# 演習問題 1. 花縮約の必要性

**Q.** 素朴に交互 BFS/DFS 的に増加道を探索すると何が困るのか？

各頂点 $v \in V$ を $v^{\mathrm{odd}}, v^{\mathrm{even}}$ に分割し，各辺 $e = \{u, w\} \in E$ を

- $e \notin M$ なら有向辺 $\left(u^{\mathrm{even}}, w^{\mathrm{odd}}\right), \left(w^{\mathrm{even}}, u^{\mathrm{odd}}\right)$
- $e \in M$ なら有向辺 $\left(u^{\mathrm{odd}}, w^{\mathrm{even}}\right), \left(w^{\mathrm{odd}}, u^{\mathrm{even}}\right)$

に置き換えて得られる有向グラフを $G_M$ とする．

(1) $G$ 中の $M$ に関する増加道 $P$ の始点を $s \in V$，終点を $t \in V$ とすると，
$P$ は $G_M$ 中で $s^{\mathrm{even}}$ から $t^{\mathrm{odd}}$ への有向パスに対応することを説明せよ．

(2) 増加道が存在するのに，$G_M$ でそのような有向パスを素朴な BFS/DFS で（木を作る形で）探索するだけでは増加道が見つけられない例を示せ．

(3) (2) の失敗を踏まえて，訪問済み頂点集合を管理するような探索を考える．
その計算量（増加道を見つけるために必要な情報）が指数的になる例を示せ．

# 演習問題 2. 最短増加道の重要性

Q. 証明せよ

**入力:** $G=(V,E)$: 無向グラフ（連結）
**目標:** 最大サイズの**マッチング** $M \subseteq E$ の発見

$n=|V|,\ m=|E|$
$\mu$: 最大サイズ

**補題 (1)** $M$ がサイズ $\mu - k$ のマッチング（$1 \le k \le \mu$）
$\Longrightarrow$ $M$ に関する増加道であって長さが $\frac{2\mu}{k}$ 未満のものが存在

**補題 (2)** $M$: 非最大マッチング, $\ell$: $M$ に関する**最短**増加道の長さ
$M \triangle M'$ は**極大な**点素最短増加道（長さが全て $\ell$）集合をなす
$\Longrightarrow$ $M'$ に関する長さ $\ell$ 以下の増加道は存在しない

[Hopcroft–Karp 1973]

# 演習問題 3. 最短交互道の BFS-honesty

※ ここでは「交互道」は全て非マッチ頂点を始点とするものを指す.

(1) 2 部グラフの場合，最短偶奇交互道が BFS-honesty を満たすことを示せ.
すなわち，任意の最短偶奇交互道 $P$ と任意の頂点 $v \in V(P)$ に対して，
$P$ の $v$ までの先頭部分路は $v$ への最短偶奇交互道であることを示せ.

(2) 一般グラフの場合，最短偶奇交互道は BFS-honesty を任意に破ることを示せ.
すなわち，任意の正整数 $k$ に対して，（なるべく小さいグラフで）
以下の条件を満たす最短偶奇交互道 $P$ と頂点 $v \in V(P)$ が存在する例を示せ.

**条件:** $P$ の $v$ までの先頭部分路の長さは，
同じ偶奇での $v$ への交互道の長さのうち小さい方から $k$ 番目に入らない.

# 演習問題 4. 単純化の効果

単純化を行った後のグラフとマッチングをそれぞれ $\tilde{G}, \widetilde{M}$ とする.

(1) $G$ 中の $M$ に関する長さ $k$ の増加道は,
$\tilde{G}$ 中で $s$ を基点とする長さ $2k + 3$ の花と 1 対 1 に対応することを説明せよ.
以降では，元の最短増加道の長さを $\ell$ として，$\tilde{\ell} \coloneqq 2\ell + 3$ とする.

(2) $\tilde{G}, \widetilde{M}$ に関する（$s$ からの）odd/even/min/maxlevel を考える.
このとき，各マッチ辺は一方の端点の minlevel を与えることを示せ.
すなわち，$s$ から交互道で到達可能な各マッチ辺 $\{u, w\} \in \widetilde{M}$ に対して,

- $\mathrm{minlevel}(u) = \mathrm{evenlevel}(u) = \mathrm{oddlevel}(w) + 1$
- $\mathrm{minlevel}(w) = \mathrm{evenlevel}(w) = \mathrm{oddlevel}(u) + 1$

のいずれか一方 (のみ) が成り立つことを示せ.

# 演習問題 5. 最短偶奇交互道の構造定理

tenacity としてあり得る最小値を $t_{\min}$ とする.

$t_v = t_{\min}$ のとき，以下の補題の主張が成り立つことを示せ.

ヒント: (1) 先頭部分路の共通部分が最長になるような $P_v$ を取る

(2), (3) 先に $P_v$ を固定してから $Q_v$ を任意に取って背理法

<u>**補題**</u> $t_v \coloneqq \mathrm{tenacity}(v) < +\infty,\ P_v, Q_v$: 頂点 $v$ への min/maxlevel パス

(1) $Q_v$ は $\mathrm{tenacity}(e) = t_v$ の橋 $e$ を通り，そのような橋は唯一

(2) $P_v, Q_v$ 上で $\mathrm{tenacity}(b) > t_v$ となる最後の頂点 $b$ はパスに依らず共通

(3) $P_v, Q_v$ は，$s$ から $b$ への minlevel = evenlevel パスと，$b$ から $v$ への非マッチ辺で始まる偶奇交互道のうち最短のものに分解できる

# 演習問題 6. 均し計算量解析

Hopcroft–Karp の解析を利用して,
素朴な増加道アルゴリズムの計算量に関して以下の主張を示せ.

(1) $\mathrm{FP}(n, m, \mu) = \mathrm{O}(\ell)$ のとき，全体の計算量は $\mathrm{O}(\mu \log \mu)$ である.

(2) $\mathrm{FP}(n, m, \mu) = \mathrm{O}(\min\{\ell^2, \mu\})$ のとき，全体の計算量は $\mathrm{O}(\mu^{1.5})$ である.

**<u>補題</u>** $M$ がサイズ $\mu - k$ のマッチング $(1 \leq k \leq \mu)$
$\Longrightarrow$ $M$ に関する増加道であって長さが $\frac{2\mu}{k}$ 未満のものが存在

[Hopcroft–Karp 1973]

# 演習問題 7. 最小外向辺とその改良の必要性

増加道が存在するとし，マッチ辺を細分する単純化（のみ）を行った状況を考える．

最短増加道の一方の端点 $s$ からの odd/even/min/maxlevel が既知であるとき，
各頂点 $v \in V \setminus \{s\}$ について $\mathrm{minlevel}(v)$ を与える親辺を任意に 1 つ選ぶことで
構成される根付き木を**交互ベース木 (ABT)** と呼ぶ．

各頂点について，ABT における部分木の内外を跨ぐ非木辺を**外向辺**と呼び，
各頂点について外向辺を 1 本選んで ABT に追加して得られるグラフを $H$ とする．

(1) 一般に，$H$ が増加道を含むとは限らないことを示せ．

(2) 外向辺のうち，両端の evenlevel の最大値が最小の辺を選ぶとする．
このとき，$H$ が**最短**増加道を含むとは限らないことを示せ．