

禁止部分グラフが与える グラフ構造への影響

古谷 倫貴（関西学院大学）

今回の内容

- 1 禁止部分グラフとは
 - 定義
 - 小さい禁止部分グラフ
 - 遺伝的性質
- 2 部分構造の発見
 - 完全マッチング
 - ハミルトン性
- 3 禁止部分グラフの差
 - 差・対称差の有限性
 - 差の良い特徴付け
- 4 強い禁止部分グラフ
- 5 不変量版ラムゼー問題

講義 ①

講義 ②

講義 ③

1. 禁止部分グラフとは

1. 禁止部分グラフとは

禁止部分グラフの定義

G をグラフとする.

■ グラフ H について,

ある集合 $X \subseteq V(G)$ に対して $V(G') = X$ かつ $E(G') = \{xy \in E(G) : x, y \in X\}$ を満たす G'

➤ G が H と同型なグラフを誘導部分グラフとして含むとき, $H \leq G$ と表す.

➤ $H \not\leq G$ であるとき, G は H -free であるという.

■ グラフの集合 $\mathcal{H}$ について, “ $\forall H \in \mathcal{H}, G$ は H -free” を満たすとき, G は $\mathcal{H}$ -free であるという.

■ $\mathcal{H}$ -free 性を考えるとき, $\mathcal{H}$ に属するグラフを禁止部分グラフという.

1. 禁止部分グラフとは

禁止部分グラフの定義

G をグラフとする.

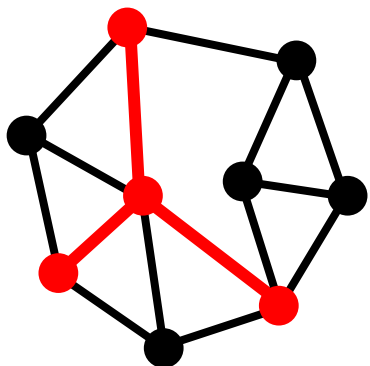
■ グラフ H について,

➤ G が H と同型なグラフを誘導部分グラフとして含むとき, $H \leq G$ と表す.

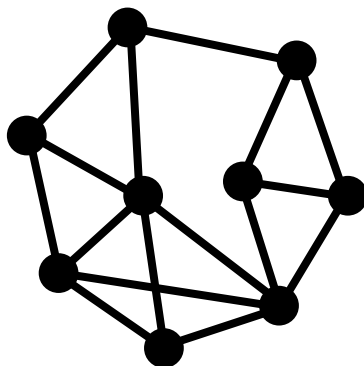
➤ $H \not\leq G$ であるとき, G は H -free であるという.

■ グラフの集合 $\mathcal{H}$ について, “ $\forall H \in \mathcal{H}, G$ は H -free” を満たすとき, G は $\mathcal{H}$ -free であるという.

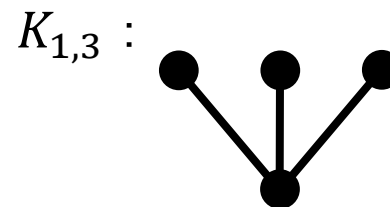
ある集合 $X \subseteq V(G)$ に対して $V(G') = X$ かつ $E(G') = \{xy \in E(G) : x, y \in X\}$ を満たす G'



$K_{1,3}$ -free ではない



$K_{1,3}$ -free



$K_{1,3}$:

1. 禁止部分グラフとは

禁止部分グラフの定義

G をグラフとする.

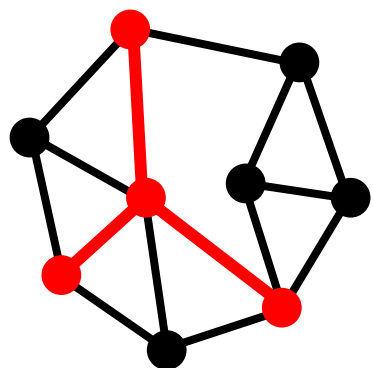
■ グラフ H について,

ある集合 $X \subseteq V(G)$ に対して $V(G') = X$ かつ $E(G') = \{xy \in E(G) : x, y \in X\}$ を満たす G'

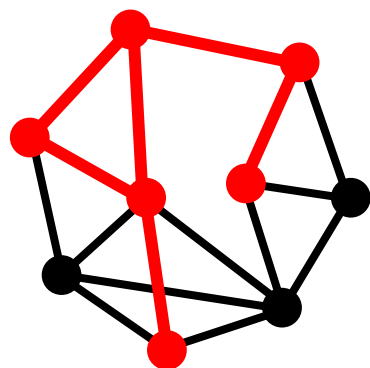
➤ G が H と同型なグラフを誘導部分グラフとして含むとき, $H \leq G$ と表す.

➤ $H \not\leq G$ であるとき, G は H -free であるという.

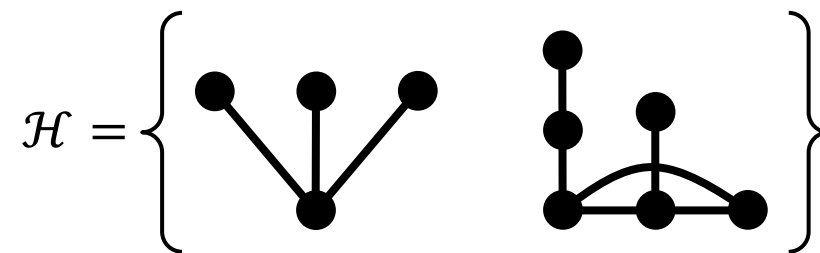
■ グラフの集合 $\mathcal{H}$ について, “ $\forall H \in \mathcal{H}, G$ は H -free” を満たすとき, G は $\mathcal{H}$ -free であるという.



$\mathcal{H}$ -free ではない



$\mathcal{H}$ -free ではない



1. 禁止部分グラフとは

禁止部分グラフ条件の強弱

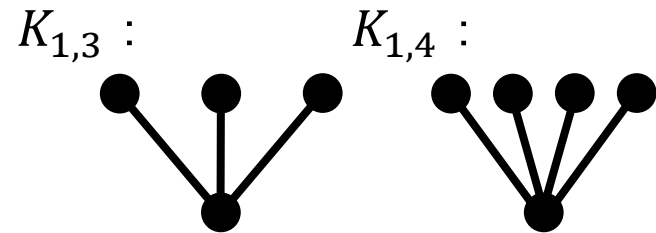
- グラフに関する二項関係 $\leq$ は、半順序関係となる。

⚠ 反対称律は $H_1 \leq H_2$ かつ $H_2 \leq H_1 \Rightarrow H_1 \simeq H_2$.

- グラフ H_1, H_2 が $H_1 \leq H_2$ を満たすとき,
 - グラフ G が H_1 -free $\Rightarrow G$ が H_2 -free.
 - 特に, $(H_1\text{-free グラフ全体}) \subseteq (H_2\text{-free グラフ全体})$.

例

- $K_{1,3}$ -free グラフは $K_{1,4}$ -free グラフである.
- $K_{1,4}$ -free だが $K_{1,3}$ -free ではないグラフは数多く存在.
(内周の大きい cubic グラフなど)



1. 禁止部分グラフとは

禁止部分グラフ条件の強弱

- グラフの集合 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ が

$$\forall H_2 \in \mathcal{H}_2, \exists H_1 \in \mathcal{H}_1 \text{ s.t. } H_1 \preceq H_2$$

を満たすとき, $\mathcal{H}_1 \leq \mathcal{H}_2$ と書く (cf. Fujita et al., 2006).

 集合に関する二項関係 $\leq$ は, 反対称律を満たさない (例: $\{K_{1,3}, K_{1,4}\}$ と $\{K_{1,3}\}$).

- グラフの集合 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ が $\mathcal{H}_1 \leq \mathcal{H}_2$ を満たすとき,
 - グラフ G が $\mathcal{H}_1$ -free $\implies G$ が $\mathcal{H}_2$ -free.
 - 特に $(\mathcal{H}_1\text{-free グラフ全体}) \subseteq (\mathcal{H}_2\text{-free グラフ全体})$.

1. 禁止部分グラフとは

位数が 3 以下の禁止部分グラフ

■ G が K_1 -free $\Leftrightarrow V(G) = \emptyset$



■ G が K_2 -free $\Leftrightarrow E(G) = \emptyset$ ($\Leftrightarrow G \simeq \overline{K_n}$)



■ G が $\overline{K_2}$ -free $\Leftrightarrow G \simeq K_n$ ($\because G$ が H -free $\Leftrightarrow \overline{G}$ が $\overline{H}$ -free)



■ G が K_3 -free $\Leftrightarrow \text{girth}(G) \geq 4$



■ G が $\overline{K_3}$ -free $\Leftrightarrow \alpha(G) \leq 2$



■ G が P_3 -free $\Leftrightarrow G$ の各連結成分が完全グラフ



■ G が $(K_2 \cup K_1)$ -free $\Leftrightarrow G$ は完全多部グラフ

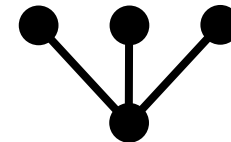


1. 禁止部分グラフとは

位数が 4 の禁止部分グラフ

■ $K_{1,3}$ -free (claw-free)

- 本質的な“枝分かれ”や“Tutte 型集合”の制御
- Ryjáček closure (Ryjáček, 1997)
claw-free のハミルトン性の基本技法
- Claw-free グラフの分類
 (“Claw-free graphs” I — VII; Chudnovsky and Seymour, 2007 — 2012)



■ P_4 -free 性

- G が P_4 -free $\Leftrightarrow G$ がコグラフ (Corneil et al., 1981 ・ 演習問題)

⚠ 次のように再帰的に定義されるグラフを **コグラフ** (complement-reducible **graph**) という.

- ✓ K_1 はコグラフ
- ✓ G_1, G_2 が (点素な) コグラフであるとき, $G_1 \cup G_2$ (和) と $G_1 + G_2$ (ジョイン) もコグラフ

- G が連結かつ P_4 -free $\Rightarrow$ 全域部分グラフで, 完全 2 部グラフとなるものが存在 (Seinsche, 1974)



1. 禁止部分グラフとは

■ 禁止部分グラフを用いた研究

禁止グラフ条件が登場する場面は、大きく分けて 2 種類 (細かく分けて 4 種類) :

- 遺伝的性質の特徴付け
 - グラフの各種性質の “良い” 十分条件
 - アルゴリズム
 - 部分構造の発見
 - 不変量のコントロール
- } 今日のメインはここ

1. 禁止部分グラフとは

遺伝的性質

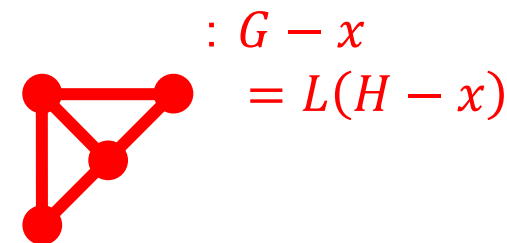
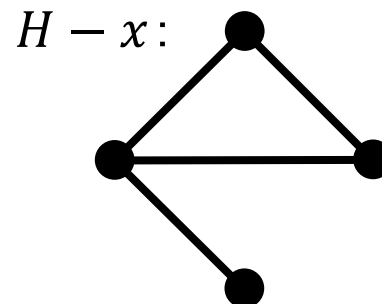
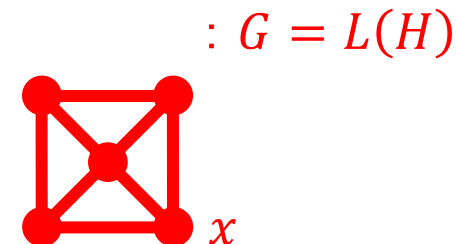
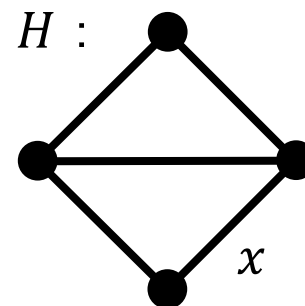
グラフに関する性質 P が

“ P を満たすグラフ G の任意の誘導部分グラフは P を満たす”

を満たすとき、 P は**遺伝的**であるという。

例

- G は 2 部グラフである.
- G はあるグラフのライングラフである.
- G は区間グラフである.



1. 禁止部分グラフとは

遺伝的性質

グラフに関する性質 P が

“ P を満たすグラフ G の任意の誘導部分グラフは P を満たす”

を満たすとき, P は**遺伝的**であるという.

命題 1.

P を遺伝的性質とするとき, 集合

$$\mathcal{H}_P := \left\{ H : \begin{array}{l} H \text{ は } P \text{ を満たさない} \\ \text{任意の } H' \preceq H \text{ は } P \text{ を満たす} \end{array} \right\}$$

は “グラフ G が P を満たす $\Leftrightarrow G$ は $\mathcal{H}_P$ -free” を満たす.

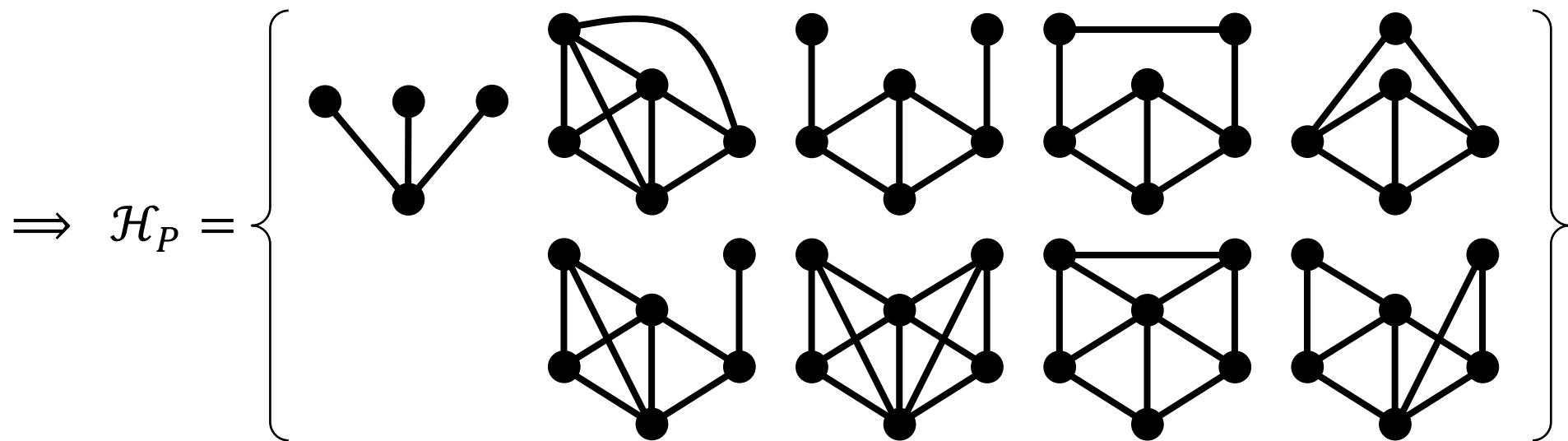
1. 禁止部分グラフとは

遺伝的性質の特徴付け

■ $P : G$ は 2 部グラフである.

$$\Rightarrow \mathcal{H}_P = \{C_{2n+1} : n \in \mathbb{N}\}$$

■ $P : G$ はあるグラフのライングラフである.



(Beineke, 1968 / Robertson, 1969)

1. 禁止部分グラフとは

遺伝的性質の特徴付け

■ $P : G$ は区間グラフである.

$$\Rightarrow \mathcal{H}_P = \left\{ C_n \ (n \geq 4) \quad \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \quad | \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} \quad \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \quad \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \quad \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \right\}$$

$(n \geq 2) \qquad (n \geq 1)$

(Lekkerkerker and Boland, 1962)

■ $P : G$ は理想グラフ (任意の誘導部分グラフ H について $\chi(H) = \omega(H)$) である.

$$\Rightarrow \mathcal{H}_P = \{C_{2n+1}, \overline{C_{2n+1}} : n \geq 2\} \quad (\text{強理想グラフ定理 : Chudnovsky et al., 2006})$$

2. 部分構造の発見

2. 部分構造の発見

禁止部分グラフと完全マッチング

定理 2. (Sumner, 1974 / Las Vergnas, 1975)

偶位数の連結 claw-free グラフ G は完全マッチングを持つ.

【証明】

G が完全マッチングを持たないと仮定し, G の最小 Tutte 集合 $S \subseteq V(G)$ をとる.

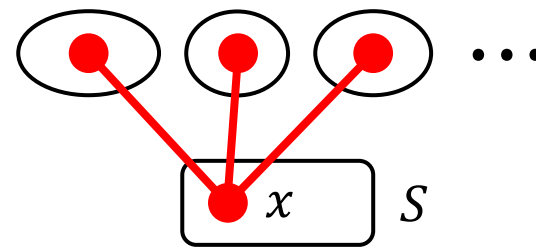
⚠ $S \subseteq V(G)$ が G の **Tutte 集合** $\Leftrightarrow \text{odd}(G - S) > |S|$

すると $S \neq \emptyset$ かつ, 任意の $x \in S$ が $G - S$ の少なくとも 3 つの奇成分と隣接する.

G が偶位数かつ連結

S の最小性

このとき, $K_{1,3} \leq G$ となり, 矛盾が生じる. $\square$



2. 部分構造の発見

禁止部分グラフと完全マッチング

定理 2. (Sumner, 1974 / Las Vergnas, 1975)

偶位数の連結 claw-free グラフ G は完全マッチングを持つ。

各条件は必要？

■ 偶位数性 … 禁止部分グラフで位数の偶奇のコントロールは不可能

⚠ 一般に、禁止部分グラフでコントロールしにくい“自明な必要条件”は、別で仮定しておく場合が多い (位数の偶奇, 連結性, 連結度, 次数条件など).

■ 連結性 … グラフが偶位数でも, 連結成分が偶位数とは限らない

■ claw-free 性 … $K_{1,3}$ 自体が完全マッチングを持たない偶位数連結グラフ

⚠ 簡単のため, これ以降は禁止部分グラフとして連結なもののみを考えることにする.

必要

(本質的に)
必要

必要

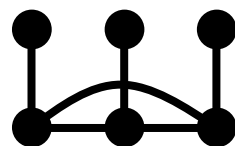
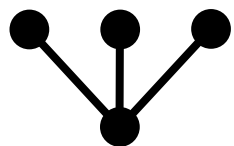
2. 部分構造の発見

禁止部分グラフとハミルトン性

ハミルトン道 / ハミルトン閉路の存在性を保証する (1 個の) 禁止グラフは何か？

■ 自明な (かつ代表的な) 必要条件はそれぞれ “**連結**” と “**2-連結**”.

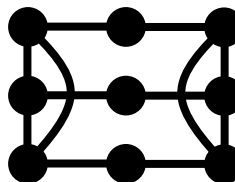
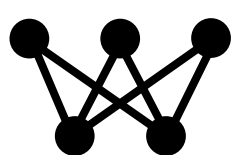
■ 下の 2 つのグラフはハミルトン道を持たない.



▶ これらに共通する (連結) 誘導部分グラフを禁止する必要がある.

▶ P_3 (またはその誘導部分グラフ) が “候補” となる.

■ 下の 2 つのグラフはハミルトン閉路を持たない.



▶ これらに共通する (連結) 誘導部分グラフを禁止する必要がある.

▶ P_3 (またはその誘導部分グラフ) が “候補” となる.

2. 部分構造の発見

禁止部分グラフとハミルトン性

ハミルトン道 / ハミルトン閉路の存在性を保証する (1 個の) 禁止グラフは何か？

命題 3.

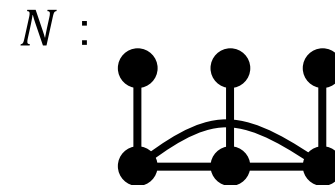
- (1) 連結 P_3 -free グラフはハミルトン道を持つ.
- (2) 2-連結 P_3 -free グラフはハミルトン閉路を持つ.

1 個の禁止グラフにすべてを背負わせようとする、極めて限定的になり得る.

▶ 2 個 (以上) の禁止グラフにすると？

定理 4. (Duffus, Gould and Jacobson, 1981)

- (1) 連結 $\{K_{1,3}, N\}$ -free グラフはハミルトン道を持つ.
- (2) 2-連結 $\{K_{1,3}, N\}$ -free グラフはハミルトン閉路を持つ.



2. 部分構造の発見

禁止部分グラフとハミルトン性

定理 4. (Duffus, Gould and Jacobson, 1981)

- (1) 連結 $\{K_{1,3}, N\}$ -free グラフはハミルトン道を持つ.
- (2) 2-連結 $\{K_{1,3}, N\}$ -free グラフはハミルトン閉路を持つ.

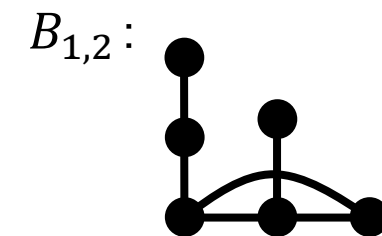
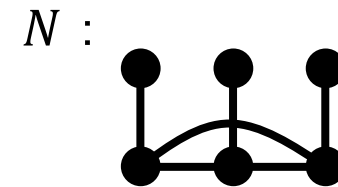
(1) の禁止グラフは必要. (2) は…?

定理 5. (Broersma and Veldman, 1990)

2-連結 $\{K_{1,3}, P_6\}$ -free グラフはハミルトン閉路を持つ.

定理 6. (Bedrossian, 1991)

2-連結 $\{K_{1,3}, B_{1,2}\}$ -free グラフはハミルトン閉路を持つ.



2. 部分構造の発見

禁止部分グラフとハミルトン性

定理 7. (Bedrossian, 1991)

$|\mathcal{H}| = 2$ を満たす連結グラフの集合 $\mathcal{H}$ について、以下は同値.

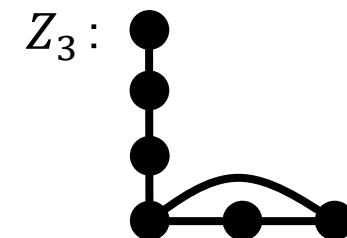
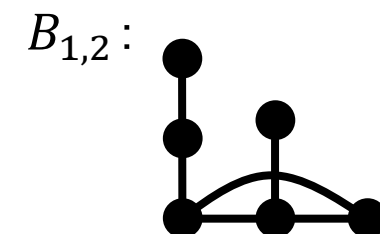
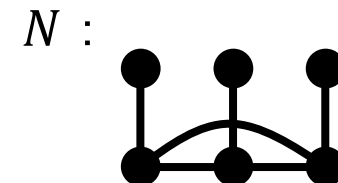
(1) “2-連結 $\mathcal{H}$ -free グラフはハミルトン閉路を持つ” を満たす.

(2) 以下のいずれかが成り立つ.

■ $\mathcal{H} \leq \{K_{1,3}, N\}$

■ $\mathcal{H} \leq \{K_{1,3}, P_6\}$

■ $\mathcal{H} \leq \{K_{1,3}, B_{1,2}\}$



定理 8. (Faudree, Gould, Ryjáček and Schiermeyer, 1995)

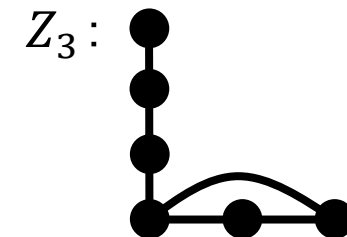
位数が 10 以上 の 2-連結 $\{K_{1,3}, Z_3\}$ -free グラフはハミルトン閉路を持つ.

2. 部分構造の発見

禁止部分グラフとハミルトン性

定理 8. (Faudree, Gould, Ryjáček and Schiermeyer, 1995)

位数が 10 以上の 2-連結 $\{K_{1,3}, Z_3\}$ -free グラフはハミルトン閉路を持つ.



位数が 9 以下の 2-連結 $\{K_{1,3}, Z_3\}$ -free グラフで、ハミルトン閉路を持たないものが 2 つだけ存在



▶ 一般に、小さい (有限個の) 例外は認めて良いのでは？

2. 部分構造の発見

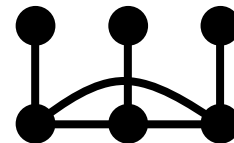
禁止部分グラフとハミルトン性

定理 9. (Faudree and Gould, 1997)

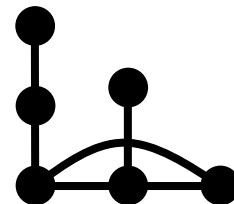
$|\mathcal{H}| = 2$ を満たす連結グラフの集合 $\mathcal{H}$ について、以下は同値.

- (1) “位数が十分大きい 2-連結 $\mathcal{H}$ -free グラフはハミルトン閉路を持つ” を満たす.
- (2) 以下のいずれかが成り立つ.
 - $\mathcal{H} \leq \{K_{1,3}, N\}$
 - $\mathcal{H} \leq \{K_{1,3}, P_6\}$
 - $\mathcal{H} \leq \{K_{1,3}, B_{1,2}\}$
 - $\mathcal{H} \leq \{K_{1,3}, Z_3\}$

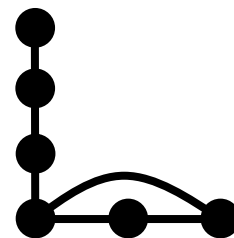
N :



$B_{1,2}$:



Z_3 :



2. 部分構造の発見

十分条件としての禁止部分グラフ

問題

性質 P に対して,

$\mathcal{H}$ -free グラフが P を満たす

となるような $\mathcal{H}$ を見つけよ / 特徴づけよ.

【注意】

- $\mathcal{H}$ の要素数は適切に設定する.
- “自明な必要条件” は禁止グラフ条件とは別で仮定する.
(位数の偶奇, 連結性, 連結度, 次数条件など)
- 位数が十分大きいグラフを対象とする.
(“性質 P を満たさないグラフの無限列” に共通する構造が禁止グラフの候補)

2. 部分構造の発見

■ 禁止部分グラフとハミルトン性

定理 10. (Faudree and Gould, 1997)

$|\mathcal{H}| = 2$ を満たす連結グラフの集合 $\mathcal{H}$ について、以下は同値.

- (1) “位数が十分大きい連結 $\mathcal{H}$ -free グラフはハミルトン道を持つ” を満たす.
- (2) $\mathcal{H} \leq \{K_{1,3}, N\}$

- $|\mathcal{H}| = 3$ の場合の特徴付け (本質的に 5 種類に分類される)
(Gould and Harris, 1995 / 1998 / 1999)

2. 部分構造の発見

■ 禁止部分グラフと完全マッチング

定理 2. (Sumner, 1974 / Las Vergnas, 1975)

偶位数の連結 claw-free グラフ G は完全マッチングを持つ.

定理 11. (Plummer and Saito, 2005)

連結グラフ H について, 以下は同値.

- (1) “位数が十分大きい偶位数の連結 H -free グラフは完全マッチングを持つ” を満たす.
- (2) $H \leq K_{1,3}$

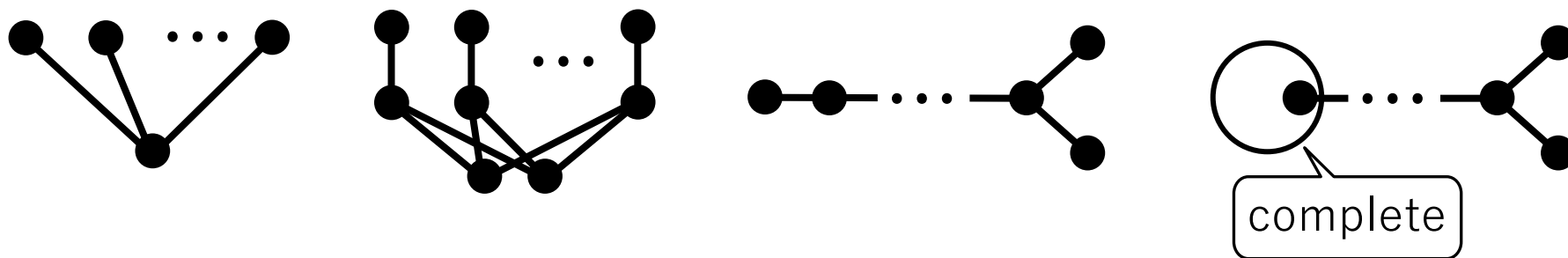
- $|\mathcal{H}| = 2$ の場合の特徴付け
(Fujita, Kawarabayashi, Lucchesi, Ota, Plummer and Saito, 2006)
- $|\mathcal{H}| = 3$ の場合の特徴付け (Ota, Plummer and Saito, 2011)

2. 部分構造の発見

禁止部分グラフと完全マッチング

- 連結グラフの集合 $\mathcal{H}$ で

“位数が十分大きい偶位数の連結 $\mathcal{H}$ -free グラフは完全マッチングを持つ”
を満たすものの特徴付け (Ota and Sueiro, 2013)



- 上の結果から “ $|\mathcal{H}| = k$ 版” の記述も可能.

3. 禁止部分グラフの差

3. 禁止部分グラフの差

禁止部分グラフ条件の強弱・相等

- 連結 $\mathcal{H}$ -free グラフ全体からなる集合を $\mathcal{G}(\mathcal{H})$ で表す.
- $\mathcal{G}(\mathcal{H}_1) \subseteq \mathcal{G}(\mathcal{H}_2)$ を満たすグラフの集合 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ と性質 P について, 2つの命題
“任意の $G \in \mathcal{G}(\mathcal{H}_1)$ が P を満たす” と “任意の $G \in \mathcal{G}(\mathcal{H}_2)$ が P を満たす”
が共に真であれば, 後者の方が強い (前者は後者の系として得られる).
- ▶ $\mathcal{G}(\mathcal{H}_1)$ と $\mathcal{G}(\mathcal{H}_2)$ に包含関係 (または同値関係) があるのは, どのようなときか?

3. 禁止部分グラフの差

禁止部分グラフ条件の強弱・相等

- 連結 $\mathcal{H}$ -free グラフ全体からなる集合を $\mathcal{G}(\mathcal{H})$ で表す.
- $\mathcal{G}(\mathcal{H}_1) \subseteq \mathcal{G}(\mathcal{H}_2)$ を満たすグラフの集合 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ と性質 P について, 2つの命題
“任意の $G \in \mathcal{G}(\mathcal{H}_1)$ が P を満たす” と “任意の $G \in \mathcal{G}(\mathcal{H}_2)$ が P を満たす”
が共に真であれば, 後者の方が強い (前者は後者の系として得られる).
“有限個の例外” まで考慮して, 次の問題を考えることにする.

問題

連結グラフの集合 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ で, 以下を満たすものの特徴は何か.

- $|\mathcal{G}(\mathcal{H}_1) \setminus \mathcal{G}(\mathcal{H}_2)| < \infty$ (本質的に $(\mathcal{H}_1\text{-free グラフ全体}) \subseteq (\mathcal{H}_2\text{-free グラフ全体})$)
- $|\mathcal{G}(\mathcal{H}_1) \triangle \mathcal{G}(\mathcal{H}_2)| < \infty$ (本質的に $(\mathcal{H}_1\text{-free グラフ全体}) = (\mathcal{H}_2\text{-free グラフ全体})$)

⚠ 集合 A, B に対して, $A \triangle B$ で A と B の対称差 $((A \setminus B) \cup (B \setminus A))$ を表す.

3. 禁止部分グラフの差

禁止部分グラフ条件の強弱・相等

定理 12. (Beineke, 1968 / Robertson, 1969)

グラフ G について、以下は同値.

(1) G はあるグラフのライングラフである.

(2) G は $\left\{ \begin{array}{c} \text{星グラフ} \\ \text{完全グラフ } K_4 \\ \text{5頂点の星グラフ} \\ \text{完全グラフ } K_5 \\ \text{完全グラフ } K_6 \\ \text{完全グラフ } K_7 \\ \text{完全グラフ } K_8 \end{array} \right\}$ -free である.

本質的に“等しい”
禁止部分グラフ条件

定理 13. (Soltes, 1994)

5 個の例外を除き, $\left\{ \begin{array}{c} \text{星グラフ} \\ \text{完全グラフ } K_4 \\ \text{5頂点の星グラフ} \\ \text{完全グラフ } K_5 \\ \text{完全グラフ } K_6 \\ \text{完全グラフ } K_7 \\ \text{完全グラフ } K_8 \end{array} \right\}$ -free グラフは
ライングラフである.

3. 禁止部分グラフの差

禁止部分グラフ条件の強弱・相等

命題 14.

- $\mathcal{H}_1 \leq \mathcal{H}_2$ ならば $|\mathcal{G}(\mathcal{H}_1) \setminus \mathcal{G}(\mathcal{H}_2)| < \infty$.
- $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ ならば $|\mathcal{G}(\mathcal{H}_1) \Delta \mathcal{G}(\mathcal{H}_2)| < \infty$.

⚠ $\mathcal{H}_1 \not\leq \mathcal{H}_2$ でも $|\mathcal{G}(\mathcal{H}_1) \setminus \mathcal{G}(\mathcal{H}_2)| < \infty$ を満たす場合がある.

例

$$\left| \mathcal{G} \left[\begin{array}{ccccc} \text{graph 1} & \text{graph 2} & \text{graph 3} & \text{graph 4} & \text{graph 5} \\ \text{graph 6} & \text{graph 7} & \text{graph 8} & \text{graph 9} & \text{graph 10} \end{array} \right] \setminus \mathcal{G} \left[\begin{array}{ccccc} \text{graph 1} & \text{graph 2} & \text{graph 3} & \text{graph 4} & \text{graph 5} \\ \text{graph 6} & \text{graph 7} & \text{graph 8} & \text{graph 9} & \text{graph 10} \end{array} \right] \right| = 5$$

3. 禁止部分グラフの差

禁止部分グラフ条件の強弱・相等

命題 14.

- $\mathcal{H}_1 \leq \mathcal{H}_2$ ならば $|\mathcal{G}(\mathcal{H}_1) \setminus \mathcal{G}(\mathcal{H}_2)| < \infty$.
- $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ ならば $|\mathcal{G}(\mathcal{H}_1) \Delta \mathcal{G}(\mathcal{H}_2)| < \infty$.

⚠ $\mathcal{H}_1 \neq \mathcal{H}_2$ でも $|\mathcal{G}(\mathcal{H}_1) \Delta \mathcal{G}(\mathcal{H}_2)| < \infty$ を満たす場合がある.

例

$$\left| \mathcal{G} \left[\begin{array}{ccccc} \text{graph 1} & \text{graph 2} & \text{graph 3} & \text{graph 4} & \text{graph 5} \\ \text{graph 6} & \text{graph 7} & \text{graph 8} & \text{graph 9} & \text{graph 10} \end{array} \right] \Delta \mathcal{G} \left[\begin{array}{ccccc} \text{graph 1} & \text{graph 2} & \text{graph 3} & \text{graph 4} & \text{graph 5} \\ \text{graph 6} & \text{graph 7} & \text{graph 8} & \text{graph 9} & \text{graph 10} \end{array} \right] \right| = 5$$

3. 禁止部分グラフの差

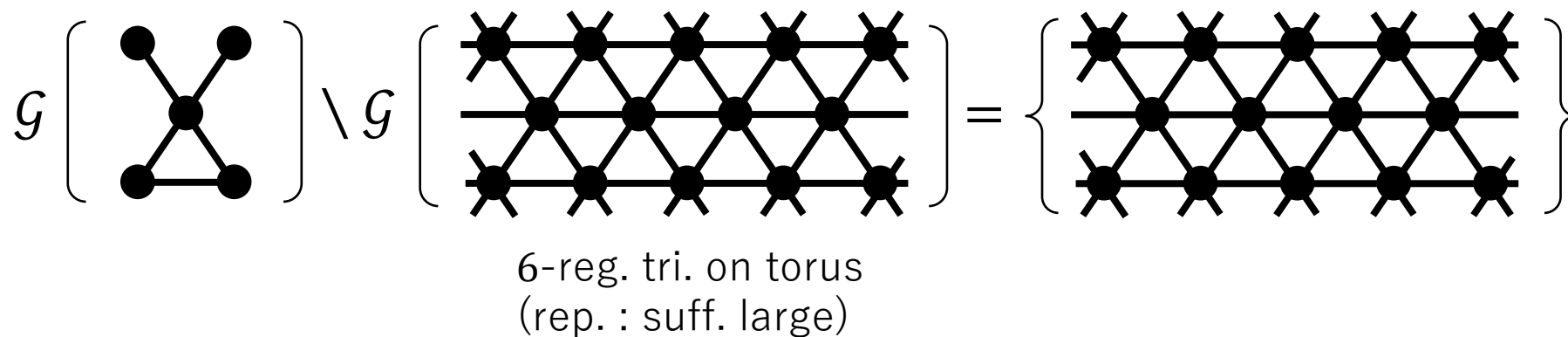
禁止部分グラフ条件の強弱・相等

命題 14.

- $\mathcal{H}_1 \leq \mathcal{H}_2$ ならば $|\mathcal{G}(\mathcal{H}_1) \setminus \mathcal{G}(\mathcal{H}_2)| < \infty$.
- $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ ならば $|\mathcal{G}(\mathcal{H}_1) \triangle \mathcal{G}(\mathcal{H}_2)| < \infty$.

⚠ $H_1 \not\leq H_2$ でも $|\mathcal{G}(\{H_1\}) \setminus \mathcal{G}(\{H_2\})| < \infty$ を満たす場合がある.

例



3. 禁止部分グラフの差

禁止部分グラフ条件の強弱・相等

定理 15. (Fujita, F. and Ozeki, 2013)

位数が 4 以上の連結グラフ H_1, H_2 について, $H_1 \not\approx H_2$ かつ $|\mathcal{G}(\{H_1\}) \setminus \mathcal{G}(\{H_2\})| < \infty$ が成り立つならば,

$$\delta(H_1) = 1, \Delta(H_1) = |V(H_1)| - 1, |V(H_2)| \geq 2|V(H_1)| - 3$$

が成り立つ.

3. 禁止部分グラフの差

禁止部分グラフ条件の強弱・相等

【定理 15 の証明の方針 - 1】

■ $H_1 \not\preceq H_2$ かつ $|\mathcal{G}(\{H_1\}) \setminus \mathcal{G}(\{H_2\})| < \infty$ を満たすグラフ H_1, H_2 をとる.

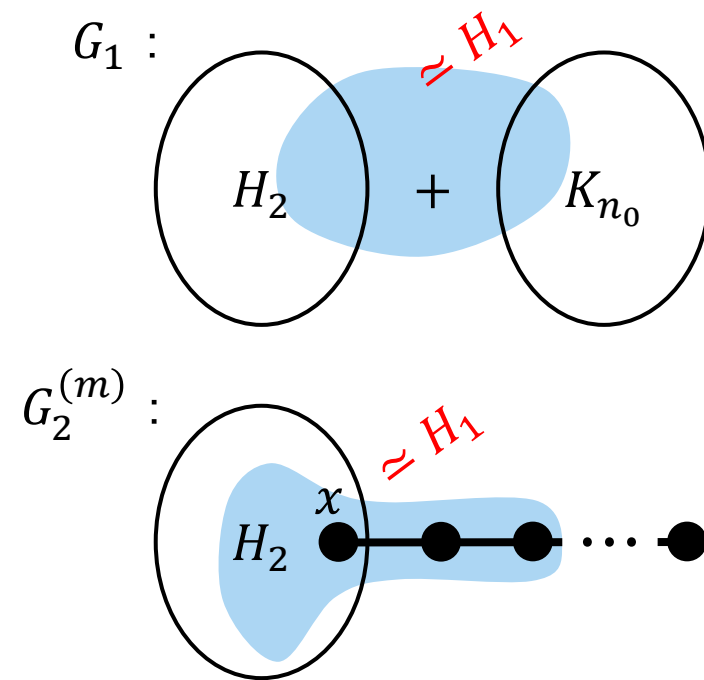
■ $n_0 = \max\{|V(G)| : G \in \mathcal{G}(\{H_1\}) \setminus \mathcal{G}(\{H_2\})\}$ をとる.

■ $G_1 = H_2 + K_{n_0}$ は $G_1 \notin \mathcal{G}(\{H_2\})$ かつ $|V(G_1)| \geq n_0 + 1$ を満たすので, $G_1 \notin \mathcal{G}(\{H_1\})$ となる.

▶ $\Delta(H_1) = |V(H_1)| - 1$.

■ H_2 の頂点 x に, x を端点とする長さが m の道を追加したグラフを $G_2^{(m)}$ とする.

▶ $G_2^{(n_0)} \notin \mathcal{G}(\{H_1\})$ より $\delta(H_1) = 1$.



3. 禁止部分グラフの差

禁止部分グラフ条件の強弱・相等

【定理 15 の証明の方針 - 1】

■ $H_1 \not\leq H_2$ かつ $|\mathcal{G}(\{H_1\}) \setminus \mathcal{G}(\{H_2\})| < \infty$ を満たすグラフ H_1, H_2 をとる.

■ $n_0 = \max\{|V(G)| : G \in \mathcal{G}(\{H_1\}) \setminus \mathcal{G}(\{H_2\})\}$ をとる.

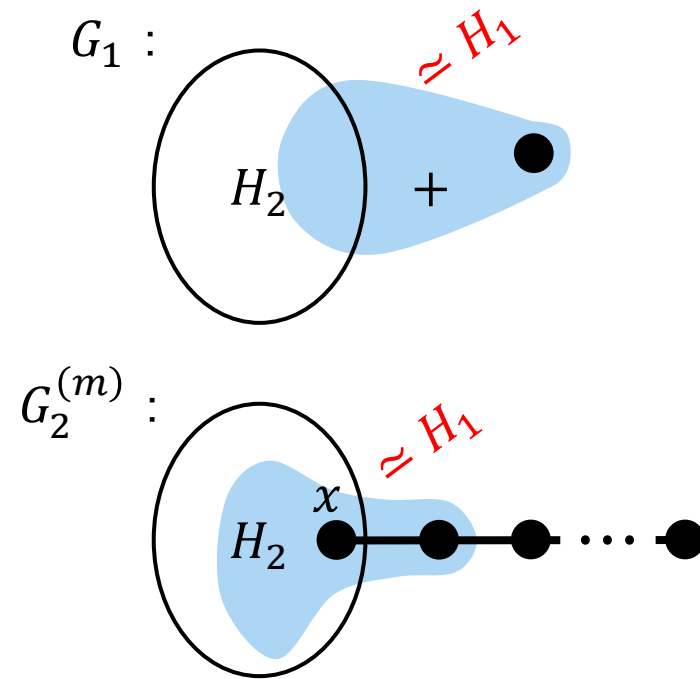
■ $G_1 = H_2 + K_{n_0}$ は $G_1 \notin \mathcal{G}(\{H_2\})$ かつ $|V(G_1)| \geq n_0 + 1$ を満たすので, $G_1 \notin \mathcal{G}(\{H_1\})$ となる.

▶ $\Delta(H_1) = |V(H_1)| - 1$.

■ H_2 の頂点 x に, x を端点とする長さが m の道を追加したグラフを $G_2^{(m)}$ とする.

▶ $G_2^{(n_0)} \notin \mathcal{G}(\{H_1\})$ より $\delta(H_1) = 1$.

■ 上の 2 つより, $H_1 \leq H_2 + K_1$ かつ $H_1 \leq G_2^{(1)}$.

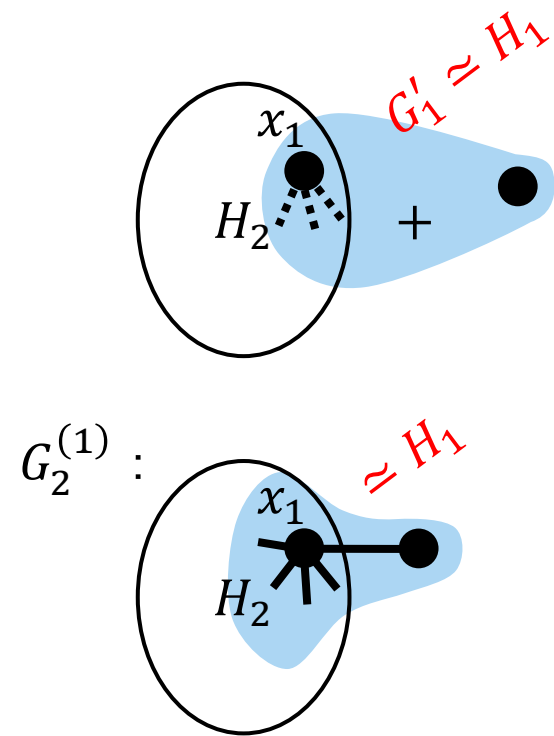


3. 禁止部分グラフの差

禁止部分グラフ条件の強弱・相等

【定理 15 の証明の方針 - 2】

- G'_1 を, $G'_1 \simeq H_1$ を満たす $H_2 + K_1$ の誘導部分グラフとし,
 $x_1 \in V(G'_1)$ を $\deg_{G'_1}(x_1) = 1$ を満たす頂点とする.
- $|N_{H_2}(x_1)| \geq |V(H_1)| - 2$ ($\because x_1$ を用いて $G_2^{(1)}$ を考える)
- $|V(H_2) \setminus N_{H_2}(x_1)| \geq |V(H_1)| - 1$ となる.
- $|V(H_2)| = |N_{H_1}(x_1)| + |V(H_2) \setminus N_{H_2}(x_1)|$
 $\geq (|V(H_1)| - 2) + (|V(H_1)| - 1) \quad \square$



3. 禁止部分グラフの差

禁止部分グラフ条件の強弱・相等

系 16.1

位数が 4 以上の連結グラフ H_1, H_2 について, $|\mathcal{G}(\{H_1\}) \Delta \mathcal{G}(\{H_2\})| < \infty$ ならば $H_1 \simeq H_2$ となる.

【証明】

- H_1, H_2 が $H_1 \neq H_2$ かつ $|\mathcal{G}(\{H_1\}) \Delta \mathcal{G}(\{H_2\})| < \infty$ を満たすと仮定する.
- $H_1 \not\preceq H_2$ であると仮定して良い.
- $|\mathcal{G}(\{H_1\}) \setminus \mathcal{G}(\{H_2\})| < \infty$ なので, 定理 16 より $|V(H_2)| \geq 2|V(H_1)| - 3 > |V(H_1)|$ となる.

特に $H_2 \not\preceq H_1$ となる.

- 再び定理 16 より $|V(H_1)| > |V(H_2)|$ となり, 矛盾が生じる. $\square$

3. 禁止部分グラフの差

禁止部分グラフ条件の強弱・相等

定理 17. (Fujita, F. and Ozeki, 2013)

位数が 3 以上の連結グラフ H と $|\mathcal{H}| \leq 3$ を満たす連結グラフの集合 $\mathcal{H}$ について,
 $H \notin \mathcal{H}$ かつ $|g(\{H\}) \triangle g(\mathcal{H})| < \infty$ が成り立つならば, $|\mathcal{H}| = 3$ かつ $H \simeq C_3$.

例

$$\left| g(C_3) \triangle g \left(\begin{array}{c} \text{triangle} \quad \text{square} \quad \text{pentagon} \end{array} \right) \right| < \infty$$

3. 禁止部分グラフの差

禁止部分グラフ条件の強弱・相等

- 連結グラフの集合 $\mathcal{H}$ で $|\mathcal{G}(\{K_{1,m}\}) \Delta \mathcal{G}(\mathcal{H})| < \infty$ を満たすものの特徴付け (Fujisawa, Ota, Ozeki and Sueiro, 2011).
- $\left| \mathcal{G}_4(\{K_{1,3}\}) \Delta \mathcal{G}_4 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \quad \text{Diagram 2} \quad \text{Diagram 3} \quad \text{Diagram 4} \end{array} \right] \right| < \infty$ (F. and Yokota, 2019).
ただし, $\mathcal{G}_k(\mathcal{H})$ を k -連結 $\mathcal{H}$ -free グラフ全体からなる集合とする.

定理 18. (F. and Yokota, 2019)

以下は同値.

- (1) Matthews-Sumner 予想 (4-連結 claw-free グラフはハミルトン閉路を持つ) が真である.
- (2) 4-連結 $\left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \quad \text{Diagram 2} \quad \text{Diagram 3} \quad \text{Diagram 4} \end{array} \right\}$ -free グラフはハミルトン閉路を持つ.

3. 禁止部分グラフの差

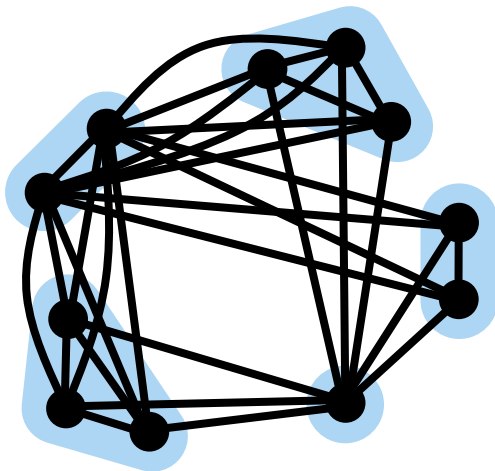
閉近傍に関する同値類

G をグラフとする.

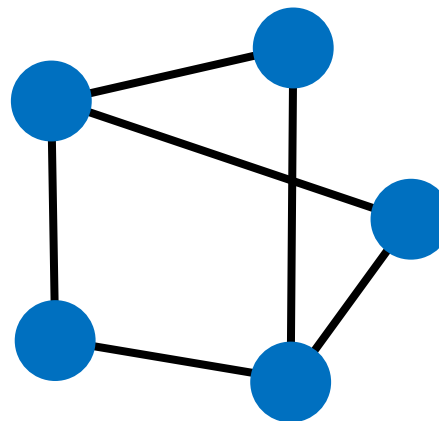
- 頂点 $x \in V(G)$ に対して, 集合 $N_G[x] = N_G(x) \cup \{x\}$ を x の閉近傍という.
- $V(G)$ 上の二項関係 $\sim$ を, “ $x \sim y \iff N_G[x] = N_G[y]$ ” によって定めると, $\sim$ は同値関係となる.
- 上の同値関係 $\sim$ に関する各同値類を 1 つの頂点に縮約することで得られるグラフを $B(G)$ で表す.

例

G :



$B(G)$:



3. 禁止部分グラフの差

禁止部分グラフ条件の強弱・相等

定理 19. (Chiba, Fujisawa, F. and Ikarashi, 2017)

位数が 3 以上の連結グラフ H_1, H_2 について, $|\mathcal{G}(\{K_{1,3}, H_1\}) \Delta \mathcal{G}(\{K_{1,3}, H_2\})| < \infty$ が成り立つならば, 以下のいずれかが成り立つ.

- (1) $H_1 \simeq H_2$
- (2) $K_{1,3} \preceq H_1$ かつ $K_{1,3} \preceq H_2$
- (3) $B(H_1) \simeq B(H_2)$ かつ $B(H_1)$ は頂点可移である.

 グラフ G の任意の頂点 $x, y \in V(G)$ に対して, $\varphi(x) = y$ を満たす G の自己同型写像 φ が存在するとき, G は頂点可移であるという.

3. 禁止部分グラフの差

禁止部分グラフ条件の強弱・相等

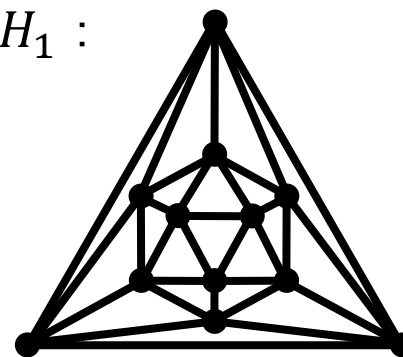
定理 19. (Chiba, Fujisawa, F. and Ikarashi, 2017)

位数が 3 以上の連結グラフ H_1, H_2 について, $|\mathcal{G}(\{K_{1,3}, H_1\}) \Delta \mathcal{G}(\{K_{1,3}, H_2\})| < \infty$ が成り立つならば, 以下のいずれかが成り立つ.

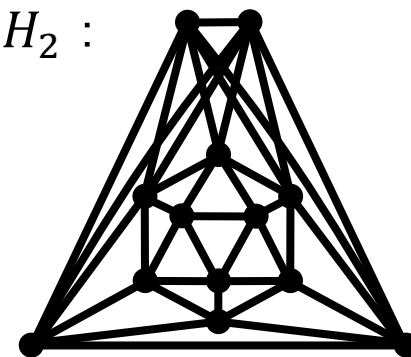
- (1) $H_1 \simeq H_2$
- (2) $K_{1,3} \preceq H_1$ かつ $K_{1,3} \preceq H_2$
- (3) $B(H_1) \simeq B(H_2)$ かつ $B(H_1)$ は頂点可移である.

⚠ 右の H_1, H_2 (正二十面体グラフと, その変形) について,
 $H_1 \not\simeq H_2$, $K_{1,3} \not\preceq H_1$, $K_{1,3} \not\preceq H_2$,
 $\mathcal{G}(\{K_{1,3}, H_1\}) \Delta \mathcal{G}(\{K_{1,3}, H_2\}) = \{H_1\}$ が成り立つ (演習問題).
特に, 定理 18 の (3) は必要である.

H_1 :



H_2 :



3. 禁止部分グラフの差

禁止部分グラフ条件の強弱・相等

問題

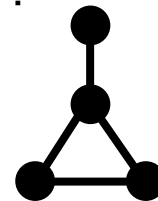
2つの集合 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ の強弱や等価は有限性だけで語って良いか.

定理 20. (Olariu, 1988)

$\mathcal{G}(Z_1) \setminus \mathcal{G}(\{K_3\}) = \{\text{完全 } k \text{ 部グラフ } (k \geq 3)\}.$

⚠ “連結 K_3 -free グラフ (内周が 4 以上) が性質 P を満たす” という命題が真であるとき, “完全 k 部グラフが P を満たすか” のみを確認すれば, 連結 Z_1 -free グラフに関する命題に拡張 (または反例の特定) ができる.

Z_1 :

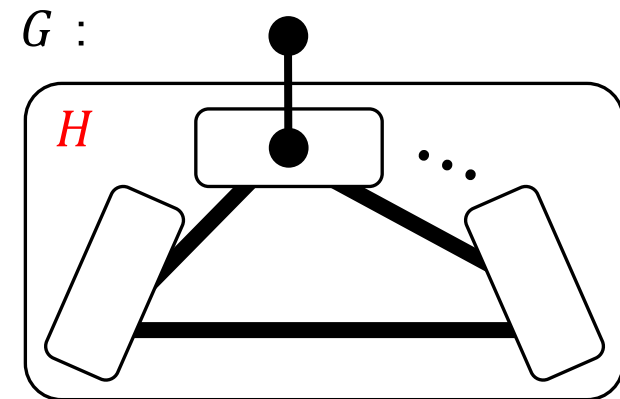


3. 禁止部分グラフの差

禁止部分グラフ条件の強弱・相等

【定理 20 の証明の方針】

- $\mathcal{G}(\{Z_1\}) \setminus \mathcal{G}(\{K_3\}) \supseteq \{\text{完全 } k \text{ 部グラフ } (k \geq 3)\}$ は明らか.
- Z_1 -free であるが, K_3 -free ではない連結グラフ G を任意にとる.
- “部集合が 3 個以上の完全多部グラフ” であるような G の誘導部分グラフのうち, 位数が最大のを H とする.
- $H = G$ なら証明終了
- $H \neq G$ と仮定すると, ある頂点 $x \in V(G) \setminus V(H)$ で, $N_G(x) \cap V(H) \neq \emptyset$ となるものが存在する.

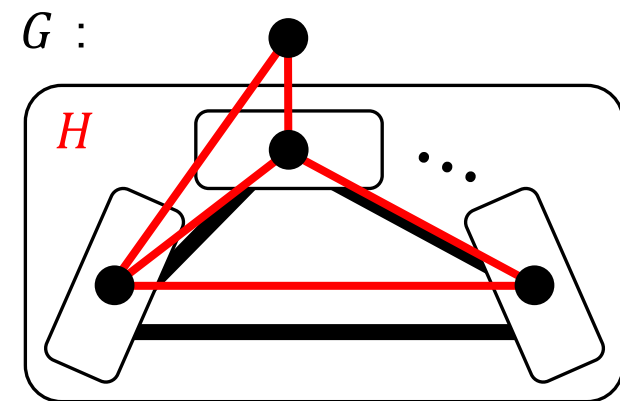


3. 禁止部分グラフの差

禁止部分グラフ条件の強弱・相等

【定理 20 の証明の方針】

- $\mathcal{G}(\{Z_1\}) \setminus \mathcal{G}(\{K_3\}) \supseteq \{\text{完全 } k \text{ 部グラフ } (k \geq 3)\}$ は明らか.
- Z_1 -free であるが, K_3 -free ではない連結グラフ G を任意にとる.
- “部集合が 3 個以上の完全多部グラフ” であるような G の誘導部分グラフのうち, 位数が最大のものを H とする.
- $H = G$ なら証明終了
- $H \neq G$ と仮定すると, ある頂点 $x \in V(G) \setminus V(H)$ で, $N_G(x) \cap V(H) \neq \emptyset$ となるものが存在する.
- Z_1 -free 性を用いると, $V(H) \cup \{x\}$ で誘導される G の部分グラフが完全多部グラフとなり, H の最大性に矛盾する. $\square$

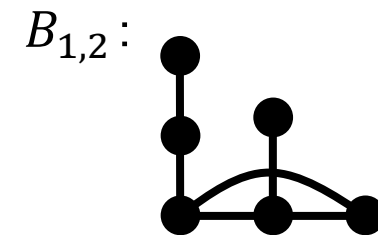
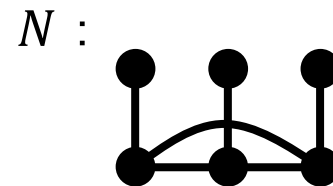


3. 禁止部分グラフの差

禁止部分グラフ条件の強弱・相等

定理 21. (F. and Tsuchiya, 2015)

$$\mathcal{G}(\{K_{1,3}, B_{1,2}\}) \setminus \mathcal{G}(\{K_{1,3}, N\}) = \left\{ \text{橢円は完全グラフ} \right\}$$



定理 4. (Duffus, Gould and Jacobson, 1981)

(2) 2-連結 $\{K_{1,3}, N\}$ -free グラフはハミルトン閉路を持つ.

定理 6. (Bedrossian, 1991)

2-連結 $\{K_{1,3}, B_{1,2}\}$ -free グラフはハミルトン閉路を持つ.

⚠ 定理 4 と定理 21 を認めれば, 定理 6 が系として得られる.

4. 強い、禁止部分グラフ

4. 強い禁止部分グラフ

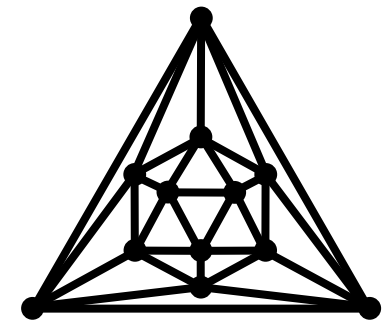
■ 特殊な禁止部分グラフ

- “位数が十分大きい 5-連結 $\{K_{1,3}, K_4\}$ -free グラフは 3-彩色可能である” は真である.
 - “位数が十分大きい 5-連結 $\{K_{1,3}, K_4\}$ -free グラフはハミルトン閉路を持つ” は真である.
 - “位数が十分大きい 5-連結 $\{K_{1,3}, K_4\}$ -free グラフはハミルトン閉路を持たない” は真である.
 - 任意の性質 P に対して, “位数が十分大きい 5-連結 $\{K_{1,3}, K_4\}$ -free グラフは P を満たす” は真である.
- ▶ 何が起きているだろうか？

4. 強い禁止部分グラフ

特殊な禁止部分グラフ

実は、5-連結 $\{K_{1,3}, K_4\}$ -free グラフは右の正二十面体グラフ (位数は 12) に限られる (演習問題).



正二十面体グラフ

よって,

“位数が 13 以上の 5-連結 $\{K_{1,3}, K_4\}$ -free グラフは性質 P を満たす”

というは、命題は常に真となる.

一般に、禁止グラフ条件を満たすグラフが有限個の場合、同様の事態が生じる.

この場合、各性質 (彩色, 完全マッチング, ハミルトン性など) 毎の知見は得られない.

▶ そのような禁止グラフは、予め特定しておく方が良さだろう.

4. 強い禁止部分グラフ

禁止部分グラフと彩色

定理 22. (Chudnovsky and Stacho, 2018)

$\{C_3, C_4, P_8\}$ -free グラフ G は $\chi(G) \leq 3$ を満たす.

定理 23. (Chudnovsky and Stacho, 2018)

最小次数が 3 以上の連結 $\{C_3, C_4, P_8\}$ -free グラフ G は以下のいずれかである.

- ペテルセングラフ
- ヒーウッドグラフ
- ヒーウッドグラフの 1 本の辺を縮約して得られたグラフ

4. 強い禁止部分グラフ

有限個のグラフを生成する禁止部分グラフ条件

命題 24. (cf. Diestel “Graph Theory”)

連結グラフの集合 $\mathcal{H}$ について、以下は同値.

$$(1) |\mathcal{G}(\mathcal{H})| < \infty.$$

$$(2) \exists n \geq 2 \text{ s.t. } \mathcal{H} \leq \{K_n, K_{1,n}, P_n\}.$$

【(1) $\Rightarrow$ (2) の証明】

$n_0 = \max\{|V(G)| : G \in \mathcal{G}(\mathcal{H})\}$ とおくと, $K_{n_0+1}, K_{1,n_0+1}, P_{n_0+1}$ はいずれも $\mathcal{H}$ -free ではない.

よって $\mathcal{H} \leq \{K_{n_0+1}, K_{1,n_0+1}, P_{n_0+1}\}$ となる.

4. 強い禁止部分グラフ

有限個のグラフを生成する禁止部分グラフ条件

命題 24. (cf. Diestel “Graph Theory”)

連結グラフの集合 $\mathcal{H}$ について、以下は同値.

(1) $|\mathcal{G}(\mathcal{H})| < \infty$.

(2) $\exists n \geq 2$ s.t. $\mathcal{H} \leq \{K_n, K_{1,n}, P_n\}$.

【(2) $\Rightarrow$ (1) の証明】

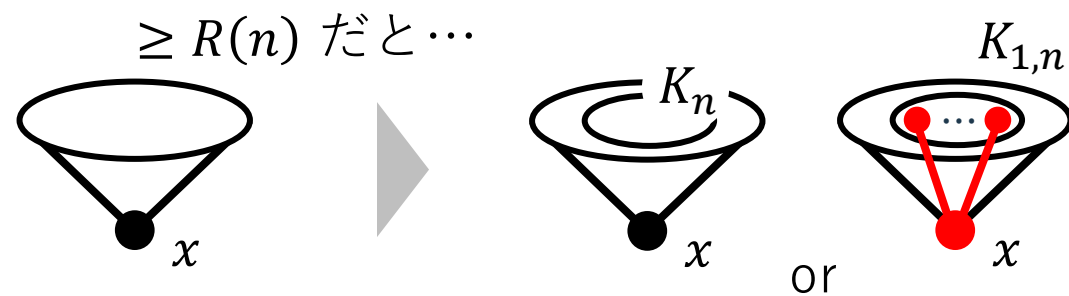
連結 $\{K_n, K_{1,n}, P_n\}$ -free グラフ G に対して,

■ $\Delta(G) \leq R(n) - 1$

ラムゼー数

■ $\text{diam}(G) \leq n - 2$ ($\because P_n$ -free 性)

よって $|V(G)| \leq \Delta(G)^{\text{diam}(G)} \leq (R(n) - 1)^{n-2}$. $\square$



4. 強い禁止部分グラフ

有限個のグラフを生成する禁止部分グラフ条件

禁止部分グラフ条件を用いた命題を考える際に、別で連結度などの条件も付与されることがあった.

このような場合、その条件によって対象となるグラフが既に制限されている.

▶ より“緩い”禁止部分グラフ条件でも、条件を満たすグラフが有限個となる可能性がある.

⚠ 実際に、 $\{K_{1,3}, K_4\} \not\subseteq \{K_n, K_{1,n}, P_n\} (\forall n \geq 3)$ であるが、5-連結 $\{K_{1,3}, K_4\}$ -free グラフは有限個.

4. 強い禁止部分グラフ

有限個のグラフを生成する禁止部分グラフ条件

禁止部分グラフ条件を用いた命題を考える際に、別で連結度などの条件も付与されることがあった.

このような場合、その条件によって対象となるグラフが既に制限されている.

▶ より“緩い”禁止部分グラフ条件でも、条件を満たすグラフが有限個となる可能性がある.

k を自然数とし、 $\mathcal{H}$ をグラフの集合とする.

■ k -連結 $\mathcal{H}$ -free グラフ全体からなる集合を $\mathcal{G}_k(\mathcal{H})$ で表す.

■ 最小次数が k 以上の $\mathcal{H}$ -free グラフ全体からなる集合を $\tilde{\mathcal{G}}_k(\mathcal{H})$ で表す.

問題

$|\mathcal{G}_k(\mathcal{H})| < \infty$ や $|\tilde{\mathcal{G}}_k(\mathcal{H})| < \infty$ を満たす自然数 k とグラフの集合 $\mathcal{H}$ を特定せよ.

4. 強い禁止部分グラフ

有限個のグラフを生成する禁止部分グラフ条件

- $|G_k(\mathcal{H})| < \infty$ を満たす自然数 k と連結グラフの集合 $\mathcal{H}$:
 - $k = 1$ のときの $\mathcal{H}$ の特徴付け (命題 24).
 - $k \leq 6$ のとき, $|\mathcal{H}| = 2$ を満たす $\mathcal{H}$ の特徴付け (Fujisawa, Plummer and Saito, 2013).
 - $k = 2$ のとき, $|\mathcal{H}| = 3$ を満たす $\mathcal{H}$ の特徴付け (Fujisawa, Plummer and Saito, 2013).
 - $k = 3$ のとき, $|\mathcal{H}| = 3$ を満たす $\mathcal{H}$ の特徴付けは未解決 (残り 5 種類?)
(cf. Egawa, Fujisawa, F., Plummer and Saito, 2015 / Egawa, 2025).
- $|\tilde{G}_k(\mathcal{H})| < \infty$ を満たす自然数 k と連結グラフの集合 $\mathcal{H}$:
 - $k = 3$ のとき, $|\mathcal{H}| = 3$ を満たす $\mathcal{H}$ の特徴付けは未解決 (残り有限種類)
(cf. Egawa and F., 2022).

5. 不変量版ラムゼー問題

5. 不変量版ラムゼー問題

■ 禁止部分グラフによる不変量のコントロール

■ サイズなど

- K_{r+1} -free グラフのサイズ (Turán, 1941)
- $\{K_{r+1}, H\}$ -free グラフのサイズ (Loh, Tait and Timmons, 2018)
- wheel-free グラフの三角形の個数
(Gallai-Zelinka 問題, cf. Füredi, Goemans and Kleitman, 1994)

■ χ -bounded 性

- グラフの集合 $\mathcal{G}$ が χ -bounded $\iff \exists f_{\mathcal{G}}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ s.t. $\forall G \in \mathcal{G}, \chi(G) \leq f_{\mathcal{G}}(\omega(G))$
- $\{C_{2n+1} : n \geq 2\}$ -free グラフからなる集合は χ -bounded (Scott and Seymour, 2016)
- Gyárfás–Sumner 予想 (任意の木 T に対して, T -free グラフからなる集合は χ -bounded)

■ クリーク数・独立数

- Erdős–Hajnal 予想 ($\forall H, \exists \delta_H > 0$: 定数 s.t. $\forall H$ -free グラフ $G, \max\{\omega(G), \alpha(G)\} \geq |V(G)|^{\delta_H}$)

5. 不変量版ラムゼー問題

禁止部分グラフによる不変量のコントロール

定理 25. (Ramsey, 1930)

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists r \in \mathbb{N}$ s.t. 任意の 2-辺着色完全グラフ K_r には単色の K_n が含まれる.

定理 25'.

グラフの集合 $\mathcal{H}$ について, 以下は同値.

(1) “ $\mathcal{H}$ -free グラフは有限個” を満たす.

(2) $\exists n \geq 2$ s.t. $\mathcal{H} \leq \{K_n, \overline{K_n}\}$.

⚠ (2) $\Rightarrow$ (1) は Ramsey の定理そのもの.

(1) $\Rightarrow$ (2) は “ $\{K_r : r \in \mathbb{N}\}$ と $\{\overline{K_r} : r \in \mathbb{N}\}$ が無限集合なので $\mathcal{H}$ -free でないグラフを含む” という事実より.

5. 不変量版ラムゼー問題

禁止部分グラフによる不変量のコントロール

定理 25'.

グラフの集合 $\mathcal{H}$ について、以下は同値.

- (1) “ $\mathcal{H}$ -free グラフは有限個” を満たす.
- (2) $\exists n \geq 2$ s.t. $\mathcal{H} \leq \{K_n, \overline{K_n}\}$.



“連結版” Ramsey の定理

命題 24. (cf. Diestel “Graph Theory”)

連結グラフの集合 $\mathcal{H}$ について、以下は同値.

- (1) $|\mathcal{G}(\mathcal{H})| < \infty$.
- (2) $\exists n \geq 2$ s.t. $\mathcal{H} \leq \{K_n, K_{1,n}, P_n\}$.

5. 不変量版ラムゼー問題

不変量版ラムゼー問題

問題 (不変量版ラムゼー問題)

不変量 μ に対して, 連結グラフの集合 $\mathcal{H}$ で性質

(P- μ) $\exists$ 定数 $c = c(\mathcal{H})$ s.t. $\forall$ 連結 $\mathcal{H}$ -free グラフ G は $\mu(G) \leq c$ を満たす
を満たすものを特定せよ.

- 連結グラフの集合 $\mathcal{H}$ が (P- $|V(*)|$) を満たす $\Leftrightarrow \mathcal{H} \leq \{K_n, K_{1,n}, P_n\}$ ($\exists n \geq 3$)
(命題 24)
- Gyárfás–Sumner 予想 (任意の木 T に対して, T -free グラフからなる集合は χ -bounded)
は次の命題と同値:

連結グラフの有限集合 $\mathcal{H}$ が (P- χ) を満たす $\Leftrightarrow \mathcal{H} \leq \{K_n, T\}$ ($\exists n \geq 3, \exists T : \text{木}$)

⚠ ($\Leftarrow$) は Gyárfás–Sumner 予想そのもの.

5. 不変量版ラムゼー問題

支配数

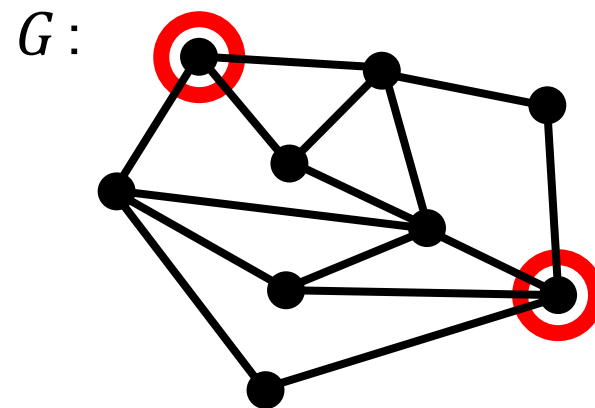
G をグラフとする.

- 2つの集合 $X, Y \subseteq V(G)$ が $\forall y \in Y \setminus X, N_G(y) \cap X \neq \emptyset$ を満たすとき, (G において) X は Y を **支配する** という.
- 集合 $X \subseteq V(G)$ が $V(G)$ を支配するとき, X を G の **支配集合** という.
- G の支配集合の大きさの最小値を G の **支配数** といい, $\gamma(G)$ で表す.

例

右のグラフ G について

- G は大きさが 2 の支配集合を持つ.
- G には大きさが 1 (以下) の支配集合が存在しないため, $\gamma(G) = 2$ である.



5. 不変量版ラムゼー問題

支配数のラムゼー問題

定理 26. (Cockayne, Ko and Shepherd, 1985)

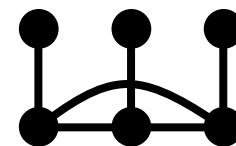
連結 $\{K_{1,3}, N\}$ -free グラフ G は $\gamma(G) \leq \lceil |V(G)|/3 \rceil$ を満たす.

⚠ P_n は $\{K_{1,3}, N\}$ -free かつ $\gamma(P_n) = \lceil |V(P_n)|/3 \rceil$ を満たす.
特に定理 26 は最善である.

定理 4. (Duffus, Gould and Jacobson, 1981)

連結 $\{K_{1,3}, N\}$ -free グラフはハミルトン道を持つ.

N :



5. 不変量版ラムゼー問題

支配数のラムゼー問題

定理 26. (Cockayne, Ko and Shepherd, 1985)

連結 $\{K_{1,3}, N\}$ -free グラフ G は $\gamma(G) \leq \lceil |V(G)|/3 \rceil$ を満たす.

定理 27. (F., 2018)

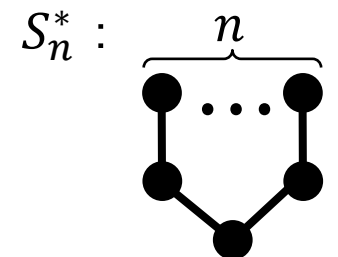
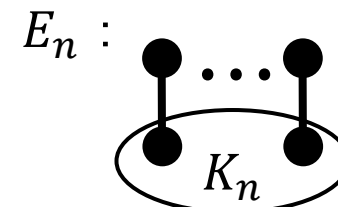
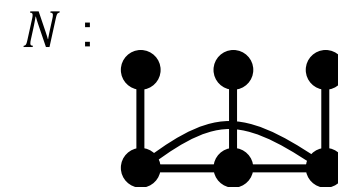
連結グラフの集合 $\mathcal{H}$ について, 以下は同値.

(1) $\mathcal{H}$ が (P- γ) を満たす.

(2) $\exists n \geq 3$ s.t. $\mathcal{H} \leq \{E_n, S_n^*, P_n\}$

【(1) $\Rightarrow$ (2) の証明】

“ $\forall$ 連結 $\mathcal{H}$ -free グラフ G , $\gamma(G) \leq n_0$ ” を満たす n_0 をとると,
 $\gamma(E_{3n_0+1}) = \gamma(S_{3n_0+1}^*) = 3n_0 + 1 > n_0$, $\gamma(P_{3n_0+1}) = n_0 + 1 > n_0$ より
 $\mathcal{H} \leq \{E_{3n_0+1}, S_{3n_0+1}^*, P_{3n_0+1}\}$ となる.

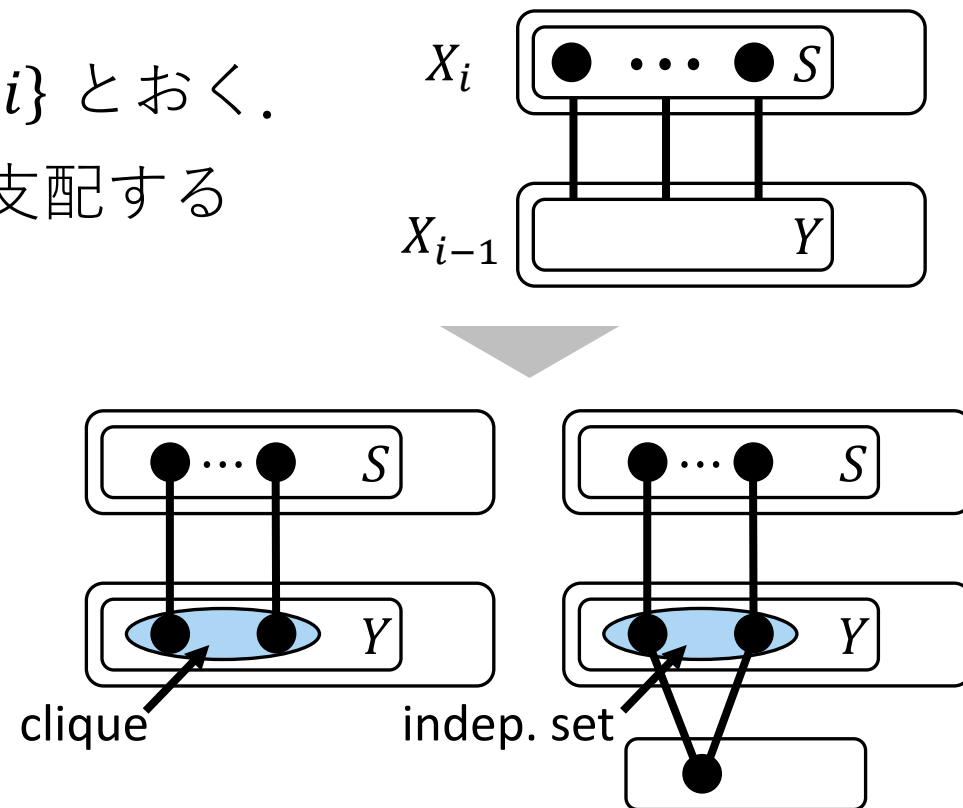


5. 不変量版ラムゼー問題

支配数のラムゼー問題

【定理 27 の (2) $\Rightarrow$ (1) の証明の方針 - 1】

- ある $c = c(n)$ に対して, 任意の連結 $\{E_n, S_n^*, P_n\}$ -free グラフ G が $\gamma(G) \leq c$ を満たすことを示せば良い.
- $x \in V(G)$ をとり, $X_i = \{y \in V(G) : \text{dist}_G(x, y) = i\}$ とおく.
- 各 $i \geq 1$ と G の独立集合 $S \subseteq X_i$ に対して, S を支配する最小の集合 $Y \subseteq X_{i-1}$ をとる.
- $|Y|$ が一定値以上大きいと, ラムゼーの定理から E_n か “ S_n^* っぽい構造” が見える.
- よって, $|Y|$ がある定数で抑えられる.

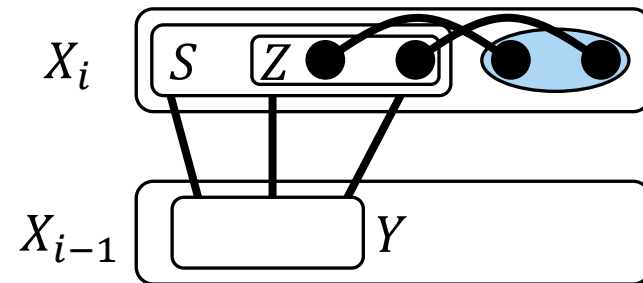


5. 不変量版ラムゼー問題

支配数のラムゼー問題

【定理 27 の (2) $\Rightarrow$ (1) の証明の方針 - 2】

- 各 $i \geq 1$ と G の独立集合 $S \subseteq X_i$ に対して, $X \setminus N_G(Y)$ を支配する最小の集合 $Z \subseteq S$ をとる.
- $|Z|$ が一定値以上大きいと, ラムゼーの定理から E_n か “ S_n^* っぽい構造” が見える.
- よって, $|Z|$ がある定数で抑えられる.
特に, 小さい集合 $Y \cup Z$ で X_i が支配される.
- $V(G) = \bigcup_{i=0}^{n-2} X_i$ であるから, $\gamma(G)$ が定数値で抑えられる. $\square$



5. 不変量版ラムゼー問題

道被覆数 / 道分割数のラムゼー問題

G をグラフとする.

■ $\mathcal{P}$ が G の道被覆

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \triangleright \forall P \in \mathcal{P}, P \text{ は } G \text{ の部分道, かつ} \\ \triangleright \bigcup_{P \in \mathcal{P}} V(P) = V(G) \end{array} \right.$$

■ G の道被覆 / 道分割の大きさの最小値を道被覆数といい, $\text{pc}(G)$ で表す.

■ (P-pc) を満たす連結グラフの有限集合 $\mathcal{H}$ の特徴付け (Chiba and F., 2022).

5. 不変量版ラムゼー問題

彩色の解釈

G をグラフとする.

■ $\mathcal{S}$ が G の独立集合被覆

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \triangleright \forall S \in \mathcal{S}, S \text{ は } G \text{ の独立集合, かつ} \\ \triangleright \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = V(G) \end{array} \right.$$

■ G の独立集合被覆の大きさの最小値はいずれも G の染色数 $\chi(G)$ と等しい.
特に, この値のラムゼー問題が Gyárfás–Sumner 予想に対応する.

5. 不変量版ラムゼー問題

“連結版”の彩色

- 独立集合を“誘導部分グラフ”として捉えたとき、その連結版は
誘導星グラフと誘導道グラフの組

となることが（経験的に）多い。

(例：定理 25' (ラムゼーの定理) の $\{K_n, \overline{K_n}\}$ vs. 命題 24 (連結版) の $\{K_n, K_{1,n}, P_n\}$)

▶ 誘導星グラフと誘導道グラフによる被覆が“連結版の彩色”に対応(?)

- 誘導道による被覆は、道被覆の結果 (Chiba and F., 2022) を基に考えられる。
- 星被覆は支配集合に対応する。

特に、誘導星による被覆は、支配数の結果 (定理 27) を基に処理ができる。

- “誘導星または誘導道”による $V(G)$ の分割の大きさの最小値を $\text{inspc}(G)$ で表す。

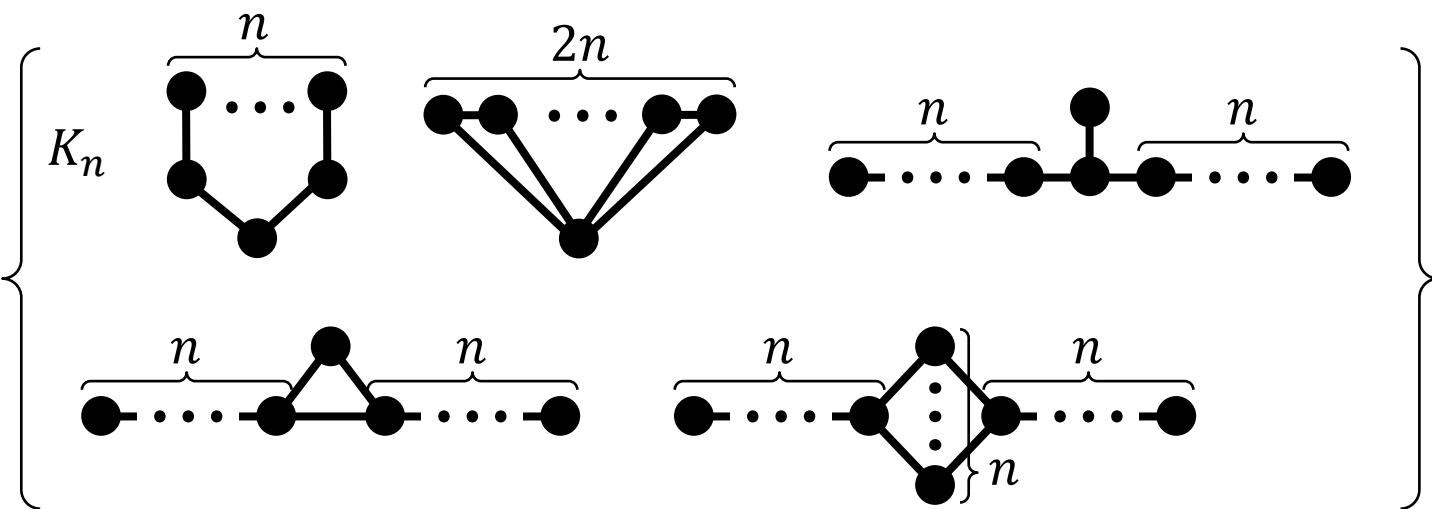
5. 不変量版ラムゼー問題

誘導星道被覆数のラムゼー問題

定理 28. (Chiba and Furuya, 2024)

連結グラフの有限集合 $\mathcal{H}$ について、以下は同値.

(1) $\mathcal{H}$ が (P-inspc) を満たす.

(2) $\exists n \geq 3$ s.t. $\mathcal{H} \leq$ 



任意のグラフ G に対して $\chi(G) \leq \text{inspc}(G)/2$ が成り立つ.

特に、染色数と比較可能な (非自明な) 不変量のラムゼー問題の解決.

今回の内容

1 禁止部分グラフとは

- 定義
- 小さい禁止部分グラフ
- 遺伝的性質

2 部分構造の発見

- 完全マッチング
- ハミルトン性

3 禁止部分グラフの差

- 差・対称差の有限性
- 差の良い特徴付け

4 強い禁止部分グラフ

5 不変量版ラムゼー問題