

組合せ最適化セミナー 2026 演習問題

大城 泰平

★の数は、私と ChatGPT による推定難易度を表す。

問題 1 (★). $\mathbf{M} = (E, \mathcal{B})$ をマトロイド, $A, B \in \mathcal{B}$ を $\mathbf{M}$ の基とする. 任意の $X \subseteq A \setminus B, Y \subseteq B \setminus A$ に対して, $X \subseteq U, Y \subseteq V, |U| = |V| \leq |X + Y|, A - U + V, B + U - V \in \mathcal{B}$ であるような $U \subseteq A \setminus B$ と $V \subseteq B \setminus A$ が存在することが知られている. これを用いて, $|X + Y| > |A \setminus B|$ であるような $X \subseteq A \setminus B$ と $Y \subseteq B \setminus A$ に対し, 非空な $U \subseteq X, V \subseteq Y$ であって, $A - U + V, B + U - V \in \mathcal{B}$ を満たすものが存在することを示せ.

問題 2 (★). 以下の交換性の不成立を, 4 頂点の完全グラフ K_4 が定めるグラフ的マトロイドを用いて示せ: $\mathbf{M} = (E, \mathcal{B})$ をマトロイド, $A, B \in \mathcal{B}$ を $|A \setminus B| \geq 2$ であるような $\mathbf{M}$ の基の対とする. 任意の $x \in A \setminus B, y \in B \setminus A$ に対して, ある $e \in (A \setminus B) - x$ と $f \in (B \setminus A) - y$ が存在して, $A - \{x, e\} + \{y, f\}, B + \{x, e\} - \{y, f\} \in \mathcal{B}$ となる.

問題 3 (★★). 以下の交換性を, マトロイドの同時交換性を用いて示せ: $\mathbf{M} = (E, \mathcal{B})$ をマトロイド, $A, B \in \mathcal{B}$ を $\mathbf{M}$ の基とする. 任意の $x \in A \setminus B, y \in B \setminus A$ に対して, ある $e \in A \setminus B$ と $f \in B \setminus A$ が存在して, $A - \{x, e\} + \{y, f\}, B + \{x, e\} - \{y, f\} \in \mathcal{B}$ となる.

問題 4 (★). $\mathbf{M} = (E, \mathcal{B})$ をマトロイド, cl を $\mathbf{M}$ の閉包作用素とする. 閉包作用素の四公理を用いて, 任意の $S, T \subseteq E$ に対して $\text{cl}(S \cup \text{cl}(T)) = \text{cl}(S \cup T)$ が成り立つことを示せ.

問題 5 (★★). $\mathbf{M} = (E, \mathcal{B})$ をマトロイド, $A, B \in \mathcal{B}$ を $\mathbf{M}$ の基, (X_1, X_2) および (Y_1, Y_2) をそれぞれ $A \setminus B, B \setminus A$ の二分割とし, $|X_1| \neq |Y_1|$ とする.

- (1) $\mathbf{M}$ が標数 0 の体上で表現可能なとき, $A - x + y, B + x - y \in \mathcal{B}$ となるような $x \in X_1, y \in Y_2$ が存在するか, もしくは $A - x + y, B + x - y \in \mathcal{B}$ となるような $x \in X_2, y \in Y_1$ が存在することを示せ.
- (2) $\mathbb{F}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上の 4×8 行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

が表現するマトロイド S_8 は, 上記の性質を満たさないことを示せ.

問題6 (★). A と B を共通部分をもたない同じ要素数の有限集合とし,

$$\mathcal{S} := \{(X, Y) \mid X \subseteq A, Y \subseteq B, |X| = |Y|\}$$

とする. 全単射 $\varphi: A \rightarrow B$ に対し, 関数 $\delta_\varphi: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{Q}$ を

$$\delta_\varphi(X, Y) := \begin{cases} 1 & (\varphi(X) = Y), \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

と定める. δ_φ が調和的であることを示せ.

問題7 (★★★) A と B を共通部分をもたない同じ要素数の有限集合とし,

$$\mathcal{S} := \{(X, Y) \mid X \subseteq A, Y \subseteq B, |X| = |Y|\}$$

とする.

(1) $h: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{Q}$ が調和的なとき, $h(\emptyset, \emptyset) = h(A, B)$ を示せ.

(2) $\mathcal{S}$ を頂点とするグラフ G の辺集合を

$$\{(X, Y), (X', Y')\} \in E(G) \iff |(A - X + Y) \setminus (A - X' + Y')| = 1$$

と定める. $h: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{Q}$ を調和的関数とし, $\text{supp}(h)$ が誘導する G の部分グラフ $G[\text{supp}(h)]$ の任意の連結成分の頂点集合を $\mathcal{C}$ とする. このとき, 以下で定義される関数 $h_{\mathcal{C}}: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{Q}$

$$h_{\mathcal{C}}(X, Y) := \begin{cases} h(X, Y) & ((X, Y) \in \mathcal{C}), \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

が調和的であることを示せ.

(3) マトロイド $\mathbf{M} = (E, \mathcal{B})$ が $\mathbb{Q}$ 上で表現可能なとき, $A \cap B = \emptyset$ なる任意の基の対 (A, B) に対して, ある非負整数 ℓ と長さ ℓ の基の対の列 $(A_0, B_0), (A_1, B_1), \dots, (A_\ell, B_\ell)$ が存在して, $(A_0, B_0) = (A, B)$, $(A_\ell, B_\ell) = (B, A)$, かつ, 任意の $i \in [\ell]$ に対して, ある $x_i \in A_{i-1} \setminus B_{i-1}$ と $y_i \in B_{i-1} \setminus A_{i-1}$ が存在して, $A_i = A_{i-1} - x_i + y_i$, $B_i = B_{i-1} + x_i - y_i$ となることを示せ.

(4) $\mathbf{M} = (E, \mathcal{B})$ を $\mathbb{Q}$ 上で表現可能な階数 1 以上のマトロイドとし, 台集合 E が $\mathbf{M}$ の二つの基に分割できるとする. E 上の加法的関数 $u: 2^E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して, E のある基への二分割 (A, B) が存在して, $u(A) \geq u(B) - \max_{f \in B} u(\{f\})$ かつ $u(B) \geq u(A) - \max_{e \in A} u(\{e\})$ が成り立つことを示せ.