

不可分財の公平配分理論

馬原凌河

東京大学

第23回組合せ最適化セミナー(COSS) 2026.7.21

公平配分理論の歴史

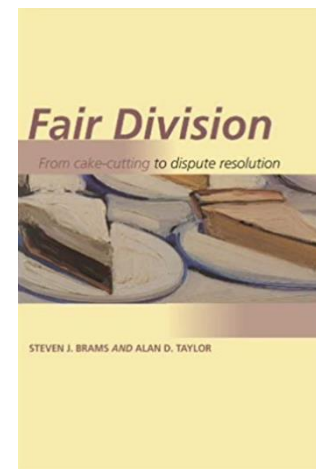
可分財

- ケーキ分割問題を数学的に定式化 [Steinhaus, 1948]
- 任意人数に対する比例配分を求めるナイフ移動法 [Dubins and Spanier, 1961]
- 3人に対する無羨望配分を求める手順 [Selfridge, 1960; Conway, 1963]
- 適切な仮定のもとで、無羨望かつパレート最適な配分の存在 [Varian, 1974]
- 任意人数に対して、無羨望配分が存在 [Stromquist, 1980; Woodall, 1980]
- 任意人数に対する有限だが非有界な無羨望配分を求める手順 [Brams and Taylor, 1995]
- 任意人数に対する有限かつ有界な無羨望配分を求める手順
[Aziz and Mackenzie, FOCS 2016]

不可分財

- 羨望を1財分に抑える
[Lipton, Markakis, Mossel, and Saberi, EC 2004]
- さまざまな公平性概念の提案 [Budish, 2011]

- 公平性と効率性の両立



[Brams and Taylor, 1996]

[Caragiannis, Kurokawa, Moulin, Procaccia, Shah, and Wang, EC 2016]

目次

- 1限. 不可分財の公平配分理論：基礎と主要概念
- 2限. EFX配分の存在問題
- 3限. 不可分な負担の公平かつ効率的な配分

目次

- 1限. 不可分財の公平配分理論：基礎と主要概念
- 2限. EFX配分の存在問題
- 3限. 不可分な負担の公平かつ効率的な配分

公平配分理論

財(モノやサービス)の公平配分メカニズムを数理的に設計・解析



➤ ポイント： 各エージェントはそれぞれ個別の選好をもつ

➤ 論点：

- 望ましい配分とは何か？ (公平性, 効率性などの定義)
- 望ましい配分は存在するか？ (存在性)
- 望ましい配分は高速に求められるか？ (アルゴリズム)

➤ 例： 授業配属, 遺産分割, 家事分担, 査読割り当て, etc.

不可分財の公平配分問題

問題設定

$N = \{1, \dots, n\}$: エージェントの集合



$M = \{1, \dots, m\}$: 不可分な財の集合
(アイテム)



$v_i : 2^M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ (エージェント i の評価関数)

加法的 $\left[\begin{array}{l} \text{一般的} \left[\begin{array}{l} \bullet \quad v_i(\emptyset) = 0 \\ \bullet \quad \forall S, \forall T \subseteq M, S \subseteq T \Rightarrow v_i(S) \leq v_i(T) \quad \text{単調性} \\ \bullet \quad \forall S \subseteq M, v_i(S) = \sum_{g \in S} v_i(\{g\}) \quad \text{加法性} \end{array} \right. \end{array} \right.$

不可分財の公平配分問題

問題設定

$N = \{1, \dots, n\}$: エージェントの集合



$M = \{1, \dots, m\}$: 不可分な財の集合
(アイテム)



$v_i : 2^M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ (エージェント i の評価関数)

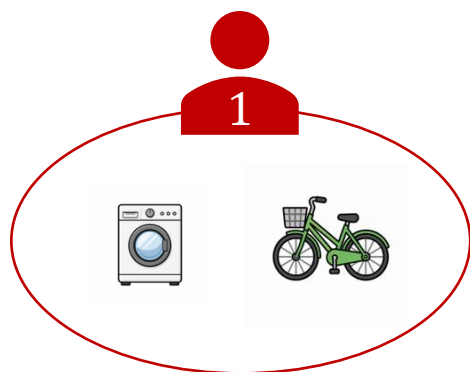
例: $v_1(\{2,3\}) = v_1(\{2\}) + v_1(\{3\}) = 15 + 2 = 17$

	1 	2 	3 	4 	5 
	3	15	2	2	6
	7	5	5	5	7
	20	3	3	3	3

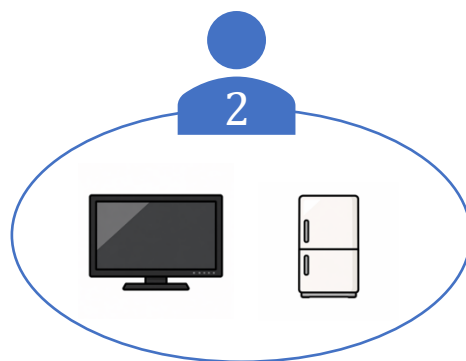
不可分財の公平配分問題

$A = (A_1, \dots, A_n) : \text{配分} \stackrel{\text{def}}{\iff}$

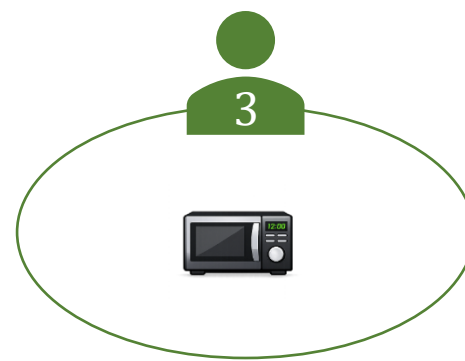
- A_i : エージェント i のアイテム集合 (バンドル)
- $\bigcup_{i=1}^n A_i = M$
- 相異なる i, i' に対して, $A_i \cap A_{i'} = \emptyset$



$A_1 = \{2, 3\}$



$A_2 = \{4, 5\}$



$A_3 = \{1\}$

目標 : できる限り 「公平な」 配分 $A = (A_1, \dots, A_n)$ を求めたい

公平性の指標

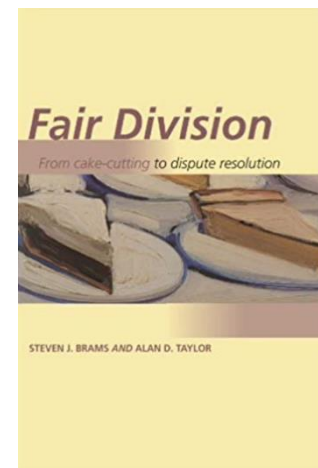
➤ 比較型:

各エージェントは、自分の配分と他人の配分を比較して、公平かどうかを評価する。

無羨望性 (Envy-Freeness) [Foley, 1967]

$$\forall i, j \in N, \quad \underline{v_i(A_i)} \geq \underline{v_i(A_j)}$$

(自分の持ち分で得られる嬉しさ) $\geq$ (他人の持ち分で得られる嬉しさ)



➤ 絶対評価型:

[Brams and Taylor, 1996]

各エージェントはある閾値を設定し、その値以上の配分を公平と評価する。

比例性 (Proportionality) [Steinhaus, 1948]

$$\forall i \in N, \quad \underline{v_i(A_i)} \geq \underline{\frac{v_i(M)}{n}}$$

(自分の持ち分で得られる嬉しさ) $\geq$ (全体で得られる嬉しさの一人分)

公平性の緩和

無羨望配分や比例配分は必ずしも存在しない!

EF/PROP

緩和



EF1, EFX, EFL, EFR,
PROP1, PROPx, PRORAvg,
MMS, PMMS, GMMS,
MXS, EEFX, etc.

	
 1	1
 2	1

- 本講義ではEF1とEFXに注目する

EF1配分 (Envy-freeness up to one item) [Budish, 2011]

どのエージェントも他のエージェントの
あるアイテムをひとつ取り除けば羨望しない

配分 $A = (A_1, \dots, A_n)$: **EF1** $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$$\forall i, \forall j \in N, \exists g \in A_j, \quad v_i(A_i) \geq v_i(A_j \setminus \{g\})$$

					
	15	3	2	2	6
	7	5	5	5	7
	20	3	3	3	3

厳密には $A_j \neq \emptyset$ のとき

← 無羨望配分が存在しない例

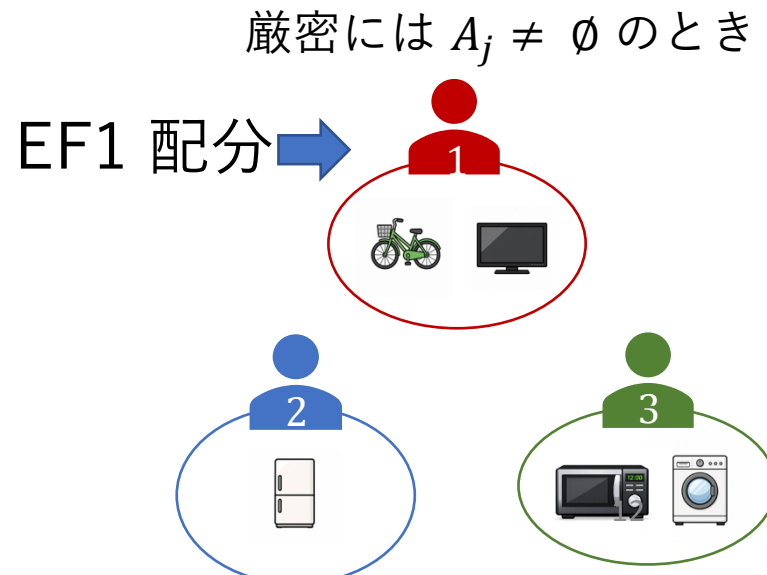
EF1配分 (Envy-freeness up to one item) [Budish, 2011]

どのエージェントも他のエージェントの
あるアイテムをひとつ取り除けば羨望しない

配分 $A = (A_1, \dots, A_n)$: **EF1** $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$$\forall i, \forall j \in N, \exists g \in A_j, \quad v_i(A_i) \geq v_i(A_j \setminus \{g\})$$

					
	15	3	2	2	6
	7	5	5	5	7
	20	3	3	3	3



EF1配分 (Envy-freeness up to one item) [Budish, 2011]

どのエージェントも他のエージェントの
あるアイテムをひとつ取り除けば羨望しない

$$\text{配分 } A = (A_1, \dots, A_n) : \text{EF1} \stackrel{\text{def}}{\iff} \\ \forall i, \forall j \in N, \exists g \in A_j, \quad v_i(A_i) \geq v_i(A_j \setminus \{g\})$$

EF1 配分はどのような入力に対しても常に存在して、
多項式時間で求めることができる。

➤ Round-Robin Algorithm (加法的)

[Caragiannis, Kurokawa, Moulin, Procaccia, Shah, and Wang, EC 2016]

➤ Envy-Cycle Elimination Algorithm (一般的)

[Lipton, Markakis, Mossel, and Saberi, EC 2004; Budish, 2011]

Round-Robin Algorithm

[Caragiannis, Kurokawa, Moulin, Procaccia, Shah, and Wang, EC 2016]

すべてのアイテムが配分されるまで、以下を繰り返す:

エージェント $1, 2, \dots, n$ の順に、各エージェントは残っているアイテムの中から、自分にとって評価値が最も高いアイテムをひとつ選び、受け取る。

					
	15	3	2	2	6
	7	5	5	5	7
	20	3	3	3	3

Round-Robin Algorithm

[Caragiannis, Kurokawa, Moulin, Procaccia, Shah, and Wang, EC 2016]

すべてのアイテムが配分されるまで、以下を繰り返す:

エージェント $1, 2, \dots, n$ の順に、各エージェントは残っているアイテムの中から、自分にとって評価値が最も高いアイテムをひとつ選び、受け取る。

					
1 	15	3	2	2	6
2 	7	5	5	5	7
3 	20	3	3	3	3

Round-Robin Algorithm

[Caragiannis, Kurokawa, Moulin, Procaccia, Shah, and Wang, EC 2016]

すべてのアイテムが配分されるまで、以下を繰り返す:

エージェント $1, 2, \dots, n$ の順に、各エージェントは残っているアイテムの中から、自分にとって評価値が最も高いアイテムをひとつ選び、受け取る。

					
1 	15	3	2	2	6
2 	7	5	5	5	7
3 	20	3	3	3	3

Round-Robin Algorithm

[Caragiannis, Kurokawa, Moulin, Procaccia, Shah, and Wang, EC 2016]

すべてのアイテムが配分されるまで、以下を繰り返す:

エージェント $1, 2, \dots, n$ の順に、各エージェントは残っているアイテムの中から、自分にとって評価値が最も高いアイテムをひとつ選び、受け取る。

					
1 	15	3	2	2	6
2 	7	5	5	5	7
3 	20	3	3	3	3

Round-Robin Algorithm

[Caragiannis, Kurokawa, Moulin, Procaccia, Shah, and Wang, EC 2016]

すべてのアイテムが配分されるまで、以下を繰り返す:

エージェント $1, 2, \dots, n$ の順に、各エージェントは残っているアイテムの中から、自分にとって評価値が最も高いアイテムをひとつ選び、受け取る。

					
1 	15	3	2	2	6
2 	7	5	5	5	7
3 	20	3	3	3	3

Round-Robin Algorithm

[Caragiannis, Kurokawa, Moulin, Procaccia, Shah, and Wang, EC 2016]

すべてのアイテムが配分されるまで、以下を繰り返す:

エージェント $1, 2, \dots, n$ の順に、各エージェントは残っているアイテムの中から、自分にとって評価値が最も高いアイテムをひとつ選び、受け取る。

定理 各エージェントの評価関数が加法的であるとき、
Round-Robin Algorithm はEF1 配分を出力する。

					
1 	15	3	2	2	6
2 	7	5	5	5	7
3 	20	3	3	3	3

← EF1 配分

Round-Robin Algorithm

[Caragiannis, Kurokawa, Moulin, Procaccia, Shah, and Wang, EC 2016]

すべてのアイテムが配分されるまで、以下を繰り返す:

エージェント $1, 2, \dots, n$ の順に、各エージェントは残っているアイテムの中から、自分にとって評価値が最も高いアイテムをひとつ選び、受け取る。

定理 各エージェントの評価関数が加法的であるとき、
Round-Robin Algorithm はEF1 配分を出力する。

証明

- $i, j \in N$ ($i < j$) を任意に固定
- 「 i から j 」および「 j から i 」へのEF1の羨望がないことを示せばよい

	1	2	...	$\lceil \frac{m}{n} \rceil - 1$	$\lceil \frac{m}{n} \rceil$	ラウンド
i	☐	☐	...	☐	☐	j が最後のラウンドでアイテムを受け取るなら、 i も受け取る。
j	☐	☐	...	☐	☐	

Round-Robin Algorithm

[Caragiannis, Kurokawa, Moulin, Procaccia, Shah, and Wang, EC 2016]

すべてのアイテムが配分されるまで、以下を繰り返す:

エージェント $1, 2, \dots, n$ の順に、各エージェントは残っているアイテムの中から、自分にとって評価値が最も高いアイテムをひとつ選び、受け取る。

定理 各エージェントの評価関数が加法的であるとき、
Round-Robin Algorithm はEF1 配分を出力する。

証明

- $i, j \in N$ ($i < j$) を任意に固定
- 「 i から j 」および「 j から i 」へのEF1の羨望がないことを示せばよい

	1	2	...	$\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor - 1$	$\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor$	ラウンド
i	☐	☐	...	☐	☐	j が最後のラウンドでアイテムを受け取るなら、 i も受け取る。
	IV	IV	...	IV	IV	
j	☐	☐	...	☐	☐	

Round-Robin Algorithm

[Caragiannis, Kurokawa, Moulin, Procaccia, Shah, and Wang, EC 2016]

すべてのアイテムが配分されるまで、以下を繰り返す:

エージェント $1, 2, \dots, n$ の順に、各エージェントは残っているアイテムの中から、自分にとって評価値が最も高いアイテムをひとつ選び、受け取る。

定理 各エージェントの評価関数が加法的であるとき、
Round-Robin Algorithm はEF1 配分を出力する。

証明

- $i, j \in N$ ($i < j$) を任意に固定
- 「 i から j 」および「 j から i 」へのEF1の羨望がないことを示せばよい

	1	2	...	$\lceil \frac{m}{n} \rceil - 1$	$\lceil \frac{m}{n} \rceil$	ラウンド
i	☒	☐	...	☐	☐	j が最後のラウンドでアイテムを受け取るなら、 i も受け取る。
j	☐	☐	...	☐	☐	

Envy-Cycle Elimination Algorithm

[Lipton, Markakis, Mossel, and Saberi, EC 2004; Budish, 2011]

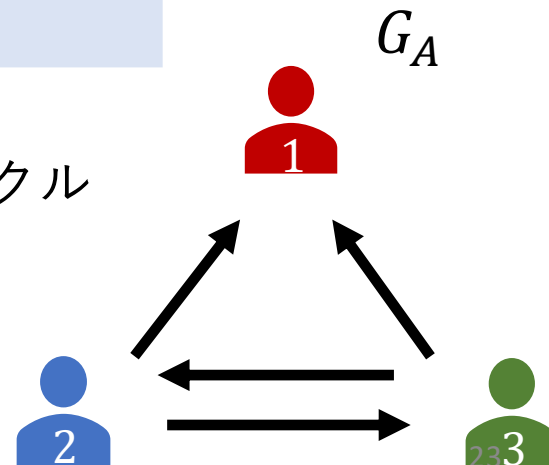
$A = (A_1, \dots, A_n)$: **部分配分** $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

- A_i : エージェント i のアイテム集合
- $\bigcup_{i=1}^n A_i \subseteq M$
- 相異なる i, i' に対して, $A_i \cap A_{i'} = \emptyset$

部分配分 $A = (A_1, \dots, A_n)$ に対する **羨望グラフ** $G_A \stackrel{\text{def}}{\iff}$

- 頂点集合 $V(G_A) = N$
- 辺集合 $(i, j) \in E(G_A) \iff \underline{v_i(A_i) < v_i(A_j)}$
(i は j を羨む)

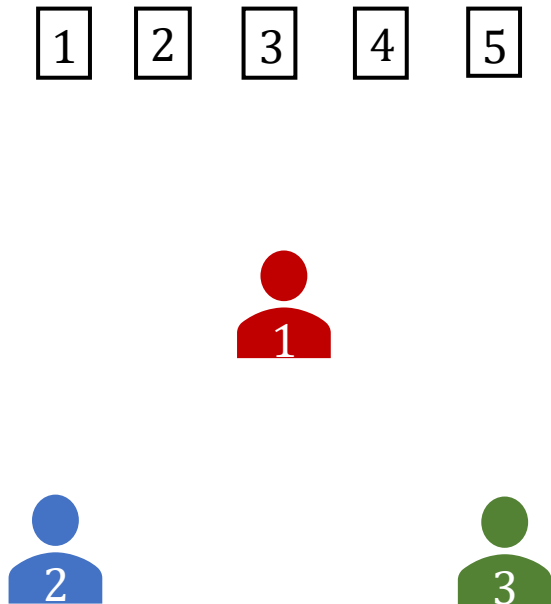
➤ **羨望サイクル** : 羨望グラフにおける有向サイクル



Envy-Cycle Elimination Algorithm

[Lipton, Markakis, Mossel, and Saberi, EC 2004; Budish, 2011]

1. $A \leftarrow (\emptyset, \dots, \emptyset)$.
2. For $t = 1, 2, \dots, m$ do
3. 羨望グラフ G_A における入次数 0 のエージェントに、アイテム t を配分する。
4. 羨望サイクルがある限り、サイクルに沿ってアイテム集合を交換する。
5. Return 配分 A

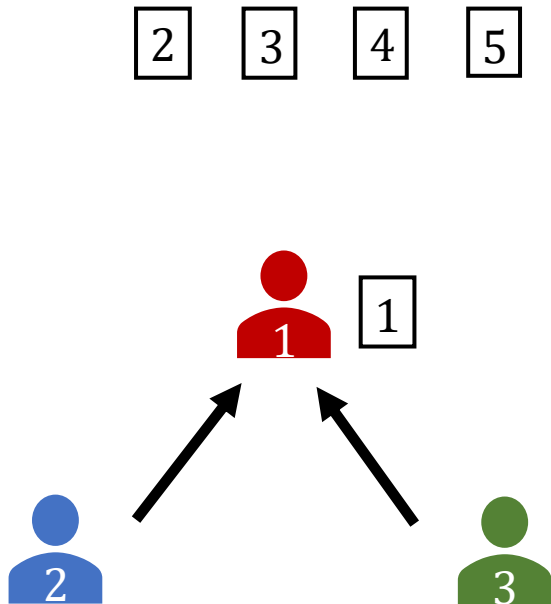


	1	2	3	4	5
1	12	6	15	9	11
2	14	2	8	7	5
3	13	10	3	4	1

Envy-Cycle Elimination Algorithm

[Lipton, Markakis, Mossel, and Saberi, EC 2004; Budish, 2011]

1. $A \leftarrow (\emptyset, \dots, \emptyset)$.
2. For $t = 1, 2, \dots, m$ do
3. 羨望グラフ G_A における入次数 0 のエージェントに、アイテム t を配分する。
4. 羨望サイクルがある限り、サイクルに沿ってアイテム集合を交換する。
5. Return 配分 A

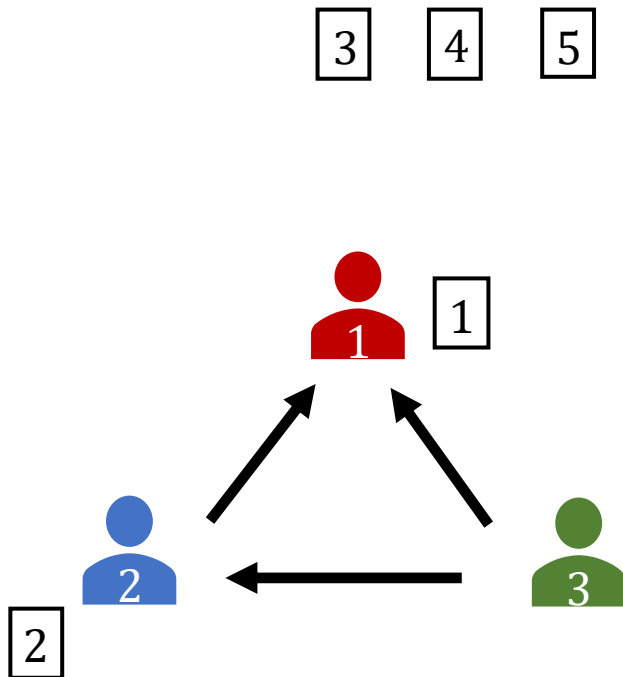


	1	2	3	4	5
1	12	6	15	9	11
2	14	2	8	7	5
3	13	10	3	4	1

Envy-Cycle Elimination Algorithm

[Lipton, Markakis, Mossel, and Saberi, EC 2004; Budish, 2011]

1. $A \leftarrow (\emptyset, \dots, \emptyset)$.
2. For $t = 1, 2, \dots, m$ do
3. 羨望グラフ G_A における入次数 0 のエージェントに, アイテム t を配分する.
4. 羨望サイクルがある限り, サイクルに沿ってアイテム集合を交換する.
5. Return 配分 A

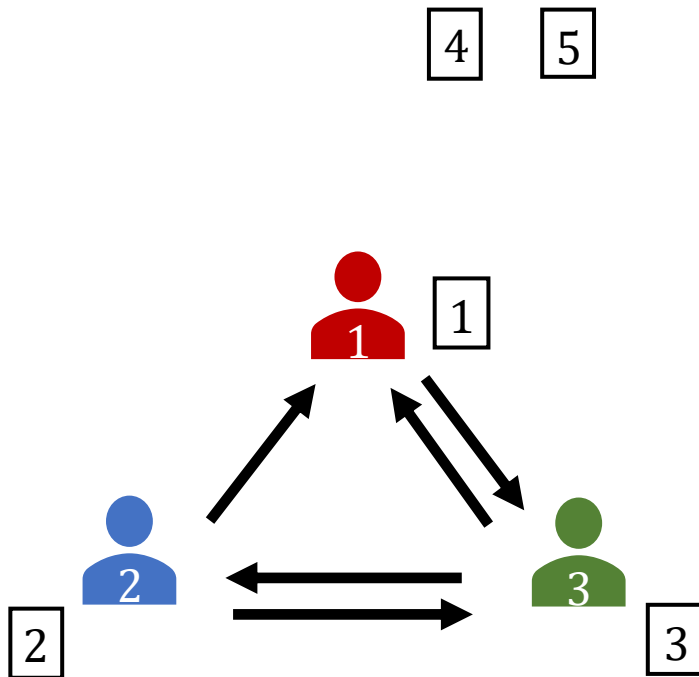


	1	2	3	4	5
1	12	6	15	9	11
2	14	2	8	7	5
3	13	10	3	4	1

Envy-Cycle Elimination Algorithm

[Lipton, Markakis, Mossel, and Saberi, EC 2004; Budish, 2011]

1. $A \leftarrow (\emptyset, \dots, \emptyset)$.
2. For $t = 1, 2, \dots, m$ do
3. 羨望グラフ G_A における入次数 0 のエージェントに、アイテム t を配分する。
4. 羨望サイクルがある限り、サイクルに沿ってアイテム集合を交換する。
5. Return 配分 A

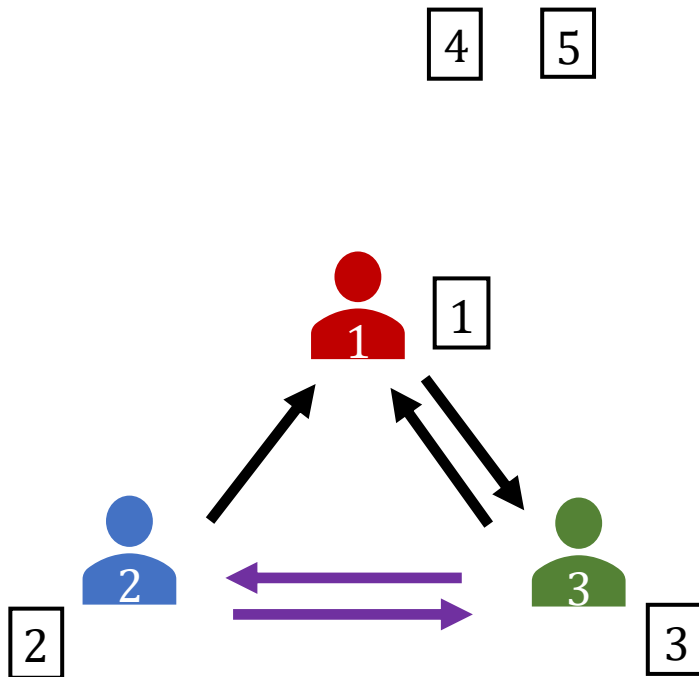


	1	2	3	4	5
1	12	6	15	9	11
2	14	2	8	7	5
3	13	10	3	4	1

Envy-Cycle Elimination Algorithm

[Lipton, Markakis, Mossel, and Saberi, EC 2004; Budish, 2011]

1. $A \leftarrow (\emptyset, \dots, \emptyset)$.
2. For $t = 1, 2, \dots, m$ do
3. 羨望グラフ G_A における入次数 0 のエージェントに、アイテム t を配分する。
4. 羨望サイクルがある限り、サイクルに沿ってアイテム集合を交換する。
5. Return 配分 A

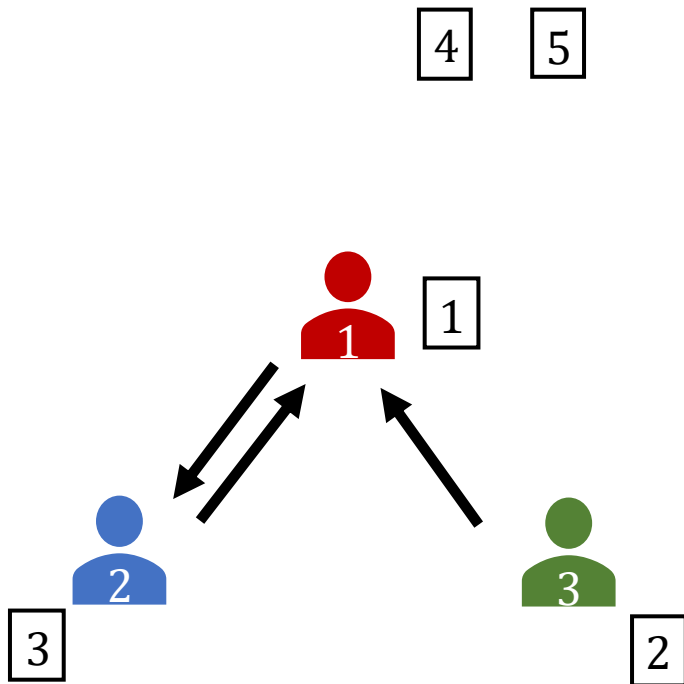


	1	2	3	4	5
1	12	6	15	9	11
2	14	2	8	7	5
3	13	10	3	4	1

Envy-Cycle Elimination Algorithm

[Lipton, Markakis, Mossel, and Saberi, EC 2004; Budish, 2011]

1. $A \leftarrow (\emptyset, \dots, \emptyset)$.
2. For $t = 1, 2, \dots, m$ do
3. 羨望グラフ G_A における入次数 0 のエージェントに、アイテム t を配分する。
4. 羨望サイクルがある限り、サイクルに沿ってアイテム集合を交換する。
5. Return 配分 A

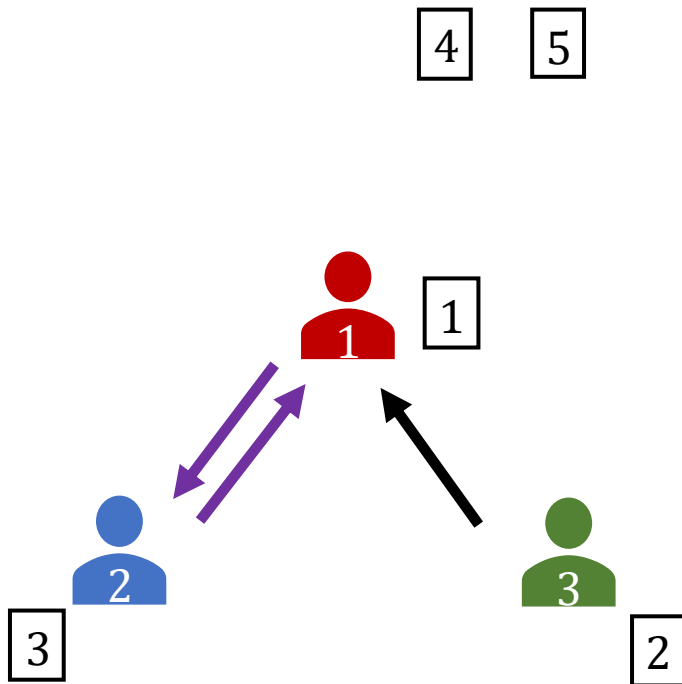


	1	2	3	4	5
1	12	6	15	9	11
2	14	2	8	7	5
3	13	10	3	4	1

Envy-Cycle Elimination Algorithm

[Lipton, Markakis, Mossel, and Saberi, EC 2004; Budish, 2011]

1. $A \leftarrow (\emptyset, \dots, \emptyset)$.
2. For $t = 1, 2, \dots, m$ do
3. 羨望グラフ G_A における入次数 0 のエージェントに、アイテム t を配分する。
4. 羨望サイクルがある限り、サイクルに沿ってアイテム集合を交換する。
5. Return 配分 A

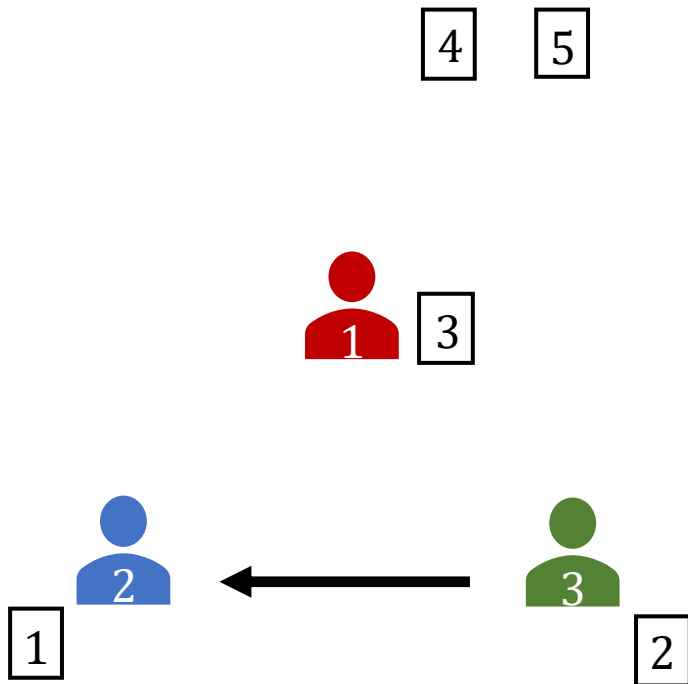


	1	2	3	4	5
1	12	6	15	9	11
2	14	2	8	7	5
3	13	10	3	4	1

Envy-Cycle Elimination Algorithm

[Lipton, Markakis, Mossel, and Saberi, EC 2004; Budish, 2011]

1. $A \leftarrow (\emptyset, \dots, \emptyset)$.
2. For $t = 1, 2, \dots, m$ do
3. 羨望グラフ G_A における入次数 0 のエージェントに、アイテム t を配分する。
4. 羨望サイクルがある限り、サイクルに沿ってアイテム集合を交換する。
5. Return 配分 A

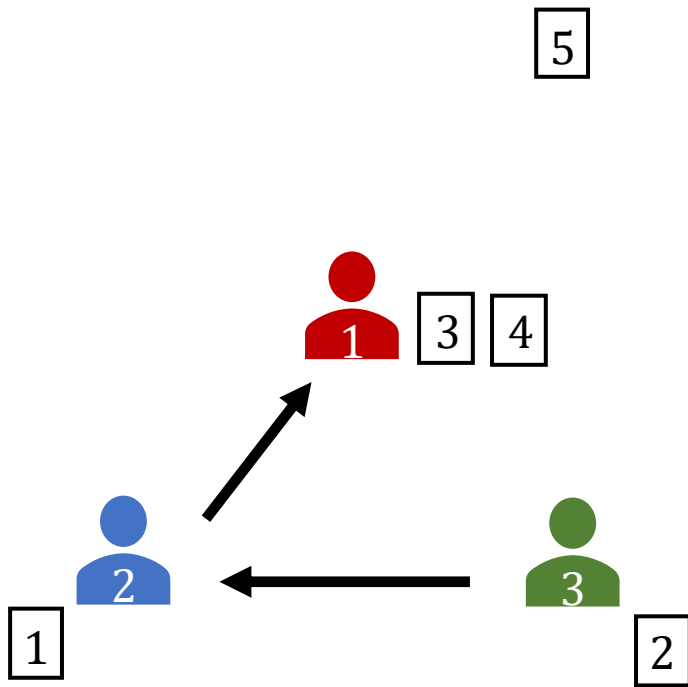


	1	2	3	4	5
1	12	6	15	9	11
2	14	2	8	7	5
3	13	10	3	4	1

Envy-Cycle Elimination Algorithm

[Lipton, Markakis, Mossel, and Saberi, EC 2004; Budish, 2011]

1. $A \leftarrow (\emptyset, \dots, \emptyset)$.
2. For $t = 1, 2, \dots, m$ do
3. 羨望グラフ G_A における入次数 0 のエージェントに、アイテム t を配分する。
4. 羨望サイクルがある限り、サイクルに沿ってアイテム集合を交換する。
5. Return 配分 A

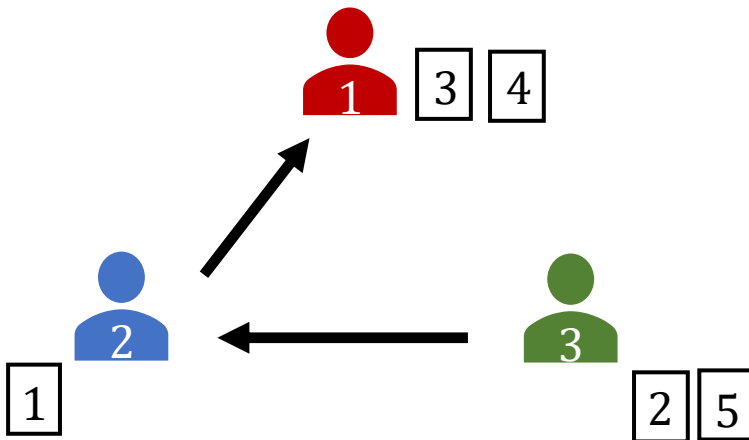


	1	2	3	4	5
1	12	6	15	9	11
2	14	2	8	7	5
3	13	10	3	4	1

Envy-Cycle Elimination Algorithm

[Lipton, Markakis, Mossel, and Saberi, EC 2004; Budish, 2011]

1. $A \leftarrow (\emptyset, \dots, \emptyset)$.
2. For $t = 1, 2, \dots, m$ do
3. 羨望グラフ G_A における入次数 0 のエージェントに、アイテム t を配分する。
4. 羨望サイクルがある限り、サイクルに沿ってアイテム集合を交換する。
5. Return 配分 A



	1	2	3	4	5
1	12	6	15	9	11
2	14	2	8	7	5
3	13	10	3	4	1

Envy-Cycle Elimination Algorithm

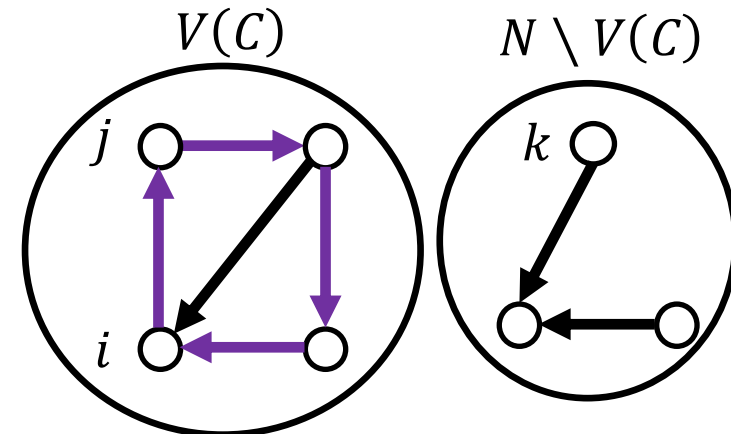
[Lipton, Markakis, Mossel, and Saberi, EC 2004; Budish, 2011]

1. $A \leftarrow (\emptyset, \dots, \emptyset)$.
2. For $t = 1, 2, \dots, m$ do
3. 羨望グラフ G_A における入次数 0 のエージェントに、アイテム t を配分する.
4. 羨望サイクルがある限り、サイクルに沿ってアイテム集合を交換する.
5. Return 配分 A

補題 Line 4 の羨望サイクル除去は、高々 $O(n^2)$ 回の交換で終了する.

証明 羨望サイクル C に沿ってバンドルを交換すると、辺数が真に減少する.

- $N \setminus V(C)$ 内の辺は変わらない
- $N \setminus V(C)$ から $V(C)$ への辺数は変わらない
(C 上のバンドルが並び替えられるだけ)
- $V(C)$ から $N \setminus V(C)$ への辺数は増加しない
(C 上のエージェントはより好ましいバンドルを得る)
- $V(C)$ 内の辺数は少なくとも $|V(C)|$ 本減少する(なぜか?)



Envy-Cycle Elimination Algorithm

[Lipton, Markakis, Mossel, and Saberi, EC 2004; Budish, 2011]

1. $A \leftarrow (\emptyset, \dots, \emptyset)$.
2. For $t = 1, 2, \dots, m$ do
3. 羨望グラフ G_A における入次数 0 のエージェントに, アイテム t を配分する.
4. 羨望サイクルがある限り, サイクルに沿ってアイテム集合を交換する.
5. Return 配分 A

定理 各エージェントの評価関数が一般的であるとき,
Envy-Cycle Elimination Algorithm はEF1 配分を出力する.

証明 $A^t = (A_1^t, \dots, A_n^t)$: t 回目の反復終了時の部分配分

A^{t-1} がEF1であるとき, A^t もEF1であることを示せばよい.

i : アイテム t を受け取るエージェント. B^t : t 回目の反復のLine 3の終了時の部分配分

各エージェント $j \in N \setminus \{i\}$ について, j から i へのEF1の羨望がないことを示す.

$$v_j(A_j^t) \geq v_j(B_j^t) = v_j(A_j^{t-1}) \geq v_j(A_i^{t-1}) = v_j(A_i^t \setminus t).$$

その他の関係についても示せる. よって, EF1は保たれる.

演習問題 1

すべてのエージェントは加法的評価関数をもつとする.

配分 $A = (A_1, \dots, A_n)$: **EFL** $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

任意の $i, j \in N$ に対して, 次のいずれかが成り立つ:

- A_j に含まれる, i にとって正の価値のアイテムが高々ひとつ.
- あるアイテム $g \in A_j$ が存在して,

$$v_i(A_i) \geq v_i(A_j \setminus g) \text{ かつ } v_i(A_i) \geq v_i(g)$$

Envy-Cycle Elimination Algorithmを, 各反復において, 入次数 0 であるエージェント i を一人選び, 未配分アイテムの中から i にとって最も価値の高いアイテムを与えるように修正する. この修正版アルゴリズムがEFL配分を出力することを示せ.

公平性と効率性の両立

- 公平性：財が各人に公正に分配されること
- **効率性**：財が無駄なく効果的に活用されていること

				
1	100	1	1	1
2	100	1	1	1
3	0	1	1	1

EF1配分

				
1	100	1	1	1
2	100	1	1	1
3	0	1	1	1

EF1配分

パレート最適配分

だれの評価値も下げることなく，少なくともひとりの評価値を上げることがもはやできない

配分 Y が配分 X を **パレート支配** $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

➤ $\forall i \in N, v_i(Y_i) \geq v_i(X_i)$

➤ $\exists j \in N, v_j(Y_j) > v_j(X_j)$

だれの評価値も下げることなく，
少なくともひとりの評価値を上げること

配分 $A = (A_1, \dots, A_n)$: **パレート最適 (PO)** $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

A はどの配分にもパレート支配されない

Nash Social Welfare

$A = (A_1, \dots, A_n)$: 配分

$(\prod_{i \in N} v_i(A_i))^{\frac{1}{n}}$: 配分 A に対する **Nash social welfare**

簡単のため, Nash social welfareの最大値は正とする.

Kalai Prize 2024

定理 [Caragiannis, Kurokawa, Moulin, Procaccia, Shah, and Wang, EC 2016]

各エージェントが加法的評価関数をもつとする. このとき,
Nash social welfareを最大化する配分はEF1かつパレート最適である.

- Nash social welfare の最大値が 0 のときは,
正の評価値を得るエージェント数を最大化し, その中で正の評価値の積を最大化.

MNW $\Rightarrow$ EF1 + PO

定理 [Caragiannis, Kurokawa, Moulin, Procaccia, Shah, and Wang, EC 2016]

各エージェントが加法的評価関数をもつとする。このとき、
Nash social welfareを最大化する配分はEF1かつパレート最適である。

証明 $A = (A_1, \dots, A_n)$: Nash social welfare を最大化する配分

A がパレート最適であること

A がパレート最適でないとする、次を満たす配分 B が存在する。

- $\forall i \in N, v_i(B_i) \geq v_i(A_i)$
- $\exists j \in N, v_j(B_j) > v_j(A_j)$

$$\left(\prod_{i \in N} v_i(B_i) \right)^{\frac{1}{n}} > \left(\prod_{i \in N} v_i(A_i) \right)^{\frac{1}{n}}$$

となり、 A のNash social welfare の最大性に矛盾。

MNW $\Rightarrow$ EF1 + PO

定理 [Caragiannis, Kurokawa, Moulin, Procaccia, Shah, and Wang, EC 2016]

各エージェントが加法的評価関数をもつとする。このとき、
Nash social welfareを最大化する配分はEF1かつパレート最適である。

証明 $A = (A_1, \dots, A_n)$: Nash social welfare を最大化する配分

A がEF1であること A がEF1でないとする、

あるエージェント i, j が存在して、任意の $g \in A_j$ に対して、 $v_i(A_i) < v_i(A_j \setminus g)$.

$g^* \in \arg \min_{g \in A_j: v_i(g) > 0} \frac{v_j(g)}{v_i(g)}$ を選ぶ。 g^* を j から i へ移した配分を A' とする。

g^* の選び方から、 $\frac{v_j(g^*)}{v_i(g^*)} \leq \frac{v_j(A_j)}{v_i(A_j)}$ が成り立つ(なぜか?) .

また、 A はEF1でないので、 $v_i(A_i) + v_i(g^*) < v_i(A_j)$.

よって、 $\frac{v_j(g^*)}{v_i(g^*)} (v_i(A_i) + v_i(g^*)) < v_j(A_j) \Leftrightarrow \left(1 + \frac{v_i(g^*)}{v_i(A_i)}\right) \left(1 - \frac{v_j(g^*)}{v_j(A_j)}\right) > 1$

$\Leftrightarrow \prod_{i \in N} v_i(A'_i) > \prod_{i \in N} v_i(A_i)$ となり、 A のNash social welfare の最大性に矛盾。

EF1 + PO配分

- [Caragiannis, Kurokawa, Moulin, Procaccia, Shah and Wang, EC 2016]
 - EF1+PO配分は必ず存在
(Nash social welfare 最大化 → EF1+PO配分)
NP困難
- [Barman, Krishnamurthy, and Vaish, EC 2018]
 - EF1+PO配分を求める擬多項式時間アルゴリズムを提案
- [Murhekar and Garg AAI 2021; Mahara, WINE 2025]
 - n が定数のとき, EF1+PO配分を求める多項式時間アルゴリズムを提案

未解決問題：EF1とパレート最適性を同時に満たす配分を求める
多項式時間アルゴリズムは存在するか？

未解決問題：加法的よりも広い評価関数クラスで,
EF1とパレート最適性を同時に満たす配分は存在するか？

演習問題 2

すべてのエージェントは同一の加法的評価関数 v をもつとする.

$A = (A_1, \dots, A_n)$ を任意の EF1 配分,

A^* を Nash social welfare 最大の配分, $\text{NSW}(A^*) > 0$ とする. ただし,

$$\text{NSW}(A) := \left(\prod_{i \in N} v(A_i) \right)^{\frac{1}{n}}.$$

(1) 各 $i \in N$ について, A_i に含まれる最大価値のアイテムを g_i とする.

$\ell := \min_{i \in N} v(A_i)$, $H := \{g_1, \dots, g_n\}$ とおく.

H の任意の分割 $H_1, \dots, H_n$ に対して,

$$\prod_{i \in N} (\ell + v(H_i)) \leq \prod_{i \in N} (\ell + v(g_i))$$

が成り立つことを示せ.

(2) $\text{NSW}(A) \geq \frac{1}{4} \text{NSW}(A^*)$ を示せ.

目次

- 1限. 不可分財の公平配分理論：基礎と主要概念
- **2限. EFX配分の存在問題**
- 3限. 不可分な負担の公平かつ効率的な配分

EF1配分 (Envy-freeness up to one item) [Budish, 2011]

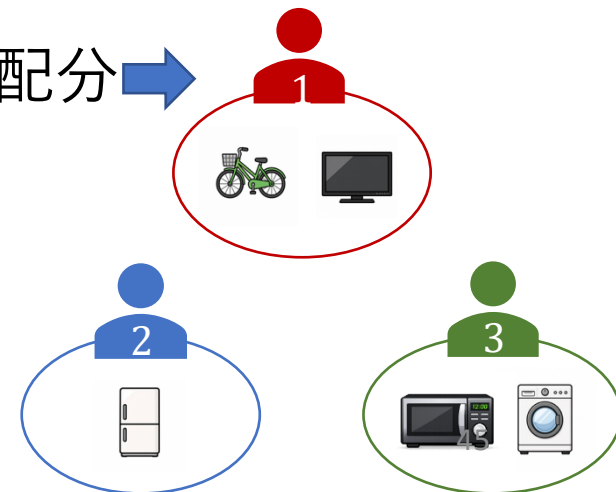
どのエージェントも他のエージェントの
あるアイテムをひとつ取り除けば羨望しない

配分 $A = (A_1, \dots, A_n)$: **EF1** $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$$\forall i, \forall j \in N, \exists g \in A_j, \quad v_i(A_i) \geq v_i(A_j \setminus \{g\})$$

					
	15	3	2	2	6
	7	5	5	5	7
	20	3	3	3	3

厳密には $A_j \neq \emptyset$ のとき
EF1 配分 $\rightarrow$



EFX配分 (Envy-freeness up to **any** item)

[Caragiannis, Kurokawa, Moulin, Procaccia, Shah, and Wang, EC 2016]

どのエージェントも 他のエージェントの
任意のアイテムをひとつ取り除けば 羨望しない

配分 $A = (A_1, \dots, A_n) : \text{EFX} \stackrel{\text{def}}{\iff}$

$$\forall i, \forall j \in N, \forall g \in A_j, \quad v_i(A_i) \geq v_i(A_j \setminus \{g\})$$

EFX配分 (Envy-freeness up to **any** item)

[Caragiannis, Kurokawa, Moulin, Procaccia, Shah, and Wang, EC 2016]

どのエージェントも他のエージェントの
任意のアイテムをひとつ取り除けば羨望しない

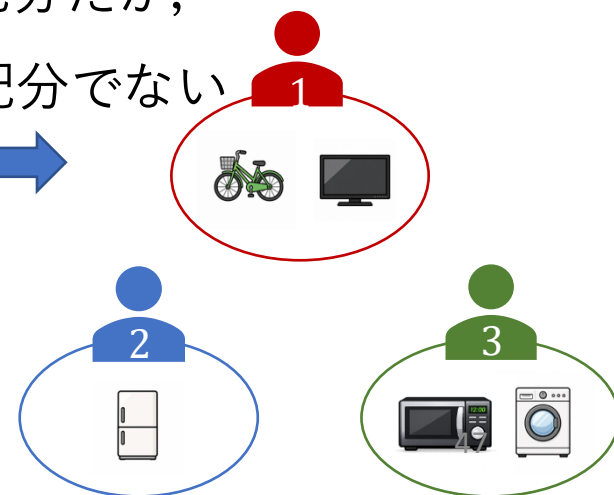
配分 $A = (A_1, \dots, A_n)$: **EFX** $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$$\forall i, \forall j \in N, \forall g \in A_j, \quad v_i(A_i) \geq v_i(A_j \setminus \{g\})$$

					
	15	3	2	2	6
	7	5	5	5	7
	20	3	3	3	3

EF1 配分だが、

EFX 配分でない



EFX配分 (Envy-freeness up to **any** item)

[Caragiannis, Kurokawa, Moulin, Procaccia, Shah, and Wang, EC 2016]

どのエージェントも他のエージェントの
任意のアイテムをひとつ取り除けば羨望しない

配分 $A = (A_1, \dots, A_n) : \text{EFX} \stackrel{\text{def}}{\iff}$

$$\forall i, \forall j \in N, \forall g \in A_j, v_i(A_i) \geq v_i(A_j \setminus \{g\})$$

					
	15	3	2	2	6
					
					

EF1 配分だが、

EFX 配分でない



エージェント3のアイテムを1個取り除いても
エージェント1はエージェント3を羨む
 $(2+2) < 15$



EFX配分 (Envy-freeness up to **any** item)

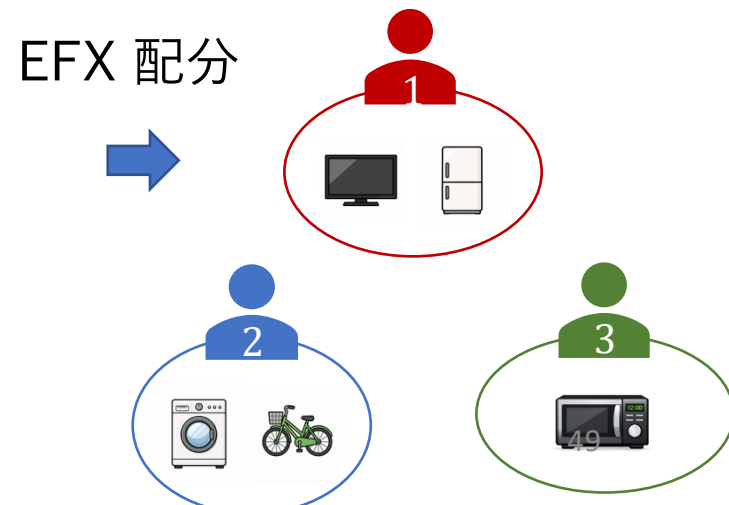
[Caragiannis, Kurokawa, Moulin, Procaccia, Shah, and Wang, EC 2016]

どのエージェントも他のエージェントの
任意のアイテムをひとつ取り除けば羨望しない

配分 $A = (A_1, \dots, A_n)$: **EFX** $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$$\forall i, \forall j \in N, \forall g \in A_j, \quad v_i(A_i) \geq v_i(A_j \setminus \{g\})$$

					
1	15	3	2	2	6
2	7	5	5	5	7
3	20	3	3	3	3



EFX配分は存在するか？

EFX配分は存在するか？

重要な未解決問題: 限られた場合以外 あまりよくわかっていない

“Despite significant effort, we were not able to settle the question of whether an EFX allocation always exists (assuming all items must be allocated), and leave it as an enigmatic open question.”

[Caragiannis, Kurokawa, Moulin, Procaccia, Shah, and Wang, EC 2016]

「多大な努力にも関わらず、（すべてのアイテムを配分する仮定のもとで）
EFX 配分が常に存在するかどうかを解決するには至らず、
この問題を謎めいた未解決問題として残す。」

“Arguably, EFX is the best fairness analog of envy-freeness of indivisible items.”

[Caragiannis, Gravin, and Huang, EC 2019]

「EFX は、不可分財における無羨望性の最も優れた対応概念と言えるでしょう。」

“In my view, it (EFX existence) is the successor of envy-free cake cutting as fair division’s biggest problem.” [Procaccia, 2020]

「私の考えでは、EFX の存在問題は、公平配分における最大の問題として、無羨望
ケーキ分割問題に続くものです。」

EFX配分の存在

➤ エージェントの人数

- 2人, 一般的 [Plaut and Roughgarden, SODA 2018]
- 3人, 加法的 [Chaudhury, Garg, and Mehlhorn, EC 2020]

Best Paper with a Student Lead Author Award

➤ 評価関数の種類

- 1種類, 一般的 [Plaut and Roughgarden, SODA 2018]
- 2種類, 加法的 [Mahara, 2023]
- 2種類, 一般的 [Mahara, ESA 2021]
- 3種類, 加法的 [H.V., Ghosal, Nimbhorkar, and Varma, EC 2025]

未解決問題：4人, 加法的な場合に, EFX配分は常に存在するか？

未解決問題：3人, 加法的な場合に, EFX配分を求める多項式時間アルゴリズムは存在するか？

EFX配分の存在をめぐる多様な進展

➤ 完全な EFX 配分：特殊な評価関数/少数エージェント

- 2人／同一評価／同一ランキング [Plaut and Roughgarden, SODA 2018]
- 同一の加法的評価+高いNash welfare [Barman, Krishnamurthy, and Vaish, AAMAS 2018]
- 2値評価関数 [Amanatidis, Birmpas, Filos-Ratsikas, Hollender, and Voudouris, IJCAI 2020]
- 3人・加法的評価 [Chaudhury, Garg, and Mehlhorn, EC 2020]
- 2種類・加法的評価 [Mahara, 2023]
- 0,1限界価値をもつ劣モジュラ評価 [Babaioff, Ezra, and Feige, AAAI 2021]
- 2種類・一般的評価 [Mahara, ESA 2021]
- 辞書的選好 [Hosseini, Sikdar, Vaish, and Xia, AAAI 2021]
- 財が2種類 [Gorantla, Marwaha, and Velusamy, SODA 2023]
- 3人：1人は MMS-feasible、残り2人は一般的評価 [Akrami, Alon, Chaudhury, Garg, Mehlhorn, and Mehta, EC 2023]
- 0,1限界価値をもつ一般的評価 [Bu, Song, and Yu, IJCS-FAW 2023]
- レベル評価 [Christodoulou and Christoforidis, 2025]
- 3種類・加法的評価 [HV, Ghosal, Nimbhorkar, and Varma, EC 2025]
- 個別2値評価 [Jin and Tao, WINE 2025]
- 財が2種類：EFX + PO [Davidiuk, Dementiev, Ignatiev, and Sagunov, AAAI 2026]
- 単純グラフ・一般的評価 [Christodoulou, Fiat, Koutsoupias, and Sgouritsa, EC 2023]
- 二部多重グラフ評価 [Afshinmehr, Danaei, Kazemi, Mehlhorn, and Rathi, AAMAS 2025]
- 特定の多重グラフクラス・一般的評価 [Sgouritsa and Sotiriou, AAMAS 2025]
- 三角形を含まない多重グラフ評価 [Afshinmehr, Ashuri, Mahmoudkhan, and Mehlhorn, AAMAS 2026]
- 一般の多重グラフ評価 [Christodoulou, Mastrakoulis, Sgouritsa, and Sotiriou, EC 2026; Afshinmehr, Ashuri, Mahmoudkhan, Mehlhorn, and Shahrezaei, EC 2026]

➤ 一部の財を未配分にする

- EFX + 高い Nash welfare [Caragiannis, Gravin, and Huang, EC 2019]
- 高々 $(n-1)$ 個を未配分 [Chaudhury, Kavitha, Mehlhorn, and Sgouritsa, SODA 2020]
- 高々 $(n-2)$ 個を未配分 [Mahara, ESA 2021; Berger, Cohen, Feldman, and Fiat, AAAI 2022]
- 4人：高々1個を未配分 [Berger, Cohen, Feldman, and Fiat, AAAI 2022]
- $(1-\epsilon)$ -EFX + 劣線形個の未配分財 [Chaudhury, Garg, Mehlhorn, Mehta, and Misra, EC 2021; Akrami, Alon, Chaudhury, Garg, Mehlhorn, and Mehta, EC 2023]
- (k) 種類の評価関数：高々 $(k-2)$ 個を未配分 [Ghosal, HV, Nimbhorkar, and Varma, AAAI 2025]

➤ 近似・関連する EFX 概念

- (0.618) -EFX [Amanatidis, Markakis, and Ntotos, AAAI 2020]
- パラメータ化された近似 EFX [Barman, Kar, and Pathak, AAMAS 2024]
- $(2/3)$ -EFX：7人以下／3値／多重グラフ評価 [Amanatidis, Filos, Ratsikas, and Sgouritsa, EC 2024]
- Epistemic EFX：一般的評価 [Akrami and Rathi, AAAI 2025]
- EF1 + Epistemic EFX：加法的評価 [Akrami, Mahara, Mehlhorn and Rathi, 2026]

最近の進展

➤ [Akrami, Mayorov, Mehlhorn, Srinivas, and Weidenbach, 2026]

- 一般的な場合に**EFX配分が必ずしも存在しない**ことを示した！
(3人, 8アイテム)
- SAT solverを用いた計算機支援証明により反例を構成

➤ [Mackenzie and Suzuki, 2026]

- 上記の結果を大幅に簡略化
- さらに単調劣モジュラ関数である場合にも反例を構成

“We suspect that at least for general valuations, there exist instances where no EFX allocation exists, and it may be easier to find a counterexample in that setting.”

[Plaut and Roughgarden, SODA 2018]

「少なくとも一般的評価関数では、EFX配分が存在しないインスタンスがあるのではないかと予想しており、その設定では反例を見つけることがより容易かもしれない。」

各エージェントが同一の加法的評価関数をもつ場合

[Plaut and Roughgarden, SODA 2018; Barman, Krishnamurthy, and Vaish, AAMAS 2018]

評価値が降順になるように各アイテムを整列する:

$$v(g_1) \geq v(g_2) \geq \dots \geq v(g_m).$$

$A \leftarrow (\emptyset, \dots, \emptyset).$

For ラウンド $t = 1, 2, \dots, m$ do

$A_1, \dots, A_n$ の中で評価値が最小のアイテム集合にアイテム g_t を追加する.

Return 配分 A

A_1		0
A_2		0
A_3		0

例 ($n = 3, m = 7$)

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7
	20	17	9	8	6	4	1

各エージェントが同一の加法的評価関数をもつ場合

[Plaut and Roughgarden, SODA 2018; Barman, Krishnamurthy, and Vaish, AAMAS 2018]

評価値が降順になるように各アイテムを整列する:

$$v(g_1) \geq v(g_2) \geq \dots \geq v(g_m).$$

$A \leftarrow (\emptyset, \dots, \emptyset).$

For ラウンド $t = 1, 2, \dots, m$ do

$A_1, \dots, A_n$ の中で評価値が最小のアイテム集合にアイテム g_t を追加する.

Return 配分 A

A_1	g_1	20
A_2		0
A_3		0

例 ($n = 3, m = 7$)

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7
	20	17	9	8	6	4	1

各エージェントが同一の加法的評価関数をもつ場合

[Plaut and Roughgarden, SODA 2018; Barman, Krishnamurthy, and Vaish, AAMAS 2018]

評価値が降順になるように各アイテムを整列する:

$$v(g_1) \geq v(g_2) \geq \dots \geq v(g_m).$$

$A \leftarrow (\emptyset, \dots, \emptyset).$

For ラウンド $t = 1, 2, \dots, m$ do

$A_1, \dots, A_n$ の中で評価値が最小のアイテム集合にアイテム g_t を追加する.

Return 配分 A

A_1	g_1	20
A_2	g_2	17
A_3		0

例 ($n = 3, m = 7$)

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7
	20	17	9	8	6	4	1

各エージェントが同一の加法的評価関数をもつ場合

[Plaut and Roughgarden, SODA 2018; Barman, Krishnamurthy, and Vaish, AAMAS 2018]

評価値が降順になるように各アイテムを整列する:

$$v(g_1) \geq v(g_2) \geq \dots \geq v(g_m).$$

$A \leftarrow (\emptyset, \dots, \emptyset).$

For ラウンド $t = 1, 2, \dots, m$ do

$A_1, \dots, A_n$ の中で評価値が最小のアイテム集合にアイテム g_t を追加する.

Return 配分 A

A_1	g_1	20
A_2	g_2	17
A_3	g_3	9

例 ($n = 3, m = 7$)

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7
	20	17	9	8	6	4	1

各エージェントが同一の加法的評価関数をもつ場合

[Plaut and Roughgarden, SODA 2018; Barman, Krishnamurthy, and Vaish, AAMAS 2018]

評価値が降順になるように各アイテムを整列する:

$$v(g_1) \geq v(g_2) \geq \dots \geq v(g_m).$$

$A \leftarrow (\emptyset, \dots, \emptyset).$

For ラウンド $t = 1, 2, \dots, m$ do

$A_1, \dots, A_n$ の中で評価値が最小のアイテム集合にアイテム g_t を追加する.

Return 配分 A

A_1	g_1	20
A_2	g_2	17
A_3	$g_3 \ g_4$	17

例 ($n = 3, m = 7$)

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7
	20	17	9	8	6	4	1

各エージェントが同一の加法的評価関数をもつ場合

[Plaut and Roughgarden, SODA 2018; Barman, Krishnamurthy, and Vaish, AAMAS 2018]

評価値が降順になるように各アイテムを整列する:

$$v(g_1) \geq v(g_2) \geq \dots \geq v(g_m).$$

$A \leftarrow (\emptyset, \dots, \emptyset).$

For ラウンド $t = 1, 2, \dots, m$ do

$A_1, \dots, A_n$ の中で評価値が最小のアイテム集合にアイテム g_t を追加する.

Return 配分 A

A_1	g_1	20
A_2	$g_2 \ g_5$	23
A_3	$g_3 \ g_4$	17

例 ($n = 3, m = 7$)

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7
	20	17	9	8	6	4	1

各エージェントが同一の加法的評価関数をもつ場合

[Plaut and Roughgarden, SODA 2018; Barman, Krishnamurthy, and Vaish, AAMAS 2018]

評価値が降順になるように各アイテムを整列する:

$$v(g_1) \geq v(g_2) \geq \dots \geq v(g_m).$$

$A \leftarrow (\emptyset, \dots, \emptyset).$

For ラウンド $t = 1, 2, \dots, m$ do

$A_1, \dots, A_n$ の中で評価値が最小のアイテム集合にアイテム g_t を追加する.

Return 配分 A

A_1	g_1	20
A_2	$g_2 \quad g_5$	23
A_3	$g_3 \quad g_4 \quad g_6$	21

例 ($n = 3, m = 7$)

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7
	20	17	9	8	6	4	1

各エージェントが同一の加法的評価関数をもつ場合

[Plaut and Roughgarden, SODA 2018; Barman, Krishnamurthy, and Vaish, AAMAS 2018]

評価値が降順になるように各アイテムを整列する:

$$v(g_1) \geq v(g_2) \geq \dots \geq v(g_m).$$

$A \leftarrow (\emptyset, \dots, \emptyset).$

For ラウンド $t = 1, 2, \dots, m$ do

$A_1, \dots, A_n$ の中で評価値が最小のアイテム集合にアイテム g_t を追加する.

Return 配分 A

A_1	$g_1 \ g_7$	21
A_2	$g_2 \ g_5$	23
A_3	$g_3 \ g_4 \ g_6$	21

例 ($n = 3, m = 7$)

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7
	20	17	9	8	6	4	1

各エージェントが同一の加法的評価関数をもつ場合

[Plaut and Roughgarden, SODA 2018; Barman, Krishnamurthy, and Vaish, AAMAS 2018]

評価値が降順になるように各アイテムを整列する:

$$v(g_1) \geq v(g_2) \geq \dots \geq v(g_m).$$

$A \leftarrow (\emptyset, \dots, \emptyset).$

For ラウンド $t = 1, 2, \dots, m$ do

$A_1, \dots, A_n$ の中で評価値が最小のアイテム集合にアイテム g_t を追加する.

Return 配分 A

定理 このアルゴリズムはEFX配分を出力する.

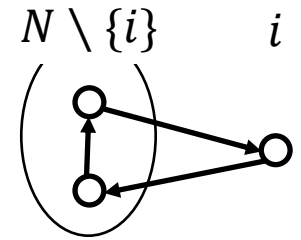
証明 $A^t = (A_1^t, \dots, A_n^t)$: ラウンド t の直後の部分配分
 A^{t-1} がEFXであるとき, A^t もEFXであることを示せばよい.

i : ラウンド t でアイテム g_t を受け取ったエージェント ($A_i^t = A_i^{t-1} \cup \{g_t\}$).

各エージェント $j \in N \setminus \{i\}$ について, i へのEFXを違反する羨みがないことを示せばよい.

これは, 任意の $g \in A_i^t$ について以下が成り立つことから従う.

$$v(A_i^t \setminus \{g\}) \leq v(A_i^t \setminus \{g_t\}) = v(A_i^{t-1}) \leq v(A_j^{t-1}) = v(A_j^t).$$



演習問題 3

すべてのエージェントは加法的評価関数をもつとする。

def
インスタンス $I = (N, M, \{v_i\}_{i \in N})$: 同一ランキング $\iff$
 $\forall i, j \in N, \forall g_1, g_2 \in M, v_i(g_1) \geq v_i(g_2) \iff v_j(g_1) \geq v_j(g_2).$

同一ランキングなインスタンスにおいて，EFX配分が存在することを示せ。

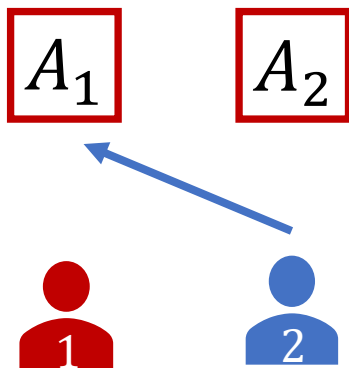
	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
 1	20	15	10	9	5	0
 2	12	10	9	8	6	5
 3	16	15	5	4	2^{64}	1

2人のエージェントに対するEFX配分

Cut-and-Choose Algorithm

1. エージェント 1 の評価関数に対して、先ほどのアルゴリズムでアイテム集合をふたつにわけると (A_1, A_2) となる。
2. A_1, A_2 のうちエージェント 2 にとって大きい方を 2 へ配分する。
3. 残ったアイテム集合をエージェント 1 へ配分する。

定理 このアルゴリズムはEFX配分を出力する。



3人のエージェントに対するEFX配分

➤ [Chaudhury, Garg, and Mehlhorn, EC 2020]

Best Paper with a Student Lead Author Award

- 3人のエージェントが加法的評価関数をもつ場合に、EFX配分が必ず存在することを示した。

➤ [Akrami, Alon, Chaudhury, Garg, Mehlhorn, and Mehta, EC 2023]

- 上記の証明を大幅に簡略化
- さらに評価関数の仮定を拡張した
(1人がMMS-feasible 評価関数を持ち、残り2人が一般的)

➤ [HV, Ghosal, Nimbhorkar, and Varma, EC 2025]

- 任意の人数で、評価関数が高々 3 種類の加法的評価関数であれば、EFX配分が必ず存在することを示した。

3人のエージェントに対するEFX配分

定理 1 1人が単調なMMS-feasible 評価関数を持ち, 残り2人が一般的な評価関数をもつとき, EFX配分は存在する.

$v : 2^M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$: **MMS-feasible** $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

任意の $S \subseteq M$ と, 任意の S の分割 $A = (A_1, A_2), B = (B_1, B_2)$ に対して,
$$\max\{v(A_1), v(A_2)\} \geq \min\{v(B_1), v(B_2)\}$$

MMS-feasible 評価関数の例

$$v(S) = \sum_{g \in S} v(g)$$

$$v(S) = \prod_{g \in S} v(g)$$

$$v(S) = \max_{g \in S} v(g)$$

$$v(S) = \min \left\{ \sum_{g \in S} v(g), B \right\}$$

以後, エージェント 3 の評価関数がMMS-feasibleであるとする

非退化なインスタンス

インスタンス $J = (N, M, \{v_i\}_{i \in N})$: **非退化** $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

任意の $S, T \subseteq M$ と任意の $i \in N$ に対して, $S \neq T \Rightarrow v_i(S) \neq v_i(T)$

補題 任意の非退化なインスタンスにEFX配分が存在するならば,
任意のインスタンスにEFX配分が存在する.

評価関数を適切に摂動

$J = (N, M, \{v_i\}_{i \in N})$



$J^\varepsilon = (N, M, \{v_i^\varepsilon\}_{i \in N})$: **非退化**

$A = (A_1, \dots, A_n)$:
 J においてEFX

$\varepsilon > 0$ が十分小さい



$A = (A_1, \dots, A_n)$:
 J^ε においてEFX

以後, インスタンスは非退化であるとする

PRアルゴリズム [Plaut and Roughgarden, SODA 2018]

すべてのエージェントが同一の一般的評価関数 v をもつとする

$X = (X_1, \dots, X_n)$: 配分, $v(X_1) < \dots < v(X_n)$

X : EFXでない $\Rightarrow v(X_1) < v(X_j \setminus g)$ for some $j \in \{2, 3, \dots, n\}$ and some $g \in X_j$.



X' : g を X_j から X_1 へ移動した配分

$$\min\{v(X_1), \dots, v(X_n)\} < \min\{v(X'_1), \dots, v(X'_n)\}$$

補題 $X = (X_1, \dots, X_n)$: EFXでない配分. 一般的評価関数 v に対して,
PRアルゴリズムを実行すると, 次を満たすEFX配分

$X' = (X'_1, \dots, X'_n)$ が得られる :

$$\min\{v(X_1), \dots, v(X_n)\} < \min\{v(X'_1), \dots, v(X'_n)\}$$

演習問題 4

すべてのエージェントは同一の加法的評価関数 v をもつとする.

問題

入力 : $X = (X_1, \dots, X_n)$: 任意の配分

出力 : $X' = (X'_1, \dots, X'_n)$: 次を満たす EFX 配分

$$\min\{v(X_1), \dots, v(X_n)\} \leq \min\{v(X'_1), \dots, v(X'_n)\}$$

すなわち, 全エージェントの最小評価値を減少させることなく,
EFX 配分へ変換する.

この問題に対する多項式時間アルゴリズムを設計せよ.

EFX-feasibility

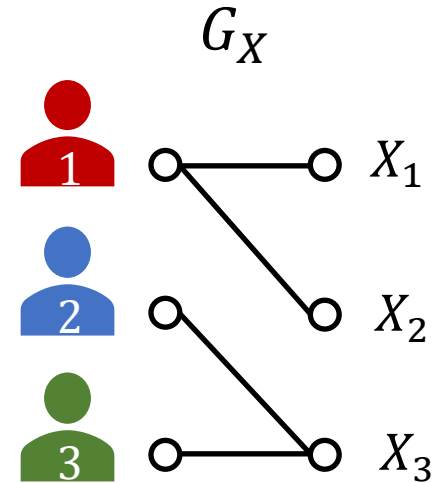
$X = \{X_1, X_2, X_3\}$: M の分割

X_k : エージェント i にとって, **EFX-feasible** $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$$v_i(X_k) \geq \max_{j \in N} \max_{g \in X_j} v_i(X_j \setminus g)$$

$$\iff \forall j \in N, \forall g \in X_j, v_i(X_k) \geq v_i(X_j \setminus g)$$

$\iff$ エージェント i は X_k を受け取ると, 他をEFXの意味で羨望しない.



$G_X = (N, N; E)$: **EFX-feasible グラフ**

➤ $(i, k) \in E \iff X_k$: エージェント i にとって, EFX-feasible

- 各エージェント i に対して, 評価値最大のアイテム集合はEFX-feasible
- G_X に完全マッチングが存在するならばEFX配分が存在する

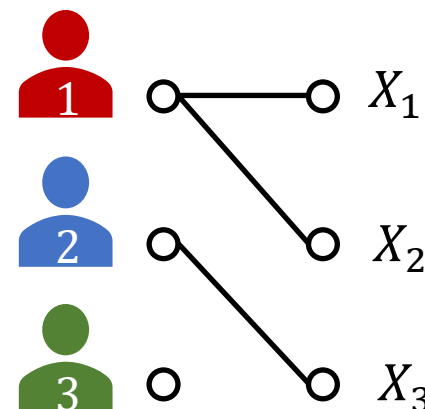
3人のエージェントに対するEFX配分

$X = \{X_1, X_2, X_3\}$: M の分割

ポテンシャル $\phi(X) := \min\{v_1(X_1), v_1(X_2)\}$

不変条件:

- エージェント 1 にとって, X_1, X_2 はEFX-feasible
- エージェント 2 または 3 にとって X_3 はEFX-feasible



補題 1 M の分割 $X = \{X_1, X_2, X_3\}$ が不変条件を満たすとする.

このとき, 以下のいずれかが成り立つ.

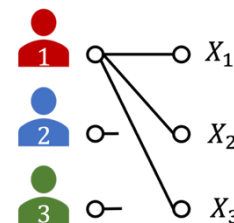
- EFX配分が存在する.
- 不変条件を満たす M の分割 $Y = \{Y_1, Y_2, Y_3\}$ であって,
 $\phi(X) < \phi(Y)$ を満たすものが存在する.

補題 1 $\Rightarrow$ 定理 1 不変条件を満たす M の分割は存在する.

実際, エージェント 1 について, EFX配分を求めればよい.

補題 1 より EFX配分が見つからないときは, ポテンシャルが上昇する.

配分は有限通りしかないので, いずれ EFX配分が見つかる.



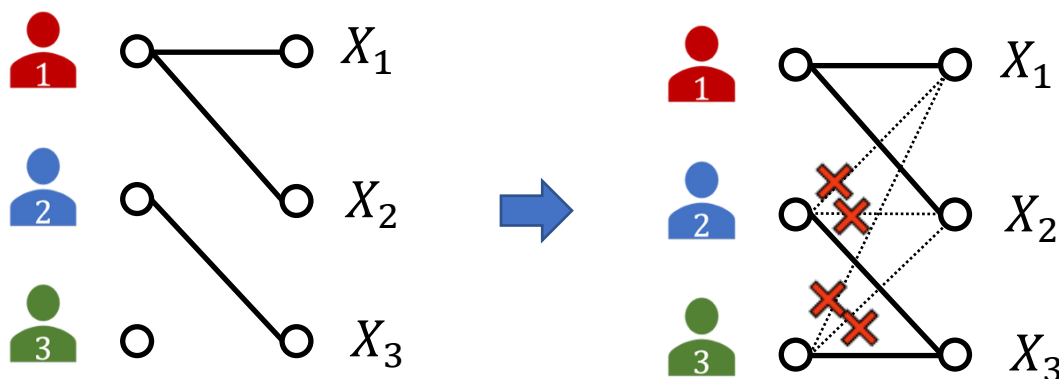
3人のエージェントに対するEFX配分

$X = \{X_1, X_2, X_3\}$: 不変条件を満たす M の分割

$v_1(X_1) < v_1(X_2)$ としてよい.

EFX配分が存在

or



For $i \in \{2,3\}$, $g_i \in X_3$ s.t. $v_i(X_3 \setminus g_i) \geq v_i(X_3 \setminus h)$ for $\forall h \in X_3$

観察 1 For $i \in \{2,3\}$, $v_i(X_3 \setminus g_i) > \max\{v_i(X_1), v_i(X_2)\}$

証明 $v_i(X_1) > v_i(X_2)$ とする. 仮に主張が成り立たないとすると,

$$v_i(X_1) > v_i(X_3 \setminus g_i) \geq \max_{h \in X_3} v_i(X_3 \setminus h).$$

これは X_1 がエージェント i にとってEFX-feasible でないことに矛盾.

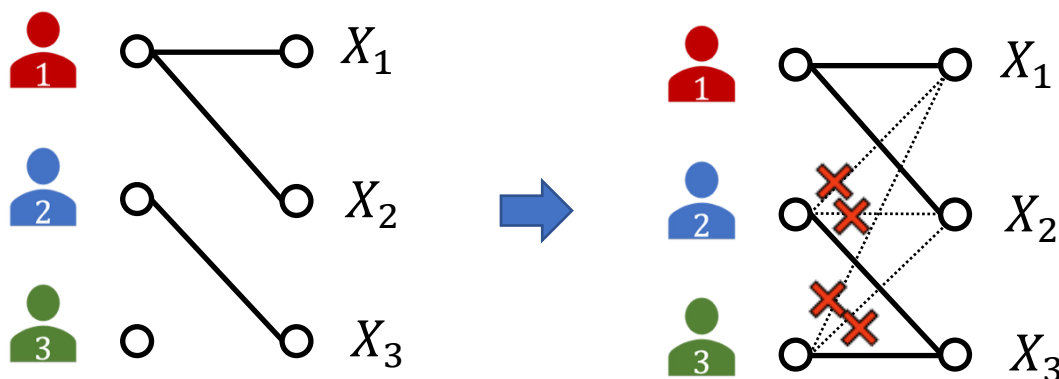
3人のエージェントに対するEFX配分

$X = \{X_1, X_2, X_3\}$: 不変条件を満たす M の分割

$v_1(X_1) < v_1(X_2)$ としてよい.

EFX配分が存在

or



For $i \in \{2,3\}$, $g_i \in X_3$ s.t. $v_i(X_3 \setminus g_i) \geq v_i(X_3 \setminus h)$ for $\forall h \in X_3$

Case1 : $v_2(X_3 \setminus g_2) > v_2(X_1 \cup g_2)$ or $v_3(X_3 \setminus g_3) > v_3(X_1 \cup g_3)$

Case2 : $v_2(X_3 \setminus g_2) < v_2(X_1 \cup g_2)$ and $v_3(X_3 \setminus g_3) < v_3(X_1 \cup g_3)$

3人のエージェントに対するEFX配分

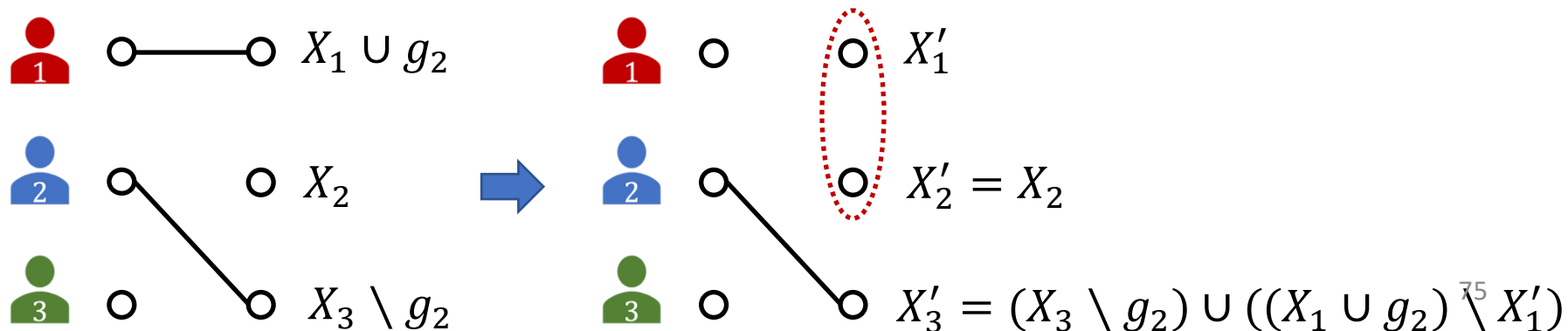
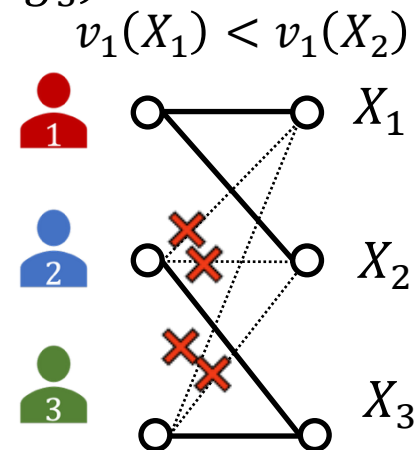
Case1 : $v_2(X_3 \setminus g_2) > v_2(X_1 \cup g_2)$ or $v_3(X_3 \setminus g_3) > v_3(X_1 \cup g_3)$

$v_2(X_3 \setminus g_2) > v_2(X_1 \cup g_2)$ とする.

($v_3(X_3 \setminus g_3) > v_3(X_1 \cup g_3)$)の場合も同様)

g_2 を X_3 から X_1 へ移動する.

X'_1 : $v_1(X'_1) > v_1(X_1)$ を満たす $X_1 \cup g_2$ の極小な集合



3人のエージェントに対するEFX配分

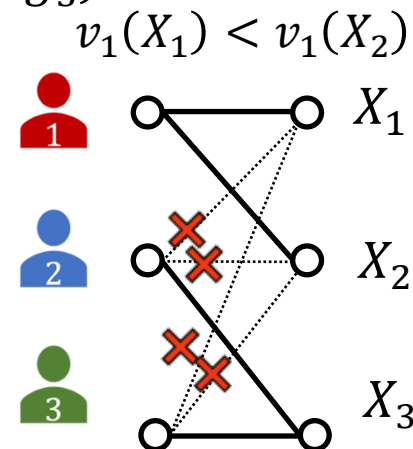
Case1 : $v_2(X_3 \setminus g_2) > v_2(X_1 \cup g_2)$ or $v_3(X_3 \setminus g_3) > v_3(X_1 \cup g_3)$

$v_2(X_3 \setminus g_2) > v_2(X_1 \cup g_2)$ とする.

($v_3(X_3 \setminus g_3) > v_3(X_1 \cup g_3)$)の場合も同様)

g_2 を X_3 から X_1 へ移動する.

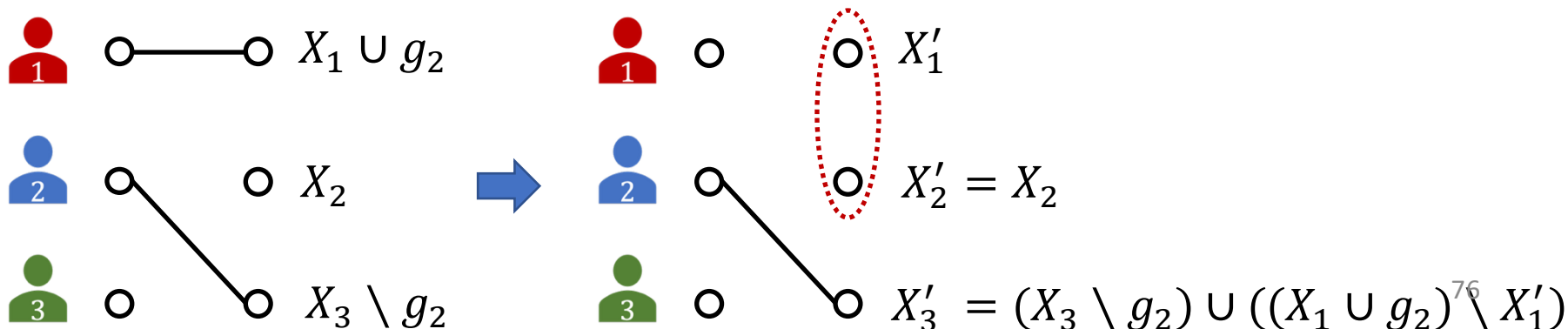
X'_1 : $v_1(X'_1) > v_1(X_1)$ を満たす $X_1 \cup g_2$ の極小な集合



観察 2 $v_1(X'_1) > v_1(X'_2 \setminus g)$ for $\forall g \in X'_2$ and $v_1(X'_2) > v_1(X'_1 \setminus h)$ for $\forall h \in X'_1$

証明 • $v_1(X'_1) > v_1(X_1) > v_1(X_2 \setminus g) = v_1(X'_2 \setminus g)$ for $\forall g \in X'_2$

• $v_1(X'_2) = v_1(X_2) > v_1(X_1) > v_1(X'_1 \setminus h)$ for $\forall h \in X'_1$



3人のエージェントに対するEFX配分

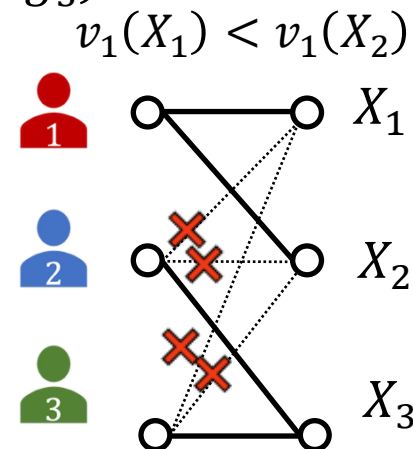
Case1 : $v_2(X_3 \setminus g_2) > v_2(X_1 \cup g_2)$ or $v_3(X_3 \setminus g_3) > v_3(X_1 \cup g_3)$

$v_2(X_3 \setminus g_2) > v_2(X_1 \cup g_2)$ とする.

($v_3(X_3 \setminus g_3) > v_3(X_1 \cup g_3)$)の場合も同様)

g_2 を X_3 から X_1 へ移動する.

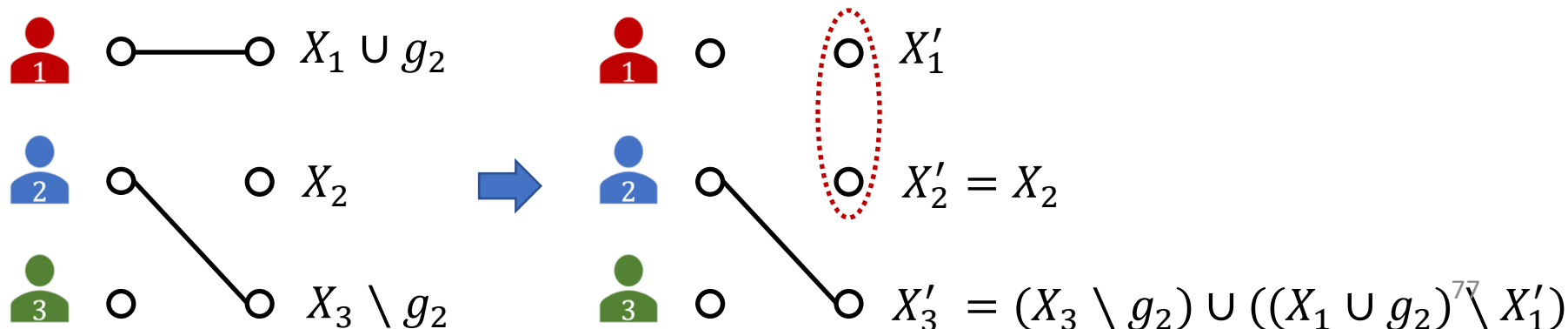
X'_1 : $v_1(X'_1) > v_1(X_1)$ を満たす $X_1 \cup g_2$ の極小な集合



観察 3 エージェント 2 にとって, X'_3 は EFX-feasible

証明 • $v_2(X'_3) \geq v_2(X_3 \setminus g_2) > v_2(X_1 \cup g_2) \geq v_2(X'_1)$

• $v_2(X'_3) \geq v_2(X_3 \setminus g_2) > v_2(X_2) = v_2(X'_2)$



3人のエージェントに対するEFX配分

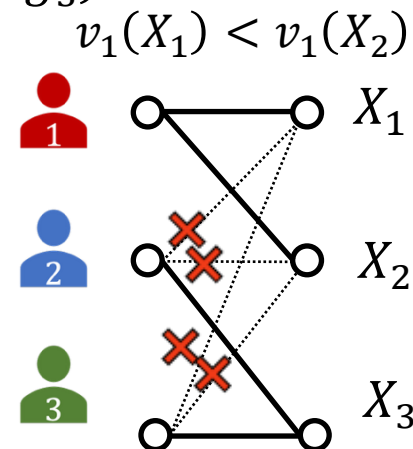
Case1 : $v_2(X_3 \setminus g_2) > v_2(X_1 \cup g_2)$ or $v_3(X_3 \setminus g_3) > v_3(X_1 \cup g_3)$

$v_2(X_3 \setminus g_2) > v_2(X_1 \cup g_2)$ とする.

($v_3(X_3 \setminus g_3) > v_3(X_1 \cup g_3)$)の場合も同様)

g_2 を X_3 から X_1 へ移動する.

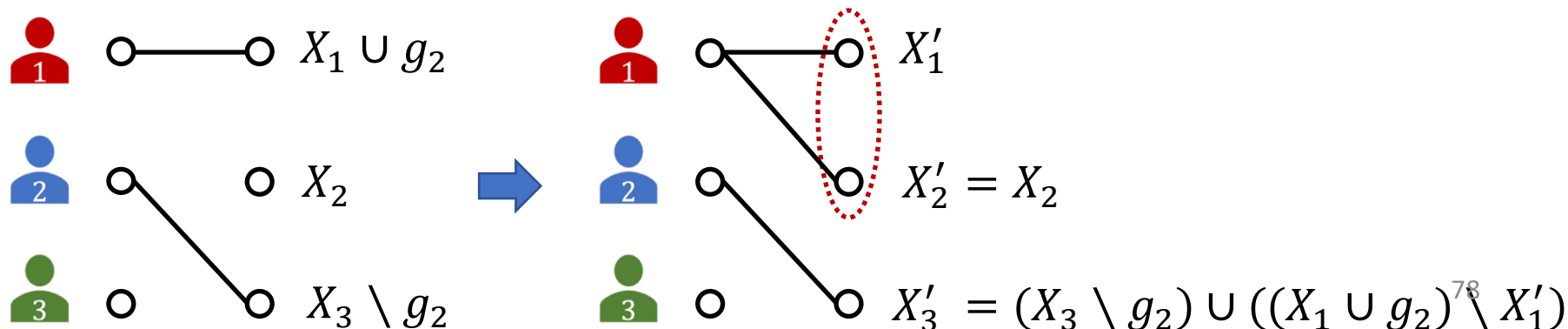
X'_1 : $v_1(X'_1) > v_1(X_1)$ を満たす $X_1 \cup g_2$ の極小な集合



Case1-1 : エージェント 1 にとって, X'_1 と X'_2 が EFX-feasible であるとき

- $\phi(X) = v_1(X_1) < \min\{v_1(X'_1), v_1(X'_2)\} = \phi(X')$
- X' は不変条件を満たす.

→ 補題 1 は成立



3人のエージェントに対するEFX配分

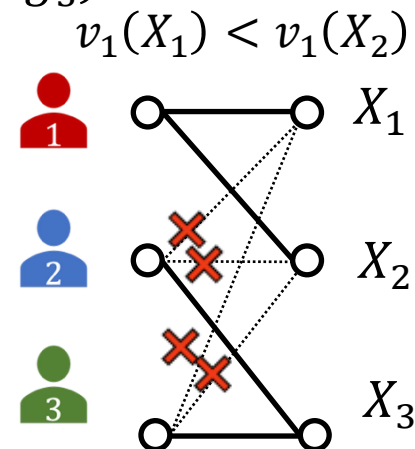
Case1 : $v_2(X_3 \setminus g_2) > v_2(X_1 \cup g_2)$ or $v_3(X_3 \setminus g_3) > v_3(X_1 \cup g_3)$

$v_2(X_3 \setminus g_2) > v_2(X_1 \cup g_2)$ とする.

($v_3(X_3 \setminus g_3) > v_3(X_1 \cup g_3)$)の場合も同様)

g_2 を X_3 から X_1 へ移動する.

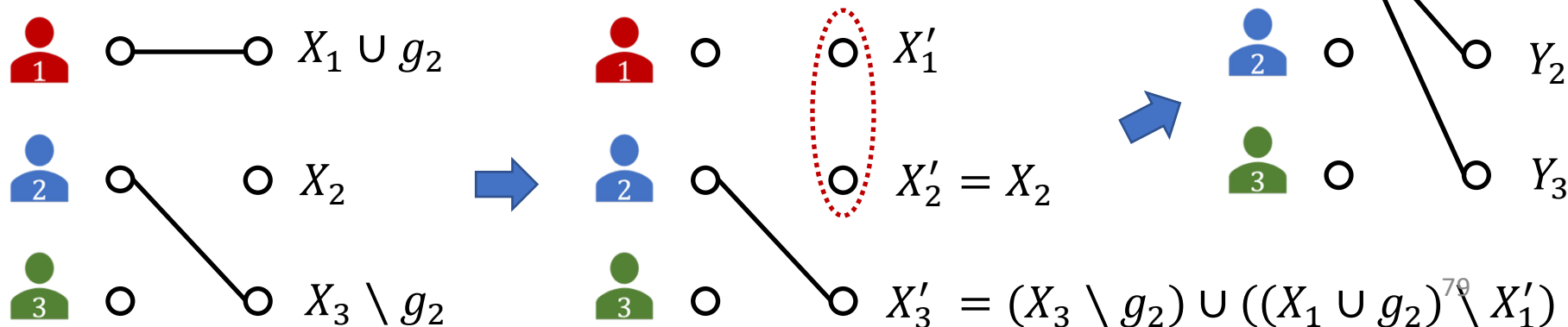
X'_1 : $v_1(X'_1) > v_1(X_1)$ を満たす $X_1 \cup g_2$ の極小な集合



Case1-2 : エージェント 1 にとって, X'_1 または X'_2 が EFX-feasible でないとき

- $\min\{v_1(X'_1), v_1(X'_2)\} < v_1(X'_3 \setminus g)$ for some $g \in X'_3$
- v_1 と (X'_1, X'_2, X'_3) に対して, PR アルゴリズム を適用

$\phi(X) = v_1(X_1) < \phi(X') < \phi(Y) \rightarrow$ 補題 1 は成立



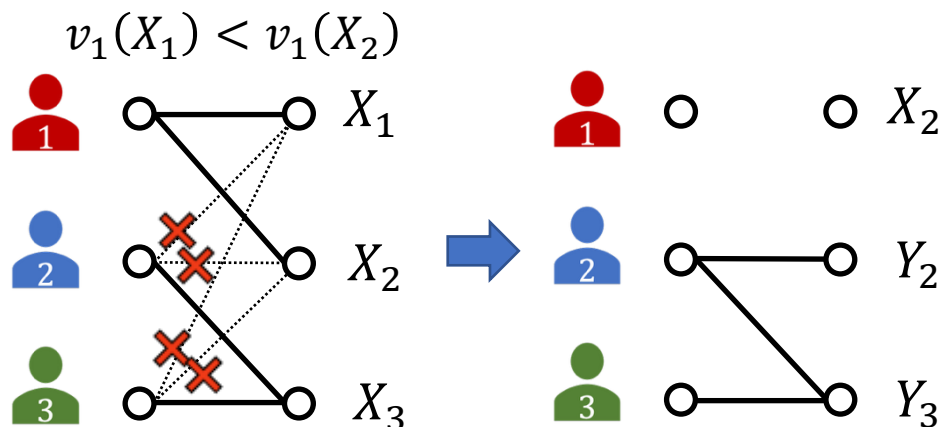
3人のエージェントに対するEFX配分

Case2 : $v_2(X_3 \setminus g_2) < v_2(X_1 \cup g_2)$ and $v_3(X_3 \setminus g_3) < v_3(X_1 \cup g_3)$

- $v_2(X_2) < v_2(X_3 \setminus g_2) < v_2(X_1 \cup g_2)$
- $v_3(X_2) < v_3(X_3 \setminus g_3) < v_3(X_1 \cup g_3)$

v_2 と $(X_3 \setminus g_2, X_1 \cup g_2)$ に対して, PRアルゴリズムを適用 $\rightarrow (Y_2, Y_3)$

エージェント 3 にとって Y_2, Y_3 のうち大きい方を Y_3 とする.



3人のエージェントに対するEFX配分

Case2 : $v_2(X_3 \setminus g_2) < v_2(X_1 \cup g_2)$ and $v_3(X_3 \setminus g_3) < v_3(X_1 \cup g_3)$

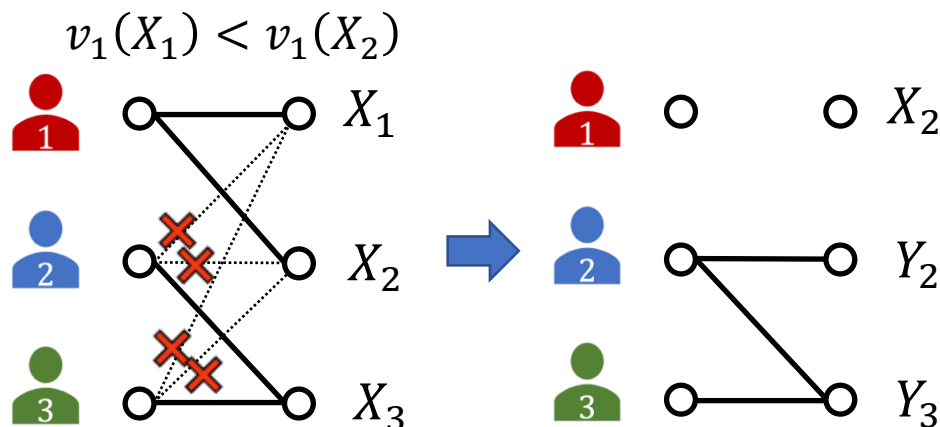
- $v_2(X_2) < v_2(X_3 \setminus g_2) < v_2(X_1 \cup g_2)$
- $v_3(X_2) < v_3(X_3 \setminus g_3) < v_3(X_1 \cup g_3)$

v_2 と $(X_3 \setminus g_2, X_1 \cup g_2)$ に対して, PRアルゴリズムを適用 $\rightarrow (Y_2, Y_3)$

エージェント 3 にとって Y_2, Y_3 のうち大きい方を Y_3 とする.

観察 4 エージェント 2 にとって, Y_2 (と Y_3) は EFX-feasible

- 証明
- $v_2(Y_2) \geq v_2(Y_3 \setminus g)$ for $\forall g \in Y_2$
 - $v_2(Y_2) \geq \min\{v_2(Y_2), v_2(Y_3)\} \geq \min\{v_2(X_3 \setminus g_2), v_2(X_1 \cup g_2)\} > v_2(X_2)$



3人のエージェントに対するEFX配分

Case2 : $v_2(X_3 \setminus g_2) < v_2(X_1 \cup g_2)$ and $v_3(X_3 \setminus g_3) < v_3(X_1 \cup g_3)$

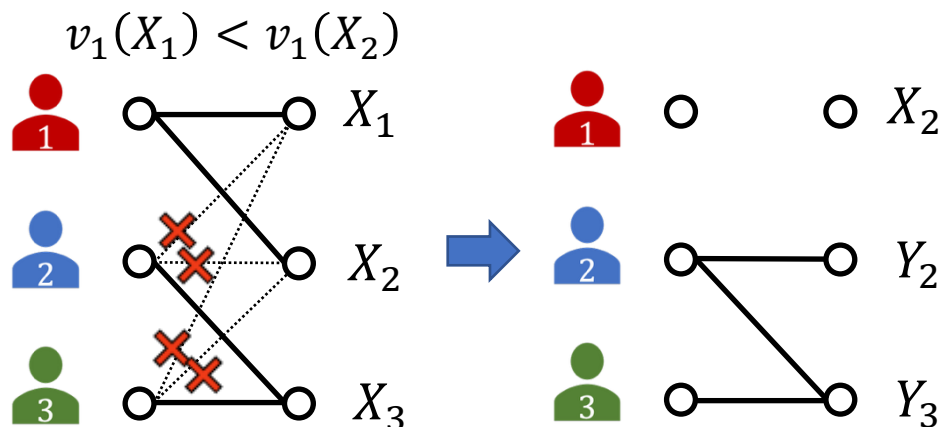
- $v_2(X_2) < v_2(X_3 \setminus g_2) < v_2(X_1 \cup g_2)$
- $v_3(X_2) < v_3(X_3 \setminus g_3) < v_3(X_1 \cup g_3)$

v_2 と $(X_3 \setminus g_2, X_1 \cup g_2)$ に対して, PRアルゴリズムを適用 $\rightarrow (Y_2, Y_3)$

エージェント 3 にとって Y_2, Y_3 のうち大きい方を Y_3 とする.

観察 5 エージェント 3 にとって, Y_3 はEFX-feasible

- 証明
- $v_3(Y_3) \geq v_3(Y_2)$
 - $v_3(Y_3) = \max\{v_3(Y_2), v_3(Y_3)\} \geq \min\{v_3(X_3 \setminus g_3), v_3(X_1 \cup g_3)\} > v_3(X_2)$



3人のエージェントに対するEFX配分

Case2 : $v_2(X_3 \setminus g_2) < v_2(X_1 \cup g_2)$ and $v_3(X_3 \setminus g_3) < v_3(X_1 \cup g_3)$

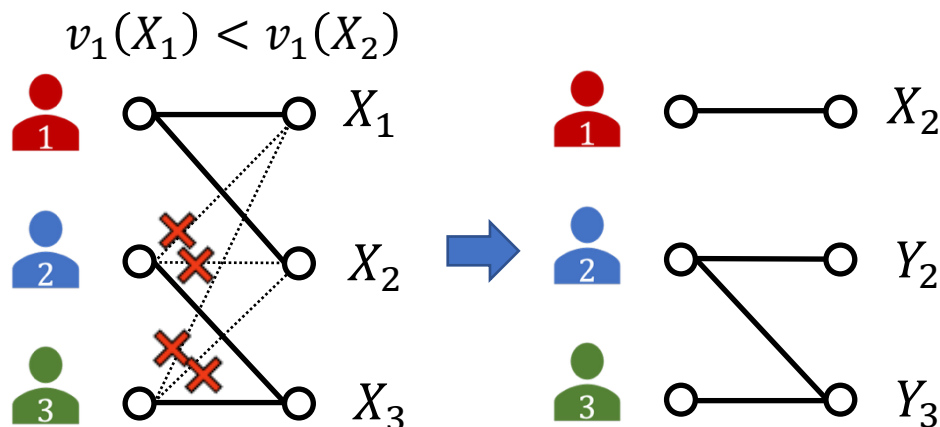
- $v_2(X_2) < v_2(X_3 \setminus g_2) < v_2(X_1 \cup g_2)$
- $v_3(X_2) < v_3(X_3 \setminus g_3) < v_3(X_1 \cup g_3)$

v_2 と $(X_3 \setminus g_2, X_1 \cup g_2)$ に対して, PRアルゴリズムを適用 $\rightarrow (Y_2, Y_3)$

エージェント 3 にとって Y_2, Y_3 のうち大きい方を Y_3 とする.

Case2-1 : $\max\{v_1(Y_2), v_1(Y_3)\} < v_1(X_2)$ のとき

(X_2, Y_2, Y_3) はEFX配分



3人のエージェントに対するEFX配分

Case2 : $v_2(X_3 \setminus g_2) < v_2(X_1 \cup g_2)$ and $v_3(X_3 \setminus g_3) < v_3(X_1 \cup g_3)$

- $v_2(X_2) < v_2(X_3 \setminus g_2) < v_2(X_1 \cup g_2)$
- $v_3(X_2) < v_3(X_3 \setminus g_3) < v_3(X_1 \cup g_3)$

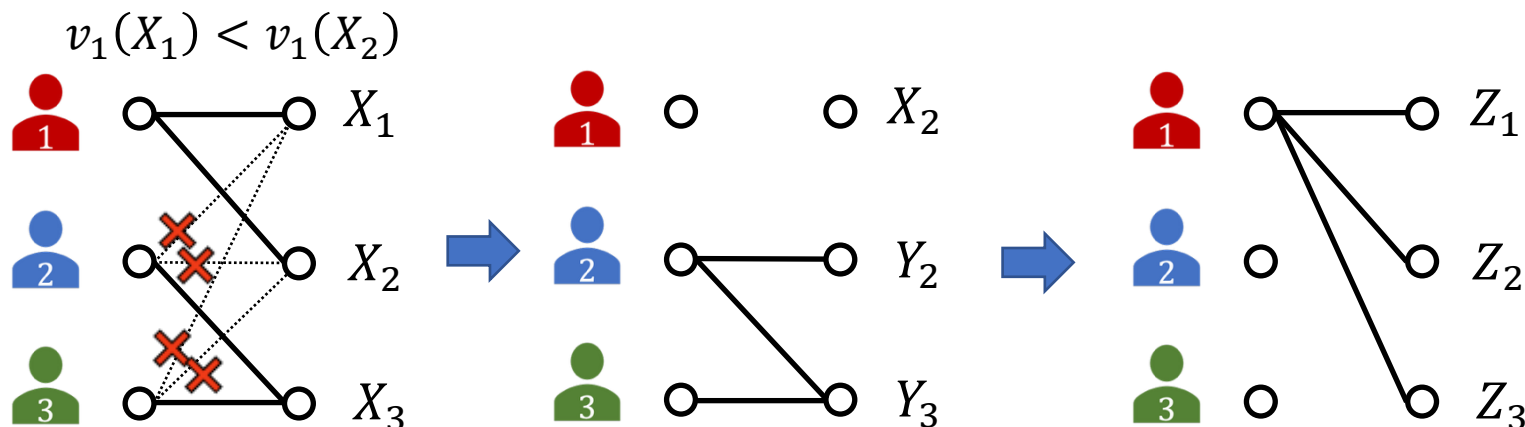
v_2 と $(X_3 \setminus g_2, X_1 \cup g_2)$ に対して, PRアルゴリズムを適用 $\rightarrow (Y_2, Y_3)$

エージェント 3 にとって Y_2, Y_3 のうち大きい方を Y_3 とする.

Case2-2 : $v_1(X_2) < \min\{v_1(Y_2), v_1(Y_3)\}$ のとき

v_1 と (X_2, Y_2, Y_3) に対して, PRアルゴリズムを適用

$\phi(X) = v_1(X_1) < v_1(X_2) \leq \phi(Z) \rightarrow$ 補題 1 は成立



3人のエージェントに対するEFX配分

Case2 : $v_2(X_3 \setminus g_2) < v_2(X_1 \cup g_2)$ and $v_3(X_3 \setminus g_3) < v_3(X_1 \cup g_3)$

- $v_2(X_2) < v_2(X_3 \setminus g_2) < v_2(X_1 \cup g_2)$
- $v_3(X_2) < v_3(X_3 \setminus g_3) < v_3(X_1 \cup g_3)$

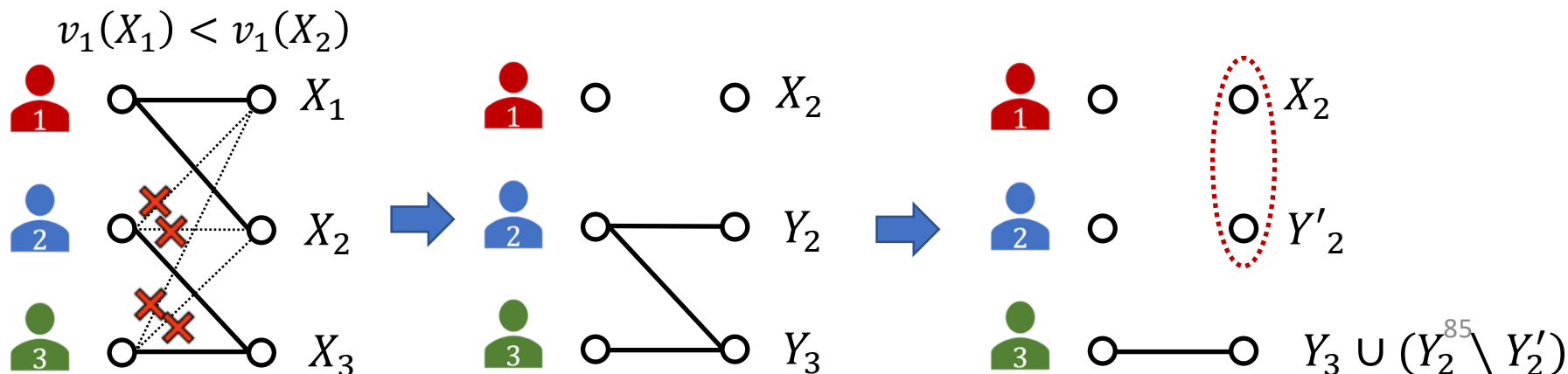
v_2 と $(X_3 \setminus g_2, X_1 \cup g_2)$ に対して, PRアルゴリズムを適用 $\rightarrow (Y_2, Y_3)$

エージェント 3 にとって Y_2, Y_3 のうち大きい方を Y_3 とする.

Case2-3 : $\min\{v_1(Y_2), v_1(Y_3)\} < v_1(X_2) < \max\{v_1(Y_2), v_1(Y_3)\}$ のとき
 $v_1(Y_3) < v_1(X_2) < v_1(Y_2)$ とする.

Y'_2 : $v_1(Y'_2) > v_1(X_2)$ を満たす Y_2 の極小な集合

残りの部分はCase1と同様



目次

- 1限. 不可分財の公平配分理論：基礎と主要概念
- 2限. EFX配分の存在問題
- 3限. 不可分な負担の公平かつ効率的な配分

目次

- 1限. 不可分財の公平配分理論：基礎と主要概念
- 2限. EFX配分の存在問題
- 3限. 不可分な負担の公平かつ効率的な配分

SODA 2026 Best Paper Award

Ryoga Mahara: Existence of fair and efficient allocation of indivisible chores.
In Proceedings of the 2026 Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA26).

不可分な負担の公平配分問題

問題設定

$N = \{1, \dots, n\}$: エージェントの集合



$M = \{1, \dots, m\}$: 不可分な負担の集合
(アイテム)



$v_i : 2^M \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 0}$ (エージェント i の加法的評価関数)

不可分な負担の公平配分問題

問題設定

$N = \{1, \dots, n\}$: エージェントの集合



$M = \{1, \dots, m\}$: 不可分な負担の集合
(アイテム)



$c_i : 2^M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ (エージェント i の **加法的** コスト関数)

$$c_i := -v_i$$

概要

背景 (不可分な負担の公平配分理論)

- **EF1** (Envy-freeness up to one item) : 代表的な**公平性**の指標
- **パレート最適性** : 代表的な**効率性**の指標

重要な未解決問題: EF1かつPOを満たす配分が存在するか?

本研究の主結果

各エージェントが加法的なコスト関数をもつ場合に,
EF1とパレート最適性を同時に満たす配分の存在を証明.

手法: **不動点定理+離散アルゴリズム**

EF1配分 (Envy-freeness up to one item) [Budish, 2011]

どのエージェントも 自身のあるアイテムを
ひとつ取り除けば他のエージェントを羨望しない

$$\text{配分 } A = (A_1, \dots, A_n) : \text{EF1} \stackrel{\text{def}}{\iff} \\ \forall i, \forall i' \in N, \exists j \in A_i, \quad c_i(A_i \setminus \{j\}) \leq c_i(A_{i'})$$

EF1 配分はどのような入力に対しても常に存在して、
多項式時間で求めることができる。

- Round-Robin Algorithm (加法的)
[Caragiannis, Kurokawa, Moulin, Procaccia, Shah, and Wang, EC 2016]
- Top-Trading Envy-Cycle Elimination Algorithm (一般的)
[Bhaskar, Sricharan, and Vaish, APPROX 2021]

パレート最適配分

だれのコストも上げることなく，少なくともひとりのコストを下げることもはやできない

配分 Y が配分 X を **パレート支配** $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

➤ $\forall i \in N, c_i(Y_i) \leq c_i(X_i)$

だれのコストも上げることなく，

➤ $\exists i' \in N, c_{i'}(Y_{i'}) < c_{i'}(X_{i'})$ 少なくともひとりのコストを下げることも

配分 $A = (A_1, \dots, A_n)$: **パレート最適 (PO)** $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

A はどの配分にもパレート支配されない

fPO配分(Fractional Pareto optimal allocation)

- 小数パレート支配: パレート支配の定義を複数の配分の凸結合に拡張

k 個の配分 $Y^1, \dots, Y^k$ が配分 X を **小数パレート支配** $\stackrel{\text{def}}{\iff}$
次を満たす $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ が存在する

- $\sum_{r=1}^k \lambda_r = 1$ かつ $\lambda_r \geq 0$ ($r = 1, 2, \dots, k$)
- $\forall i \in N, \sum_{r=1}^k \lambda_r \cdot c_i(Y_i^r) \leq c_i(X_i)$
- $\exists j \in N, \sum_{r=1}^k \lambda_r \cdot c_j(Y_j^r) < c_j(X_j)$

配分 $A = (A_1, \dots, A_n)$: **小数パレート最適 (fPO)** $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

A は任意の有限個の配分によって、小数パレート支配されない

- fPO配分 $\Rightarrow$ PO配分
- fPOやPO配分は常に存在(たとえば, $\sum_{i \in N} c_i(A_i)$ を最小化する配分はfPO).
- fPOはPOよりも扱いやすい(良い特徴づけがある).

例

	1	2	3
1	1	100	100
2	100	1	100
3	100	100	1

EF1 だが POでない

	1	2	3
1	1	100	100
2	100	1	100
3	100	100	1

PO だが EF1でない

	1	2	3
1	1	100	100
2	100	1	100
3	100	100	1

EF1 かつ PO

先行研究(EF1かつPO配分の存在)

- 1種類のコスト関数 (folklore)
- 2人 [Aziz, Caragiannis, Igarashi, and Walsh, IJCAI 2019]
- コスト関数が2値
[Garg, Murhekar, and Qin AAAI 2022; Ebadian, Peters, and Shah AAMAS 2022]
- 2種類のアイテム [Aziz, Lindsay, Ritossa, and Suzuki, AAMAS 2023]
- 2種類のコスト関数 [Garg, Murhekar, and Qin, IJCAI 2023]
- 3人 [Garg, Murhekar, and Qin, IJCAI 2023]
- 3種類のコスト関数 [Garg, Murhekar, and Qin, IJCAI 2024]

上記のすべての結果は多項式時間アルゴリズムも設計

一般のインスタンスで、EF1かつPOを満たす配分が存在するか？

EF1かつPO配分の存在

定理 [Mahara, SODA 2026]

各エージェントが加法的コスト関数をもつとする。このとき、EF1とパレート最適性を同時に満たす配分が必ず存在する。

非退化なインスタンス

$\mathcal{I} = (N, M, \{c_i\}_{i \in N})$: インスタンス

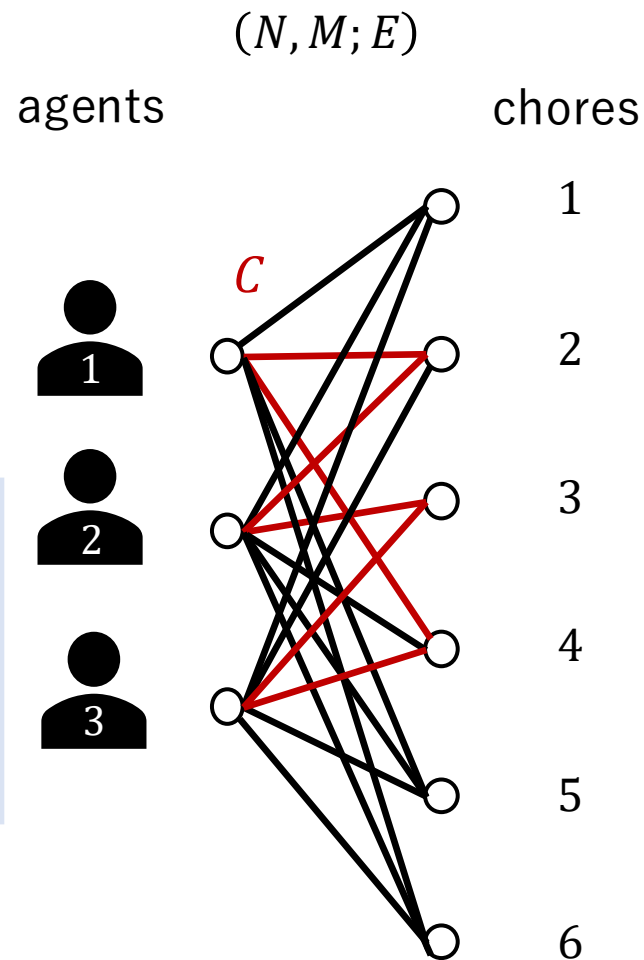
$(N, M; E)$: 完全二部グラフ

$C = (i_1, j_1, i_2, j_2, \dots, i_l, j_l, i_{l+1})$: サイクル

$$\pi(C) := \prod_{k=1}^l \frac{c_{i_k j_k}}{c_{i_{k+1} j_k}}$$

$\mathcal{I} = (N, M, \{c_i\}_{i \in N})$: **非退化** $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

$(N, M; E)$ における任意のサイクル C に対して,
 $\pi(C) \neq 1$.



非退化なインスタンス

インスタンス

$$J = (N, M, \{c_i\}_{i \in N})$$

コスト関数を
適切に摂動



非退化なインスタンス

$$J^\varepsilon = (N, M, \{c_i^\varepsilon\}_{i \in N})$$

$A = (A_1, \dots, A_n)$:

J において EF1 かつ PO

$\varepsilon > 0$ が十分小さい



$A = (A_1, \dots, A_n)$:

J^ε において EF1 かつ fPO

非退化なインスタンスにおいて,

EF1 かつ fPO を満たす配分の存在を示せばよい

fPO配分の特徴付け

定理 [Negishi, 1960; Brânzei and Sandomirskiy, 2024]

$A = (A_1, \dots, A_n) : \text{fPO配分} \Leftrightarrow n\text{個の正の実数 } w_1, \dots, w_n \text{ が存在して, } A \text{ は } \sum_{i=1}^n w_i \cdot c_i(A_i) \text{ を最小化する配分}$

例

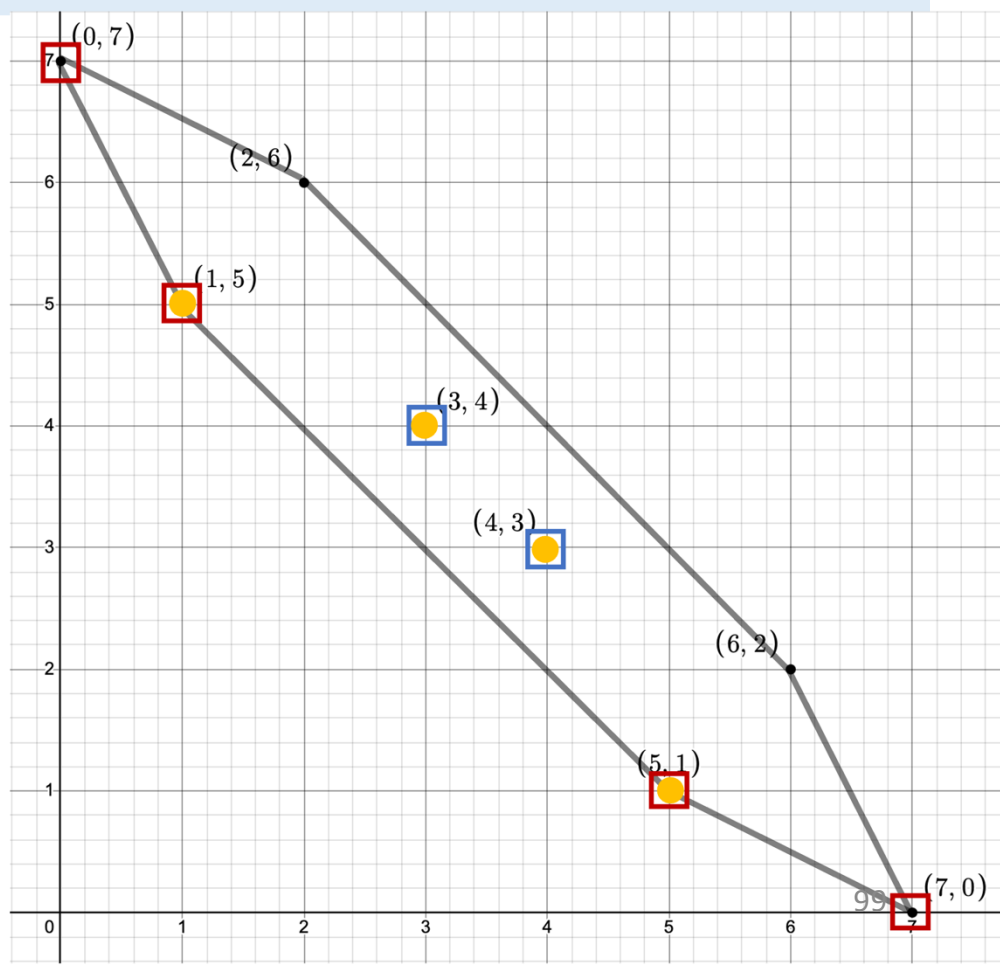
	1	2	3
1	4	2	1
2	4	1	2

$$A = (A_1, A_2) \leftrightarrow (c_1(A_1), c_2(A_2))$$

 : fPO 配分

 : PO だが fPO でない配分

 : EF1 配分



fPO配分の特徴付け

定理 [Negishi, 1960; Brânzei and Sandomirskiy, 2024]

$A = (A_1, \dots, A_n) : \text{fPO配分} \Leftrightarrow$ n 個の**正の実数** $w_1, \dots, w_n$ が存在して、 A は $\sum_{i=1}^n w_i \cdot c_i(A_i)$ を最小化する配分

なぜか？
 $\Leftrightarrow$ ある**正の重みベクトル** $\mathbf{w} \in \mathbb{R}_{>0}^n$ が存在して、 A は $\text{LP}(\mathbf{w})$ の整数最適配分

$\text{LP}(\mathbf{w})$

$$\text{Min.} \quad \sum_{i \in N, j \in M} w_i \cdot c_{i,j} \cdot x_{i,j}$$

$$\text{Sub. to} \quad \sum_{i \in N} x_{i,j} = 1 \quad \forall j \in M$$

$$x_{i,j} \geq 0 \quad \forall i \in N, \forall j \in M$$

$\text{Dual-LP}(\mathbf{w})$

$$\text{Max.} \quad \sum_{j \in M} p_j$$

$$\text{Sub. to} \quad p_j \leq w_i \cdot c_{i,j} \quad \forall i \in N, \forall j \in M$$

➤ 相補性条件： $x_{i,j} > 0 \Rightarrow p_j = w_i \cdot c_{i,j}$

➤ $\text{Dual-LP}(\mathbf{w})$ は**一意**な最適解をもつ

演習問題 5

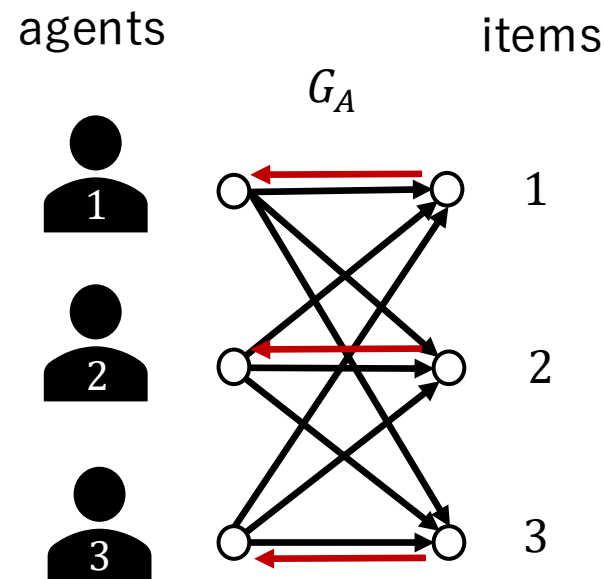
すべてのエージェントは正の加法的コスト関数をもつとする.

つぎは同値であることを示せ.

- (1) $A = (A_1, \dots, A_n) : \text{fPO配分}$
- (2) G_A は負閉路をもたない
- (3) n 個の正の実数 $w_1, \dots, w_n$ が存在して, A は $\sum_{i=1}^n w_i \cdot c_i(A'_i)$ を最小化する配分

$$G_A := (N, M; E), \quad d: E \rightarrow \mathbb{R}$$

- $\forall i \in N, \forall j \in M, (i, j) \in E$
- $(j, i) \in E \iff j \in A_i$
- $d_{i,j} := \ln c_{i,j}$
- $d_{j,i} := -\ln c_{i,j}$



pEF1配分 (Price EF1)

[Barman, Krishnamurthy, and Vaish, EC 2018]

$A = (A_1, \dots, A_n)$: 配分, $\mathbf{p} = (p_j)_{j \in M}$: 価格ベクトル

$$p(S) := \sum_{j \in S} p_j$$

配分 $A = (A_1, \dots, A_n)$: **pEF1** $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$$\forall i, \forall i' \in N, \exists j \in A_i, p(A_i \setminus \{j\}) \leq p(A_{i'})$$

補題 A : LP($\mathbf{w}$)の整数最適配分, $\mathbf{p}$: Dual-LP($\mathbf{w}$)の最適解

A : pEF1配分 $\Rightarrow A$: EF1配分

pEF1配分 (Price EF1)

[Barman, Krishnamurthy, and Vaish, EC 2018]

$A = (A_1, \dots, A_n)$: 配分, $\mathbf{p} = (p_j)_{j \in M}$: 価格ベクトル

$$p(S) := \sum_{j \in S} p_j$$

配分 $A = (A_1, \dots, A_n)$: **pEF1** $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$$\forall i, \forall i' \in N, \exists j \in A_i, p(A_i \setminus \{j\}) \leq p(A_{i'})$$

補題 A : LP($\mathbf{w}$)の整数最適配分, $\mathbf{p}$: Dual-LP($\mathbf{w}$)の最適解

A : pEF1配分 $\Rightarrow A$: EF1配分

証明 任意の $i, i' \in N$ に対して,

$$\begin{aligned} w_i \cdot c_i(A_i \setminus \{j\}) &= p(A_i \setminus \{j\}) \\ &\leq p(A_{i'}) \\ &\leq w_i \cdot c_i(A_{i'}). \end{aligned}$$

pEF1配分 (Price EF1)

[Barman, Krishnamurthy, and Vaish, EC 2018]

$A = (A_1, \dots, A_n)$: 配分, $\mathbf{p} = (p_j)_{j \in M}$: 価格ベクトル

$$p(S) := \sum_{j \in S} p_j$$

配分 $A = (A_1, \dots, A_n)$: **pEF1** $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$$\forall i, \forall i' \in N, \exists j \in A_i, p(A_i \setminus \{j\}) \leq p(A_{i'})$$

補題 A : $\text{LP}(\mathbf{w})$ の整数最適配分, $\mathbf{p}$: $\text{Dual-LP}(\mathbf{w})$ の最適解

A : pEF1配分 $\Rightarrow A$: EF1配分

目標 : 次を満たす $\mathbf{w} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ と配分 A をみつければよい

➤ A : $\text{LP}(\mathbf{w})$ の整数最適配分 $\rightarrow A$: fPO配分

➤ A : pEF1配分 $\rightarrow A$: EF1配分

既存の課題と本研究の打開策

➤ 先行研究の多くのアプローチ:

重み $\mathbf{w} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ に対する $\text{LP}(\mathbf{w})$ の最適配分 A と価格ベクトル $\mathbf{p}$ を保持し、配分と価格を段階的に更新して、最終的に pEF1 配分を求める。

➤ アルゴリズムの停止性の証明が困難

(配分変更と価格調整の両方に対して一貫したポテンシャルを設計しにくい)

➤ 本研究のアプローチ:

望ましい重み $\mathbf{w} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ の存在を保証するために、**不動点定理**を用いる。

(このアプローチは [Igarashi and Meunier, 2025] により導入された先駆的なアイデアに基づいている。)

KKM補題 [Knaster, Kuratowski, and Mazurkiewicz, 1929]

Spernerの補題の集合被覆版

$\Delta^{n-1} := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 1, x_i \geq 0 \ \forall i\}$: $(n-1)$ 次元単体

$C_1, C_2, \dots, C_n$: Δ^{n-1} 上の閉集合.

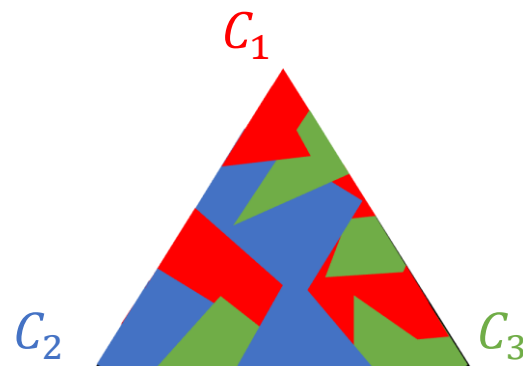
任意の $(w_1, w_2, \dots, w_n) \in \Delta^{n-1}$ に対して, ある $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ が存在して, $w_i > 0$ かつ $(w_1, w_2, \dots, w_n) \in C_i$ とする.

このとき,

$$\bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset.$$



$n = 2$



$n = 3$

KKM補題の適用

Δ^{n-1} : $(n - 1)$ 次元単体. $i \in N$.

$C_i \subseteq \Delta^{n-1}$: つぎを満たす $\mathbf{w} \in \Delta^{n-1}$ 全体の集合:

$\text{LP}(\mathbf{w})$ のある整数最適配分 A と $\text{Dual-LP}(\mathbf{w})$ の一意的な最適解 $\mathbf{p}$ について,
 i は **price envy-free**. つまり, $p(A_i) \leq p(A_{i'}) \ \forall i' \in N$

補題 $\exists \mathbf{w} \in \Delta^{n-1}$ s.t. 任意のエージェント $i \in N$ に対して,
 $\text{LP}(\mathbf{w})$ のある整数最適配分 $A^{(i)}$ が存在して,
エージェント i は $A^{(i)}$ と $\text{Dual-LP}(\mathbf{w})$ の一意的な最適解 $\mathbf{p}$ について,
price envy-freeである.

KKM補題の適用

Δ^{n-1} : $(n-1)$ 次元単体. $i \in N$.

$C_i \subseteq \Delta^{n-1}$: つぎを満たす $\mathbf{w} \in \Delta^{n-1}$ 全体の集合:

$\text{LP}(\mathbf{w})$ のある整数最適配分 A と $\text{Dual-LP}(\mathbf{w})$ の一意的な最適解 $\mathbf{p}$ について,
 i は **price envy-free**. つまり, $p(A_i) \leq p(A_{i'}) \ \forall i' \in N$

補題 $\exists \mathbf{w} \in \Delta^{n-1}$ s.t. 任意のエージェント $i \in N$ に対して,
 $\text{LP}(\mathbf{w})$ のある整数最適配分 $A^{(i)}$ が存在して,
エージェント i は $A^{(i)}$ と $\text{Dual-LP}(\mathbf{w})$ の一意的な最適解 $\mathbf{p}$ について,
price envy-freeである.

証明 C_i が閉集合であること $\mathbf{w}^t \in C_i$ かつ $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{w}^t = \mathbf{w}^*$ とする.

各 t について条件を満たす最適配分 $A^{(t)}$ をとる.

可能な配分は有限個なので, 部分列をとれば, $A^{(t)} = A^*$ とできる.

$\text{LP}(\mathbf{w})$ の目的関数は $\mathbf{w}$ に関して連続なので, A^* は $\text{LP}(\mathbf{w}^*)$ に対しても最適.

また, 各 t について双対最適解を $\mathbf{p}^t$ とすると, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}^t = \mathbf{p}^*$ も成立(なぜか?).

よって, price envy-freenessは極限でも保存されるので, $\mathbf{w}^* \in C_i$.

KKM補題の適用

Δ^{n-1} : $(n-1)$ 次元単体. $i \in N$.

$C_i \subseteq \Delta^{n-1}$: つぎを満たす $\mathbf{w} \in \Delta^{n-1}$ 全体の集合:

$\text{LP}(\mathbf{w})$ のある整数最適配分 A と $\text{Dual-LP}(\mathbf{w})$ の一意的な最適解 $\mathbf{p}$ について,
 i は **price envy-free**. つまり, $p(A_i) \leq p(A_{i'}) \ \forall i' \in N$

補題 $\exists \mathbf{w} \in \Delta^{n-1}$ s.t. 任意のエージェント $i \in N$ に対して,
 $\text{LP}(\mathbf{w})$ のある整数最適配分 $A^{(i)}$ が存在して,
エージェント i は $A^{(i)}$ と $\text{Dual-LP}(\mathbf{w})$ の一意的な最適解 $\mathbf{p}$ について,
price envy-freeである.

証明 KKM被覆条件が成り立つこと

任意の $\mathbf{w} \in \Delta^{n-1}$ と $\text{LP}(\mathbf{w})$ のある整数最適配分 A を考える.

- すべての w_i が正のとき

価格 $p(A_i)$ が最小のエージェント h を選べば,

$w_h > 0$ かつ h はprice envy-freeなので, 条件を満たす.

KKM補題の適用

Δ^{n-1} : $(n-1)$ 次元単体. $i \in N$.

$C_i \subseteq \Delta^{n-1}$: つぎを満たす $\mathbf{w} \in \Delta^{n-1}$ 全体の集合:

$\text{LP}(\mathbf{w})$ のある整数最適配分 A と $\text{Dual-LP}(\mathbf{w})$ の一意的な最適解 $\mathbf{p}$ について,
 i は **price envy-free**. つまり, $p(A_i) \leq p(A_{i'}) \ \forall i' \in N$

補題 $\exists \mathbf{w} \in \Delta^{n-1}$ s.t. 任意のエージェント $i \in N$ に対して,
 $\text{LP}(\mathbf{w})$ のある整数最適配分 $A^{(i)}$ が存在して,
エージェント i は $A^{(i)}$ と $\text{Dual-LP}(\mathbf{w})$ の一意的な最適解 $\mathbf{p}$ について,
price envy-freeである.

証明 KKM被覆条件が成り立つこと

任意の $\mathbf{w} \in \Delta^{n-1}$ と $\text{LP}(\mathbf{w})$ のある整数最適配分 A を考える.

- ある $w_i = 0$ のとき

$\mathbf{w} \in \Delta^{n-1}$ なので, あるエージェント h について, $w_h \geq \frac{1}{n}$ である.

もし, h がある負担 j を受け取っていれば, k に移すことで,
 $\text{LP}(\mathbf{w})$ の目的関数値が真に減少する. これは A の最適性に矛盾. $\rightarrow A_h = \emptyset$

KKM補題の適用

Δ^{n-1} : $(n-1)$ 次元単体. $i \in N$.

$C_i \subseteq \Delta^{n-1}$: つぎを満たす $\mathbf{w} \in \Delta^{n-1}$ 全体の集合:

$\text{LP}(\mathbf{w})$ のある整数最適配分 A と $\text{Dual-LP}(\mathbf{w})$ の一意的な最適解 $\mathbf{p}$ について,
 i は **price envy-free**. つまり, $p(A_i) \leq p(A_{i'}) \ \forall i' \in N$

補題 $\exists \mathbf{w} \in \Delta^{n-1}$ s.t. 任意のエージェント $i \in N$ に対して,
 $\text{LP}(\mathbf{w})$ のある整数最適配分 $A^{(i)}$ が存在して,
エージェント i は $A^{(i)}$ と $\text{Dual-LP}(\mathbf{w})$ の一意的な最適解 $\mathbf{p}$ について,
price envy-freeである.

- 主要な問題点: 配分がエージェントごとに異なる
- 軽微な問題点: $\mathbf{w} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ とは限らない $\rightarrow \Delta^{n-1}$ をわずかに縮小した単体によって対処可能 (先行研究 [Igarashi and Meunier, 2025] と同様)

KKM補題の適用

Δ^{n-1} : $(n-1)$ 次元単体. $i \in N$.

$C_i \subseteq \Delta^{n-1}$: つぎを満たす $\mathbf{w} \in \Delta^{n-1}$ 全体の集合:

$\text{LP}(\mathbf{w})$ のある整数最適配分 A と $\text{Dual-LP}(\mathbf{w})$ の一意的な最適解 $\mathbf{p}$ について,
 i は **price envy-free**. つまり, $p(A_i) \leq p(A_{i'}) \ \forall i' \in N$

補題X $\exists \mathbf{w} \in \Delta^{n-1} \cap \mathbb{R}_{>0}^n$ s.t. 任意のエージェント $i \in N$ に対して,

$\text{LP}(\mathbf{w})$ のある整数最適配分 $A^{(i)}$ が存在して,

エージェント i は $A^{(i)}$ と $\text{Dual-LP}(\mathbf{w})$ の一意的な最適解 $\mathbf{p}$ について,
price envy-freeである.

- 主要な問題点: 配分がエージェントごとに異なる
- 軽微な問題点: $\mathbf{w} \in \mathbb{R}_{>0}^n$ とは限らない $\rightarrow \Delta^{n-1}$ をわずかに縮小した単体によって対処可能 (先行研究 [Igarashi and Meunier, 2025] と同様)

補題Xのグラフ的解釈

$\mathbf{w} \in \Delta^{n-1} \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^n$: 補題Xの条件を満たすベクトル

$\mathbf{p}$: Dual-LP($\mathbf{w}$)の一意的な最適解

$G(\mathbf{w}, \mathbf{p}) := (N, M; E)$

➤ $(i, j) \in E \iff p_j = w_i \cdot c_{ij}$

相補性条件 : $x_{i,j} > 0 \implies p_j = w_i \cdot c_{i,j}$

相補性定理を適用

任意のエージェント $i \in N$ に対して,
 $G(\mathbf{w}, \mathbf{p})$ の辺に沿って適切にアイテムを
配分すれば, エージェント i について,
price envy-freeにできる.

つまり, $p(A_i) \leq p(A_{i'}) \ \forall i' \in N$



補題Xのグラフ的解釈

$\mathbf{w} \in \Delta^{n-1} \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^n$: 補題Xの条件を満たすベクトル

$\mathbf{p}$: Dual-LP($\mathbf{w}$)の一意的な最適解

$G(\mathbf{w}, \mathbf{p}) := (N, M; E)$

➤ $(i, j) \in E \iff p_j = w_i \cdot c_{ij}$

相補性条件 : $x_{i,j} > 0 \implies p_j = w_i \cdot c_{ij}$

相補性定理を適用

任意のエージェント $i \in N$ に対して,
 $G(\mathbf{w}, \mathbf{p})$ の辺に沿って適切にアイテムを
 配分すれば, エージェント i について,
 price envy-freeにできる.

つまり, $p(A_i) \leq p(A_{i'}) \quad \forall i' \in N$



補題Xのグラフ的解釈

$\mathbf{w} \in \Delta^{n-1} \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^n$: 補題Xの条件を満たすベクトル

$\mathbf{p}$: Dual-LP($\mathbf{w}$)の一意的な最適解

$G(\mathbf{w}, \mathbf{p}) := (N, M; E)$

➤ $(i, j) \in E \iff p_j = w_i \cdot c_{ij}$

相補性条件 : $x_{i,j} > 0 \implies p_j = w_i \cdot c_{i,j}$

相補性定理を適用

任意のエージェント $i \in N$ に対して,
 $G(\mathbf{w}, \mathbf{p})$ の辺に沿って適切にアイテムを
配分すれば, エージェント i について,
price envy-freeにできる.

つまり, $p(A_i) \leq p(A_{i'}) \ \forall i' \in N$



補題Xのグラフ的解釈

$\mathbf{w} \in \Delta^{n-1} \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^n$: 補題Xの条件を満たすベクトル

$\mathbf{p}$: Dual-LP($\mathbf{w}$)の一意的な最適解

$G(\mathbf{w}, \mathbf{p}) := (N, M; E)$

➤ $(i, j) \in E \iff p_j = w_i \cdot c_{ij}$

相補性条件 : $x_{i,j} > 0 \implies p_j = w_i \cdot c_{ij}$

相補性定理を適用

任意のエージェント $i \in N$ に対して,
 $G(\mathbf{w}, \mathbf{p})$ の辺に沿って適切にアイテムを
配分すれば, エージェント i について,
price envy-freeにできる.

つまり, $p(A_i) \leq p(A_{i'}) \ \forall i' \in N$



$G(\mathbf{w}, \mathbf{p})$ の性質

$\mathbf{w} \in \Delta^{n-1} \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^n$: 補題Xの条件を満たすベクトル

$\mathbf{p}$: Dual-LP($\mathbf{w}$)の一意的な最適解

$G(\mathbf{w}, \mathbf{p}) := (N, M; E)$

➤ $(i, j) \in E \iff p_j = w_i \cdot c_{ij}$

補題 非退化なインスタンスに対して,

$G(\mathbf{w}, \mathbf{p})$ は森である.

証明 $G(\mathbf{w}, \mathbf{p})$ がサイクル C を含むとする.

$C = (i_1, j_1, i_2, j_2, \dots, i_l, j_l, i_{l+1})$.

$$\pi(C) := \prod_{k=1}^l \frac{c_{i_k j_k}}{c_{i_{k+1} j_k}} = \prod_{k=1}^l \frac{p_{j_k}}{p_{j_{k-1}}} = 1$$

→矛盾



pEF1配分の存在

$\mathbf{w} \in \Delta^{n-1} \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^n$: 補題Xの条件を満たすベクトル

$\mathbf{p}$: Dual-LP($\mathbf{w}$)の一意的な最適解

$G(\mathbf{w}, \mathbf{p}) := (N, M; E)$

➤ $(i, j) \in E \iff p_j = w_i \cdot c_{ij}$

補題 非退化なインスタンスに対して,
 $G(\mathbf{w}, \mathbf{p})$ は森である.

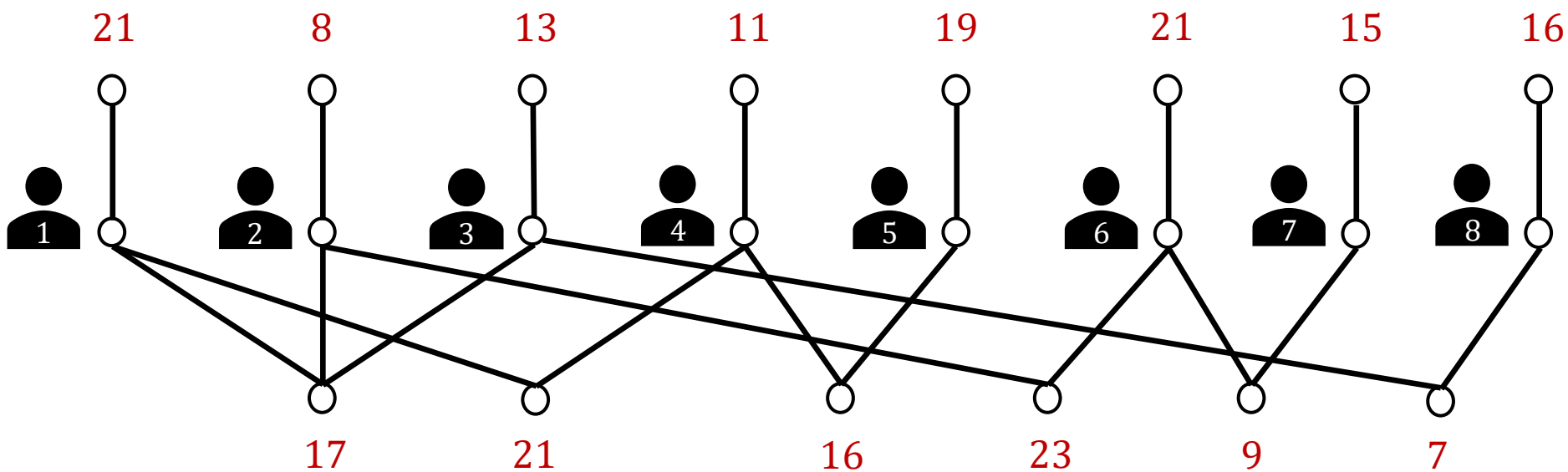
補題Y 非退化なインスタンスに対して,
 $G(\mathbf{w}, \mathbf{p})$ の辺に沿って適切にアイテム
を配分すれば, pEF1配分ができる.



→ 非退化なインスタンスにおいて, EF1 + fPO 配分が存在

演習問題 6

以下の $G(\mathbf{w}, \mathbf{p})$ に対して、各アイテムを $G(\mathbf{w}, \mathbf{p})$ の辺に沿って適切に配分することにより、pEF1配分が得られることを示せ。



まとめ

定理 [Mahara, SODA 2026]

各エージェントが加法的コスト関数をもつとする。このとき、
EF1とパレート最適性を同時に満たす配分が必ず存在する。

未解決問題：EF1とパレート最適性を同時に満たす配分を求める
多項式時間アルゴリズムは存在するか？

未解決問題：加法的よりも広い評価関数クラスで、
EF1とパレート最適性を同時に満たす配分は存在するか？

本日のまとめ

➤ 1限. 不可分財の公平配分理論：基礎と主要概念

代表的な公平性・効率性の概念と，それらを実現する基本的なアルゴリズムを紹介．

➤ 2限. EFX配分の存在問題

公平配分理論における最も重要かつ難解な未解決問題の一つである，EFX配分の存在問題と近年の進展を紹介．

➤ 3限. 不可分な負担の公平かつ効率的な配分

不可分な負担におけるEF1とパレート最適性の両立に関する最新の成果と，その証明手法を紹介．

参考文献(出てきた順)

- [Steinhaus 1948] Hugo Steinhaus. “The problem of fair division.” *Econometrica* 16 (1948): 101–104.
- [Dubins and Spanier, 1961] Lester E. Dubins and Edwin H. Spanier. “How to cut a cake fairly.” *The American Mathematical Monthly* 68.1 (1961): 1–17.
- [Varian, 1974] Hal R. Varian. “Equity, envy, and efficiency.” *Journal of Economic Theory* 9.1 (1974): 63–91.
- [Stromquist, 1980] Walter Stromquist. “How to cut a cake fairly.” *The American Mathematical Monthly* 87.8 (1980): 640–644.
- [Woodall, 1980] Douglas R. Woodall. “Dividing a cake fairly.” *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 78.1 (1980): 233–247.
- [Brams and Taylor, 1995] Steven J. Brams and Alan D. Taylor. “An envy-free cake division protocol.” *The American Mathematical Monthly* 102.1 (1995): 9–18.
- [Aziz and Mackenzie, FOCS 2016] Haris Aziz and Simon Mackenzie. “A discrete and bounded envy-free cake cutting protocol for any number of agents.” *Proceedings of the 57th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, FOCS 2016*, pp. 416–427.
- [Lipton, Markakis, Mossel, and Saberi, EC 2004] Richard J. Lipton, Evangelos Markakis, Elchanan Mossel, and Amin Saberi. “On approximately fair allocations of indivisible goods.” *Proceedings of the 5th ACM Conference on Electronic Commerce, EC 2004*, pp. 125–131.
- [Budish, 2011] Eric Budish. “The combinatorial assignment problem: Approximate competitive equilibrium from equal incomes.” *Journal of Political Economy* 119.6 (2011): 1061–1103.
- [Caragiannis, Kurokawa, Moulin, Procaccia, Shah, Wang, EC 2016] Ioannis Caragiannis, David Kurokawa, Hervé Moulin, Ariel D. Procaccia, Nisarg Shah, and Junxing Wang. “The unreasonable fairness of maximum Nash welfare.” *Proceedings of the 17th ACM Conference on Economics and Computation, EC 2016*, pp. 305–322.
- [Brams and Taylor, 1996] Steven J. Brams and Alan D. Taylor. *Fair Division: From Cake-Cutting to Dispute Resolution*. Cambridge University Press, 1996.
- [Foley, 1967] Duncan K. Foley. “Resource allocation and the public sector.” *Yale Economic Essays* 7 (1967): 45–98.

[Barman, Krishnamurthy, Vaish, EC 2018] Siddharth Barman, Sanath Kumar Krishnamurthy, and Rohit Vaish. “Finding fair and efficient allocations.” *Proceedings of the 19th ACM Conference on Economics and Computation*, EC 2018, pp. 557–574.

[Mahara, WINE 2025] Ryoga Mahara. “A polynomial-time algorithm for fair and efficient allocation with a fixed number of agents.” *Proceedings of the 21st Conference on Web and Internet Economics*, WINE 2025, pp. 413–430.

[Caragiannis, Gravin, and Huang, EC 2019] Ioannis Caragiannis, Nick Gravin, and Xin Huang. “Envy-freeness up to any item with high Nash welfare: The virtue of donating items.” *Proceedings of the 20th ACM Conference on Economics and Computation*, 2019: 527–545.

[Procaccia, 2020] Ariel D. Procaccia. “Technical perspective: An answer to fair division’s most enigmatic question.” *Communications of the ACM* 63.4 (2020): 118.

[Plaut and Roughgarden, SODA 2018] Benjamin Plaut and Tim Roughgarden. “Almost envy-freeness with general valuations.” *Proceedings of the 29th Annual ACM–SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, 2018: 2584–2603.

[Chaudhury, Garg, and Mehlhorn, EC 2020] Bhaskar Ray Chaudhury, Jugal Garg, and Kurt Mehlhorn. “EFX exists for three agents.” *Proceedings of the 21st ACM Conference on Economics and Computation*, 2020.

[Mahara, 2023] Ryoga Mahara. “Existence of EFX for two additive valuations.” *Discrete Applied Mathematics* 340 (2023): 115–127.

[Mahara, ESA 2021] Ryoga Mahara. “Extension of additive valuations to general valuations on the existence of EFX.” *Proceedings of the 29th Annual European Symposium on Algorithms*, LIPIcs 204, 2021: 66:1–66:15.

[HV, Ghosal, Nimbhorkar, and Varma, EC 2025] Vishwa Prakash H. V., Pratik Ghosal, Prajakta Nimbhorkar, and Nithin Varma. “EFX exists for three types of agents.” *Proceedings of the 26th ACM Conference on Economics and Computation*, 2025.

[Barman, Krishnamurthy, and Vaish, AAMAS 2018] Siddharth Barman, Sanath Kumar Krishnamurthy, and Rohit Vaish. “Greedy algorithms for maximizing Nash social welfare.” *Proceedings of the 17th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems*, 2018: 7–13.

[Amanatidis, Birmpas, Filos-Ratsikas, Hollender, and Voudouris, IJCAI 2020] Georgios Amanatidis, Georgios Birmpas, Aris Filos-Ratsikas, Alexandros Hollender, and Alexandros A. Voudouris. “Maximum Nash welfare and other stories about EFX.” *Proceedings of the 29th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, 2020: 24–30.

[Babaioff, Ezra, and Feige, AAAI 2021] Moshe Babaioff, Tomer Ezra, and Uriel Feige. “Fair and truthful mechanisms for dichotomous valuations.” Proceedings of the 35th AAAI Conference on Artificial Intelligence, 2021: 5119–5126.

[Hosseini, Sikdar, Vaish, and Xia, AAAI 2021] Hadi Hosseini, Sujoy Sikdar, Rohit Vaish, and Lirong Xia. “Fair and efficient allocations under lexicographic preferences.” Proceedings of the 35th AAAI Conference on Artificial Intelligence, 2021: 5472–5480.

[Gorantla, Marwaha, and Velusamy, SODA 2023] Pranay Gorantla, Kunal Marwaha, and Santhoshini Velusamy. “Fair allocation of a multiset of indivisible items.” Proceedings of the 34th Annual ACM–SIAM Symposium on Discrete Algorithms, 2023: 304–331.

[Akrami, Alon, Chaudhury, Garg, Mehlhorn, and Mehta, EC 2023] Hannaneh Akrami, Noga Alon, Bhaskar Ray Chaudhury, Jugal Garg, Kurt Mehlhorn, and Ruta Mehta. “EFX allocations: Simplifications and improvements.” Proceedings of the 24th ACM Conference on Economics and Computation, 2023.

[Bu, Song, and Yu, IJCS-FAW 2023] Xiaolin Bu, Jiaxin Song, and Ziqi Yu. “EFX allocations exist for binary valuations.” Proceedings of the International Joint Conference on Theoretical Computer Science—Frontiers of Algorithmic Wisdom, Lecture Notes in Computer Science, 2023.

[Christodoulou and Christoforidis 2025] George Christodoulou and Vasilis Christoforidis. “Fair and truthful allocations under leveled valuations.” Information Processing Letters 190 (2025): 106577.

[Jin and Tao, WINE 2025] Jiarong Jin and Biaoshuai Tao. “On Pareto-optimal and fair allocations with personalized bi-valued utilities.” Proceedings of the 21st Conference on Web and Internet Economics, 2025.

[Davidiuk, Dementiev, Ignatiev, and Sagunov, AAAI 2026] Vladyslav Davidiuk, Yuri Dementiev, Alexey Ignatiev, and Dmitry Sagunov. “EFX and PO allocation exists for two types of goods.” Proceedings of the 40th AAAI Conference on Artificial Intelligence, 2026.

[Christodoulou, Fiat, Koutsoupias, and Sgouritsa, EC 2023] George Christodoulou, Amos Fiat, Elias Koutsoupias, and Alkmini Sgouritsa. “Fair allocation in graphs.” Proceedings of the 24th ACM Conference on Economics and Computation, 2023: 473–488.

[Afshinmehr, Danaei, Kazemi, Mehlhorn, and Rathi, AAMAS 2025] Mahyar Afshinmehr, Alireza Danaei, Mehrafarin Kazemi, Kurt Mehlhorn, and Nidhi Rathi. “EFX allocations and orientations on bipartite multigraphs: A complete picture.” Proceedings of the 24th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems, 2025.

[Sgouritsa and Sotiriou, AAMAS 2025] Alkmini Sgouritsa and Minas Marios Sotiriou. “On the existence of EFX allocations in multigraphs.” Proceedings of the 24th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems, 2025.

[Afshinmehr, Ashuri, Mahmoudkhan, and Mehlhorn, AAMAS 2026] Mahyar Afshinmehr, Arash Ashuri, Pouria Mahmoudkhan, and Kurt Mehlhorn. “EFX allocations exist on triangle-free multigraphs.” Proceedings of the 25th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems, 2026.

[Christodoulou, Mastrakoulis, Sgouritsa, and Sotiriou, EC 2026] George Christodoulou, Symeon Mastrakoulis, Alkmini Sgouritsa, and Minas Marios Sotiriou. Paper on EFX allocations for general multigraph valuations. Proceedings of the 27th ACM Conference on Economics and Computation, 2026.

[Afshinmehr, Ashuri, Mahmoudkhan, Mehlhorn, and Shahrezaei, EC 2026] Mahyar Afshinmehr, Arash Ashuri, Pouria Mahmoudkhan, Kurt Mehlhorn, and Amir Mohammad Shahrezaei. Paper on EFX allocations for general multigraph valuations. Proceedings of the 27th ACM Conference on Economics and Computation, 2026.

[Chaudhury, Kavitha, Mehlhorn, and Sgouritsa, SODA 2020] Bhaskar Ray Chaudhury, Telikepalli Kavitha, Kurt Mehlhorn, and Alkmini Sgouritsa. “A little charity guarantees almost envy-freeness.” Proceedings of the 31st Annual ACM–SIAM Symposium on Discrete Algorithms, 2020: 2658–2672.

[Berger, Cohen, Feldman, and Fiat, AAI 2022] Ben Berger, Avi Cohen, Michal Feldman, and Amos Fiat. “(Almost full) EFX exists for four agents (and beyond).” Proceedings of the 36th AAI Conference on Artificial Intelligence, 36.5 (2022): 4826–4833.

[Chaudhury, Garg, Mehlhorn, Mehta, and Misra, EC 2021] Bhaskar Ray Chaudhury, Jugal Garg, Kurt Mehlhorn, Ruta Mehta, and Pranabendu Misra. “Improving EFX guarantees through rainbow cycle number.” Proceedings of the 22nd ACM Conference on Economics and Computation, 2021: 310–311.

[Ghosal, HV, Nimbhorkar, and Varma, AAI 2025] Pratik Ghosal, Vishwa Prakash H. V., Prajakta Nimbhorkar, and Nithin Varma. “(Almost full) EFX for three (and more) types of agents.” Proceedings of the 39th AAI Conference on Artificial Intelligence, 39.13 (2025): 13889–13896.

[Amanatidis, Markakis, and Ntokos, AAI 2020] Georgios Amanatidis, Evangelos Markakis, and Apostolos Ntokos. “Multiple birds with one stone: Beating $1/2$ for EFX and GMMS via envy cycle elimination.” Proceedings of the 34th AAI Conference on Artificial Intelligence, 2020: 1790–1797.

[Barman, Kar, and Pathak, AAMAS 2024] Siddharth Barman, Arindam Khan Kar, and Eklavya Pathak. Paper on parameterized approximation guarantees for EFX. Proceedings of the 23rd International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems, 2024.

[Amanatidis, Filos-Ratsikas, and Sgouritsa, EC 2024] Georgios Amanatidis, Aris Filos-Ratsikas, and Alkmini Sgouritsa. Paper establishing $2/3$ -EFX guarantees for restricted settings. Proceedings of the 25th ACM Conference on Economics and Computation, 2024.

- [Akrami and Rathi, AAI 2025] Hannaneh Akrami and Nidhi Rathi. “Epistemic EFX allocations exist for monotone valuations.” Proceedings of the 39th AAI Conference on Artificial Intelligence, 2025.
- [Akrami, Mahara, Mehlhorn, and Rathi 2026] Hannaneh Akrami, Ryoga Mahara, Kurt Mehlhorn, and Nidhi Rathi. “Achieving EF1 and epistemic EFX guarantees simultaneously.” Preprint, 2026.
- [Akrami, Mayorov, Mehlhorn, Srinivas, and Weidenbach 2026] Hannaneh Akrami, Alexander Mayorov, Kurt Mehlhorn, Shreyas Srinivas, and Christoph Weidenbach. “A counterexample to EFX; $n \geq 3$ agents, $m \geq n + 5$ items, monotone valuations; via SAT-solving.” Preprint, 2026.
- [Mackenzie and Suzuki, 2026] Simon Mackenzie and Mashbat Suzuki. “Counterexamples to EFX for submodular and subadditive valuations.” Preprint, 2026.
- [Mahara, SODA 2026] Ryoga Mahara. “Existence of Fair and Efficient Allocation of Indivisible Chores.” Proceedings of the 2026 Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, 2026: 6742–6766.
- [Bhaskar, Sricharan, and Vaish, APPROX 2021] Umang Bhaskar, A. R. Sricharan, and Rohit Vaish. “On Approximate Envy-Freeness for Indivisible Chores and Mixed Resources.” Approximation, Randomization, and Combinatorial Optimization: Algorithms and Techniques, APPROX/RANDOM 2021, LIPIcs 207, 2021: 1:1–1:23.
- [Aziz, Caragiannis, Igarashi, and Walsh, IJCAI 2019] Haris Aziz, Ioannis Caragiannis, Ayumi Igarashi, and Toby Walsh. “Fair Allocation of Indivisible Goods and Chores.” Proceedings of the 28th International Joint Conference on Artificial Intelligence, 2019: 53–59.
- [Garg, Murhekar, and Qin, AAI 2022] Jugal Garg, Aniket Murhekar, and John Qin. “Fair and Efficient Allocations of Chores under Bivalued Preferences.” Proceedings of the 36th AAI Conference on Artificial Intelligence 36.5 (2022): 5043–5050.
- [Ebadian, Peters, and Shah, AAMAS 2022] Soroush Ebadian, Dominik Peters, and Nisarg Shah. “How to Fairly Allocate Easy and Difficult Chores.” Proceedings of the 21st International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems, 2022: 372–380.
- [Aziz, Lindsay, Ritossa, and Suzuki, AAMAS 2023] Haris Aziz, Jeremy Lindsay, Angus Ritossa, and Mashbat Suzuki. “Fair Allocation of Two Types of Chores.” Proceedings of the 22nd International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems, 2023: 143–151.
- [Garg, Murhekar, and Qin, IJCAI 2023] Jugal Garg, Aniket Murhekar, and John Qin. “New Algorithms for the Fair and Efficient Allocation of Indivisible Chores.” Proceedings of the 32nd International Joint Conference on Artificial Intelligence, 2023: 2710–2718.

- [Garg, Murhekar, and Qin, IJCAI 2024] Jugal Garg, Aniket Murhekar, and John Qin. “Weighted EF1 and PO Allocations with Few Types of Agents or Chores.” Proceedings of the 33rd International Joint Conference on Artificial Intelligence, 2024: 2799–2806.
- [Negishi, 1960] Takashi Negishi. “Welfare Economics and Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy.” *Metroeconomica* 12.2–3 (1960): 92–97.
- [Brânzei and Sandomirskiy, 2024] Simina Brânzei and Fedor Sandomirskiy. “Algorithms for Competitive Division of Chores.” *Mathematics of Operations Research* 49.1 (2024): 398–429.
- [Igarashi and Meunier, 2025] Ayumi Igarashi and Frédéric Meunier. “Fair and Efficient Allocation of Indivisible Items under Category Constraints.” Preprint, 2025.
- [Knaster, Kuratowski, and Mazurkiewicz, 1929] Bronisław Knaster, Kazimierz Kuratowski, and Stefan Mazurkiewicz. “Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n -dimensionale Simplexe.” *Fundamenta Mathematicae* 14.1 (1929): 132–137.