

演習問題

演習問題 1

すべてのエージェントは加法的評価関数をもつとする.

配分 $A = (A_1, \dots, A_n)$: **EFL** $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

任意の $i, j \in N$ に対して, 次のいずれかが成り立つ:

- A_j に含まれる, i にとって正の価値のアイテムが高々ひとつ.
- あるアイテム $g \in A_j$ が存在して,

$$v_i(A_i) \geq v_i(A_j \setminus g) \text{ かつ } v_i(A_i) \geq v_i(g)$$

Envy-Cycle Elimination Algorithmを, 各反復において, 入次数 0 であるエージェント i を一人選び, 未配分アイテムの中から i にとって最も価値の高いアイテムを与えるように修正する. この修正版アルゴリズムがEFL配分を出力することを示せ.

演習問題 2

すべてのエージェントは同一の加法的評価関数 v をもつとする.

$A = (A_1, \dots, A_n)$ を任意の EF1 配分,

A^* を Nash social welfare 最大の配分, $\text{NSW}(A^*) > 0$ とする. ただし,

$$\text{NSW}(A) := \left(\prod_{i \in N} v(A_i) \right)^{\frac{1}{n}}.$$

(1) 各 $i \in N$ について, A_i に含まれる最大価値のアイテムを g_i とする.

$\ell := \min_{i \in N} v(A_i)$, $H := \{g_1, \dots, g_n\}$ とおく.

H の任意の分割 $H_1, \dots, H_n$ に対して,

$$\prod_{i \in N} (\ell + v(H_i)) \leq \prod_{i \in N} (\ell + v(g_i))$$

が成り立つことを示せ.

(2) $\text{NSW}(A) \geq \frac{1}{4} \text{NSW}(A^*)$ を示せ.

演習問題 3

すべてのエージェントは加法的評価関数をもつとする。

def
インスタンス $I = (N, M, \{v_i\}_{i \in N})$: 同一ランキング $\iff$
 $\forall i, j \in N, \forall g_1, g_2 \in M, v_i(g_1) \geq v_i(g_2) \iff v_j(g_1) \geq v_j(g_2).$

同一ランキングなインスタンスにおいて，EFX配分が存在することを示せ。

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
 1	20	15	10	9	5	0
 2	12	10	9	8	6	5
 3	16	15	5	4	2	1

演習問題 4

すべてのエージェントは同一の加法的評価関数 v をもつとする.

問題

入力 : $X = (X_1, \dots, X_n)$: 任意の配分

出力 : $X' = (X'_1, \dots, X'_n)$: 次を満たす EFX 配分

$$\min\{v(X_1), \dots, v(X_n)\} \leq \min\{v(X'_1), \dots, v(X'_n)\}$$

すなわち, 全エージェントの最小評価値を減少させることなく,
EFX 配分へ変換する.

この問題に対する多項式時間アルゴリズムを設計せよ.

演習問題 5

すべてのエージェントは正の加法的コスト関数をもつとする。

つぎは同値であることを示せ。

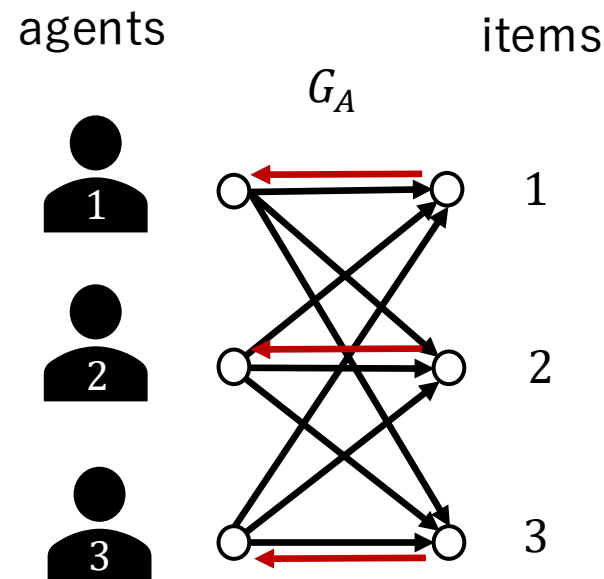
(1) $A = (A_1, \dots, A_n) : \text{fPO配分}$

(2) G_A は負閉路をもたない

(3) n 個の正の実数 $w_1, \dots, w_n$ が存在して, A は $\sum_{i=1}^n w_i \cdot c_i(A'_i)$ を最小化する配分

$$G_A := (N, M; E), \quad d: E \rightarrow \mathbb{R}$$

- $\forall i \in N, \forall j \in M, (i, j) \in E$
- $(j, i) \in E \iff j \in A_i$
- $d_{i,j} := \ln c_{i,j}$
- $d_{j,i} := -\ln c_{i,j}$



演習問題 6

以下の $G(\mathbf{w}, \mathbf{p})$ に対して、各アイテムを $G(\mathbf{w}, \mathbf{p})$ の辺に沿って適切に配分することにより、pEF1配分が得られることを示せ。

