(N)$ について，$\ell^\top (x - y) - \frac{1}{\eta} D_\psi(y, x) = O(\eta \sum_{i=1}^{N} x(i)^{3/2} \ell(i)^2)$ が成り立つ．

(ii) 多腕バンディット問題に対する EXP3 アルゴリズムにおいて，$\psi(x) = \sum_{i=1}^{N} x(i) \log x(i)$ の代わりに式 (1) で与えられる (1/2)-Tsallis エントロピーを用いたとき，リグレットの上界が $O(\sqrt{NT})$ に改善する．

問題 7. セミバンディットフィードバックに基づくオンライン凸最適化において，$\psi(x) = \sum_{i=1}^{N} x(i) \log x(i)$ の代わりに式 (1) で与えられている ψ を用いたとき，リグレット上界がどのように変わるか評価せよ．

問題 8. Follow-the-perturbed-leader アルゴリズムにおいて，r_t の分布として $[0,1]^N$ 上一様分布とは異なる分布を用いることで性能が改善するケースをみつけよ．

問題 9. 講義中で扱った，完全情報オンライン組合せ最適化問題に対する Hedge アルゴリズムに基づくアプローチにおいて，下記のそれぞれの場合で効率的な（例えば N について多項式時間で実行可能な）サンプリングの方法を示せ．

(i) $A = \{0,1\}^N$ の場合

(ii) $A = \{a \in \{0,1\}^N \mid \|a\|_1 = m\}$ の場合

(iii) (i)(ii) 以外の，非自明で面白い例

問題 10. ベクトル集合 $A \subseteq \mathbb{R}^N$ についての G-optimal design を近似的に計算するアルゴリズムを設計し，その近似精度と計算量を評価せよ．ここで，所与の半正定値行列 $S \in \mathbb{R}^N$ に対して $\arg\max_{a \in A}\{a^\top S a\}$ の元を出力するオラクルが与えられていることを仮定する．