組合せ最適化セミナー 2025　　2025 年 7 月 23 日

カオスの計算量

滋賀大学 データサイエンス学部
来嶋 秀治 (Shuji Kijima)

講義資料: `https://shuji-kijima.com/index_j.html`
連絡先: shuji-kijima@biwako.shiga-u.ac.jp

1. 基礎的な話題

1.1. 次の判定問題の（時間，領域それぞれ）を求めよ．計算モデルは適当に設定すること．
ヒント：「通常のコンピュータ」（RAM を仮定，ただし多倍長演算）でよい．
(1) 整数 u, v, w の入力に対し，$u + v = w$ が正しいか否か．
(2) 入力 $\frac{u_1}{v_1}, \frac{u_2}{v_2}, \frac{u_3}{v_3}$ はそれぞれ既約分数とし，$v_1, v_2, v_3 > 0$ とする．$\frac{u_1}{v_1} + \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3}$ が正しいか否か．

1.2. $u, v \in [0, 1]$ は 10 進小数とする．$\langle u \rangle_k$ は k 桁丸め（$k + 1$ 桁目で四捨五入）を表す．すなわち $\forall u, |u - \langle u \rangle_k| \leq 5 \times 10^{-(k+1)}$ で，$\exists u, |u - \langle u \rangle_k| \geq 5 \times 10^{-(k+1)}$ である．
(1) $|u + v - \langle u + v \rangle_k|$ の上下界を求めよ．
(2) $|uv - \langle uv \rangle_k|$ の上下界を求めよ．

1.3. 次の実数の上下界を求めよ．
ヒント：10 進表記は正の場合が下界表現，負の場合が上界表現であることを実感せよ．
(1) 円周率 π　(2) $-\sqrt{2}$　(3) 1　(4) $-\frac{1}{3}$　(5) $\frac{1}{4}$　(6) 0

1.4. 単位時間あたりランダムビット $B \in \{0, 1\}$ が 1 個生成できるとする（確率的 Turing Machine）．
(1) 確率 $1/\sqrt{2}$ を実現する方法（アルゴリズム）を設計せよ．
ヒント：一様ランダム実数 $X \in [0, 1)$ が与えられたとき，$X < 1/\sqrt{2}$ なら YES，そうでなければ NO．
ヒント 2: $1/\sqrt{2} = 0.10110101100111111011...$ らしい（「Google 検索の AI による概要」調べ）．
(2) 上記アルゴリズムの計算量を求めよ．

1.5. 次の言語に対するオートマトンを構成せよ [4].
(1) $\{w \in \{0, 1\}^* \mid w$ の最初と最後は同じ文字 $\}$
(2) $\{w \in \{0, 1\}^* \mid w$ の長さは 3 の倍数 $\}$
(3) $\{w \in \{0, 1\}^* \mid w$ は 0 を偶数個もつ $\}$
(4) $\{0^k 1^k \mid 0 \leq k \leq 10\}$
(5) $\{w \in \{0, 1\}^{2n}$ |wは0と1を同数もつ $\}$

1.6. 線形計画法が多項式時間で解けることを示せ（宿題）[3].

2. 講義の付録

2.1. テント符号の以下の性質を示せ．
(1) $x = \sum_{i=1}^{n} \mu^{-i} b_i$（復号可能性）．
(2) $x \leq x'$ なら $\gamma^n(x) \leq \gamma^n(x')$（順序保存）．
(3) $\forall x \in [0, 1), \exists \epsilon > 0, \gamma^n(x) = \gamma^n(x + \epsilon)$（右連続）．

2.2. $f^n(x)$ において各線分がテント符号と一対一に対応することを示せ：すなわち，(1) セクション内で $f^n(x)$ は単調増加または単調減少，(2) 隣り合うセクションで $f^n(x)$ の傾きの正負が異なることを示せ．

2.2. 以下の問いに答えよ．
(1) $\gamma^i(1/2 - 0)$ が $\gamma^i(1/2)$ の bit 反転であることを示せ．
(2) 講義で定義したテント言語のオートマトンが左右対称であることを示せ．
(3) $p(J, J') = p(\bar{J}, \bar{J}')$ を示せ．ただし $J = I_l$ のとき $\bar{J} = \bar{I}_l$（同様に $J = \bar{I}_l$ のとき $\bar{J} = I_l$）を表す．

2.3. $|T(\mathbf{b}0)| + |T(\mathbf{b}1)| = \mu|T(\mathbf{b})|$ を示せ．

2.4. $1 < \mu < 2$ と $\epsilon > 0$ に対して，$\mu\frac{\epsilon}{2} - \frac{1}{2^{-3\lg\epsilon/\lg\mu}} \geq \frac{\epsilon}{2}$ を示せ．
ヒント：$1 < \mu < 2$ のとき，$1/\lg\mu \geq 0.7 - \lg(\mu - 1)$ が成り立つらしい．

3．発展課題

3.1. テント写像 f_μ に対して「自然数 n と $x \in [0, 1)$ が与えられたときの $f^n(x) \leq 1/2$ の判定」を $\mathrm{o}(n)$ 時間で計算可能か（未解決）．
ヒント：計算モデルは適当に設定して（μ を入力にするか，固定パラメータとするか，x は有理数とするか，実数とするか）NP 困難性を示せるか？

3.2. ロジスティック写像（logistic map）は，定数 $1 < a < 4$ に対し $f(x) = ax(1-x)$ （$0 < x < 1$）で与えられる．
(1) ロジスティック符号を適当に定義せよ．
(2) ロジスティック符号を判定するオートマトンを作成せよ．
(3) ロジスティック符号判定の空間計算量を求めよ（未解決）．

参考文献

[1] Naoaki Okada and Shuji Kijima, The space complexity of generating tent codes, arXiv:2310.14185, 2023. `https://arxiv.org/abs/2310.14185`

[2] Naoaki Okada and Shuji Kijima, A smoothed analysis of the space complexity of computing a chaotic sequence, arXiv:2405.00327, 2024. `https://arxiv.org/abs/2405.00327`

[3] Bernhard Korte and Jens Vygen, Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms, 6th ed., Springer, 2018.

[4] Michael Sipser, Introduction to the theory of computation, 3rd ed., Cengage Learning, 2012.