

マトロイドの基の交換性

おおき たいへい
大城 泰平

北海道大学／大阪大学／理化学研究所

はじめに | 記法のおことわり

2/89

- 集合 A, B について, $A \cap B = \emptyset$ のときに, $A \cup B$ を $A + B$ と書きます
- 集合 A, B について, $A \supseteq B$ のときに, $A \setminus B$ を $A - B$ と書きます
- $A - \{x\}$ を $A - x$ と略記します
- $A + \{y\}$ を $A + y$ と略記します
- $A - X + Y$ のような表記は, $A \supseteq X$ かつ $A \cap Y = \emptyset$ の場合, つまり

$(A - X) + Y$ と解釈しても,

$(A + Y) - X$ と解釈しても,

問題がない場合にのみ用います

マトロイド

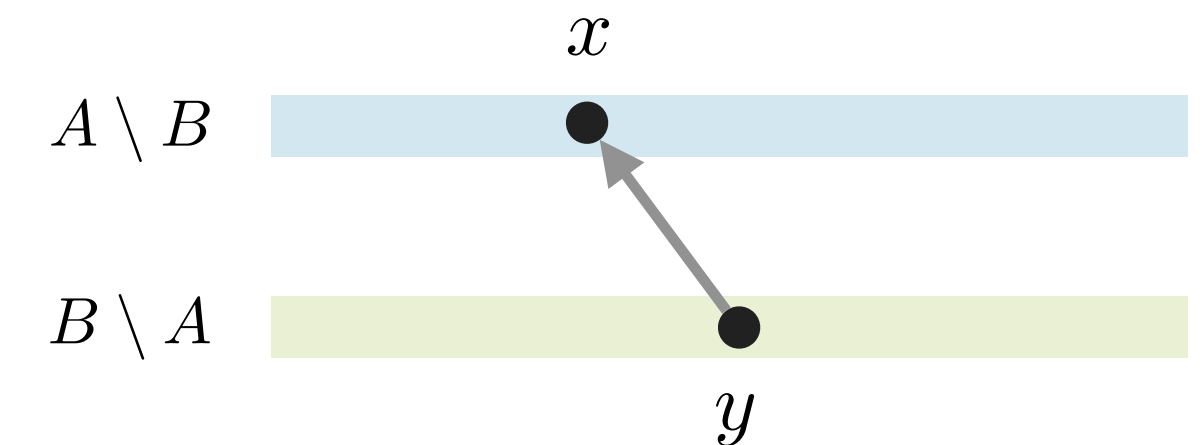
3/89

[Whitney '35, Nakasawa '35]

$$\mathbf{M} = (E, \mathcal{B})$$

- E : 有限台集合
- $\mathcal{B} \subseteq 2^E$: ^{base family} **基族**

… 非空な部分集合族で, 任意の $A, B \in \mathcal{B}$ が以下の**交換性**を満たす



exchange property

交換性 (exchange property)

$$\forall x \in A \setminus B \quad \exists y \in B \setminus A \quad \text{s.t.} \quad A - x + y \in \mathcal{B}$$

base / basis

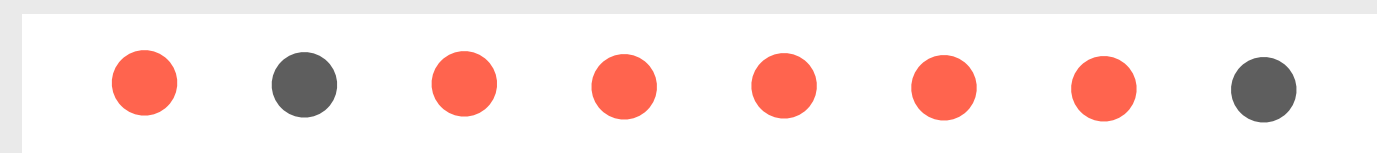
$\mathcal{B}$ の要素を**基**という

rank

全ての基のサイズは一定 [Rado '49]. これをマトロイド $\mathbf{M}$ の**階数**という

uniform

一様マトロイド

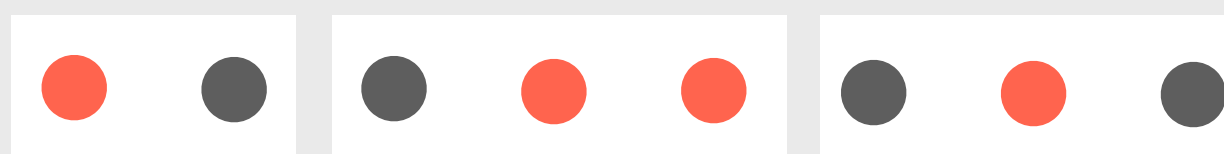


=6

$\subseteq$

partition

分割マトロイド



=1

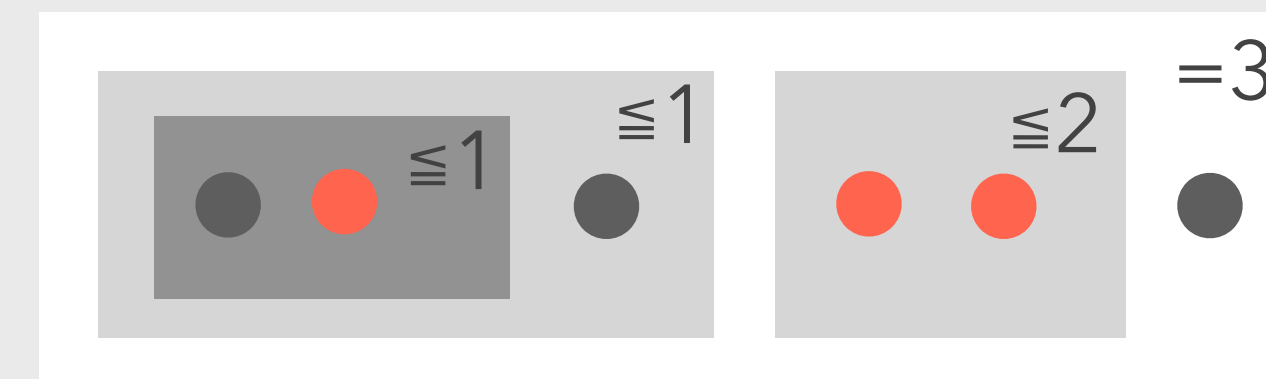
=2

=1

$\subseteq$

laminar

層族マトロイド

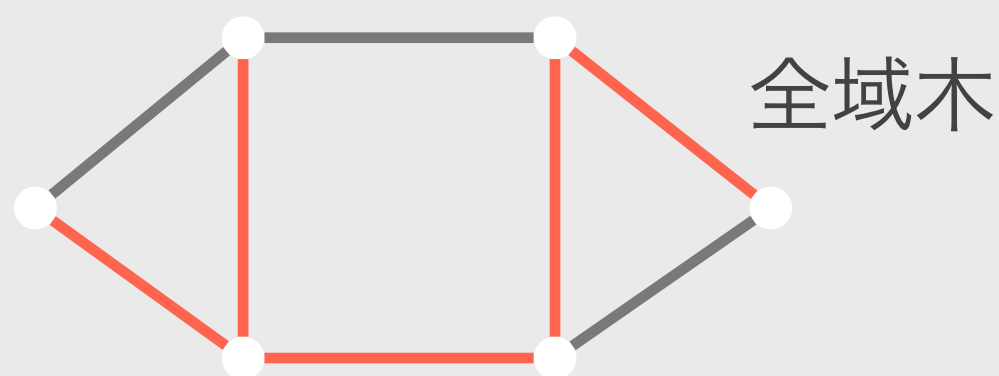


$\cap$

$\cap$

graphic

グラフ的マトロイド

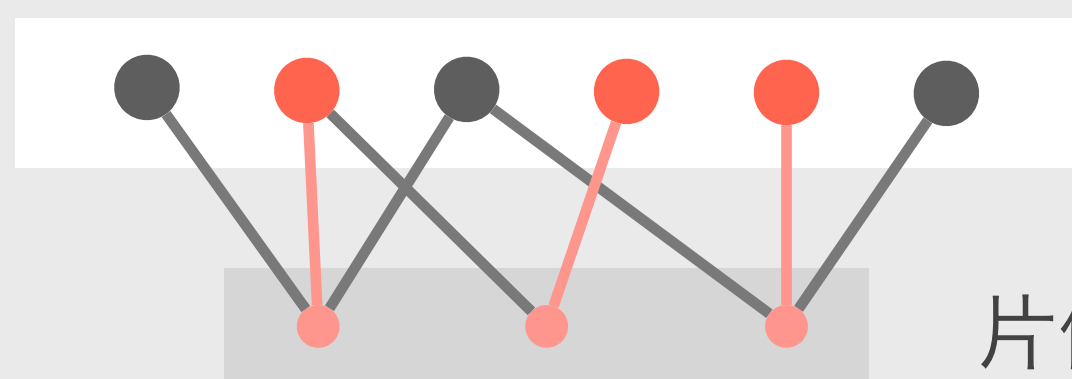


全域木

$\cap$

transversal

横断マトロイド

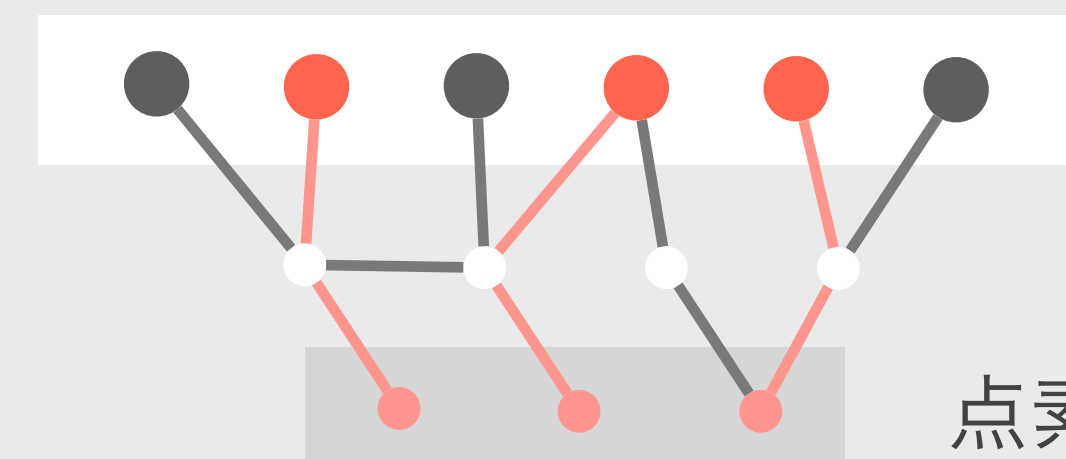


片側完マ

$\subseteq$

gammoid

ガンモイド



点素パス

$\cap$

regular

正則マトロイド

任意の体上表現可能
 $\Leftrightarrow$ 完全単模行列で $\mathbb{Q}$ 上表現可能

$\subseteq$

linear

representable

線形 (表現可能) マトロイド



$\in \mathbb{F}^{3 \times 6}$

なぜマトロイドは面白い？

組合せ最適化の観点から

5/89

マトロイド上の線形関数は貪欲法により最適化できる（実はマトロイドの特徴づけでもある）

$$\max_{B \in \mathcal{B}} \sum_{e \in B} w(e)$$

$w: E \rightarrow \mathbb{R}$

$I \leftarrow \emptyset$

for $e \in E$ in a non-increasing order of w :

if $I + e$ is *independent*: I はある基の部分集合

$I \leftarrow I + e$

return I as a maximum-weight basis

台集合が同じ2つのマトロイドの（最大重み）共通基も多項式時間で求まる（マトロイド交叉）

→ 組合せ最適化における様々な制約や問題の共通の一般化として活用される

でも、個人的には、マトロイドの**交換性**が最近アツい！

交換性 (exchange property)

6/89

$$\forall x \in A \setminus B \quad \exists y \in B \setminus A \quad \text{s.t.} \quad A - x + y \in \mathcal{B}$$

同時交換性 (symmetric exchange property / simultaneous exchange property)

[Brualdi '69]

$$\forall x \in A \setminus B \quad \exists y \in B \setminus A \quad \text{s.t.} \quad A - x + y, B + x - y \in \mathcal{B}$$

多重交換性 (multiple exchange property)

[Brylawski '73, Greene '73, Woodall '74]

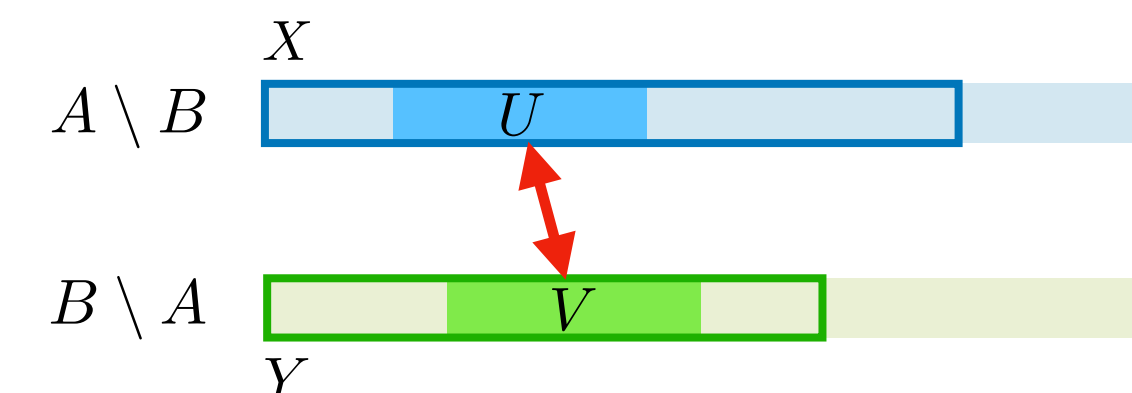
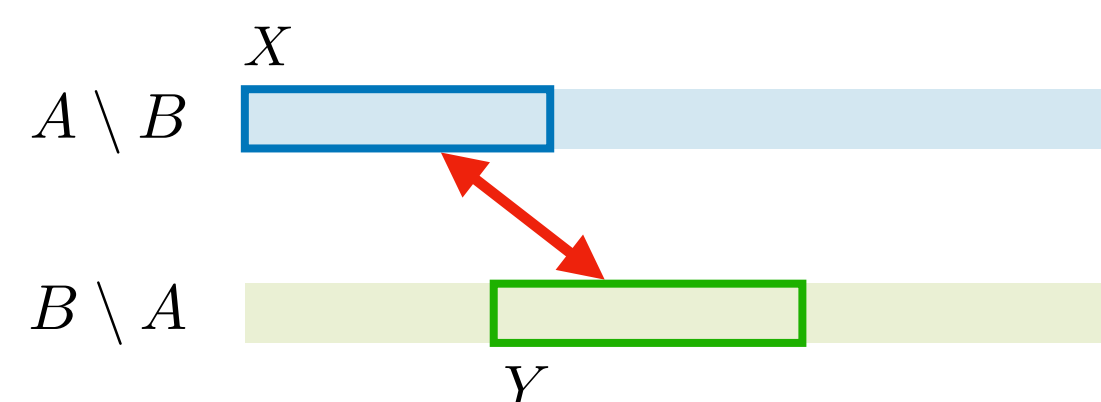
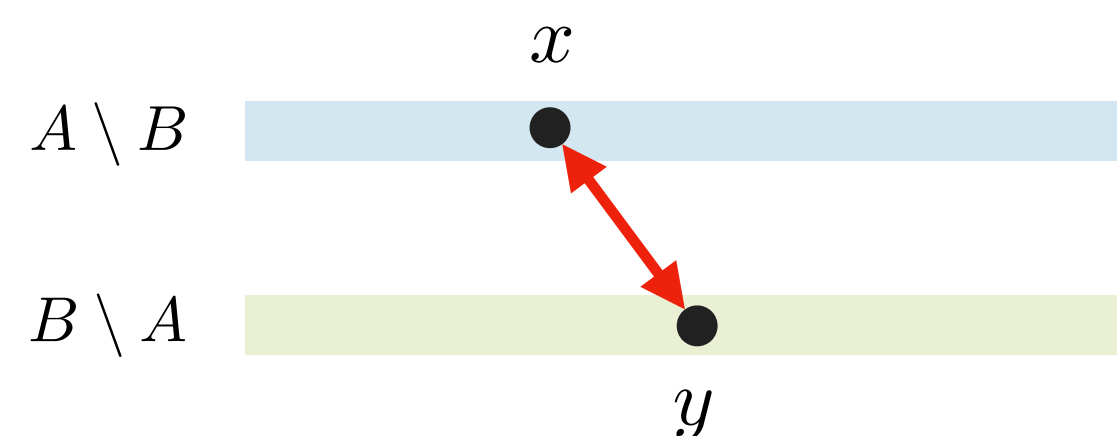
$$\forall X \subseteq A \setminus B \quad \exists Y \subseteq B \setminus A \quad \text{s.t.} \quad A - X + Y, B + X - Y \in \mathcal{B}$$

Greene の交換性

[Greene '74]

$$\begin{aligned} &\forall X \subseteq A \setminus B, Y \subseteq B \setminus A \quad \text{with} \quad |X| + |Y| > |A \setminus B| \\ &\exists \text{ nonempty } U \subseteq X, V \subseteq Y \quad \text{s.t.} \quad A - U + V, B + U - V \in \mathcal{B} \end{aligned}$$

※ 条件 $|X| + |Y| > |A \setminus B|$ は「 $X + Y$ が従属」に緩和可能 [Kung '78]



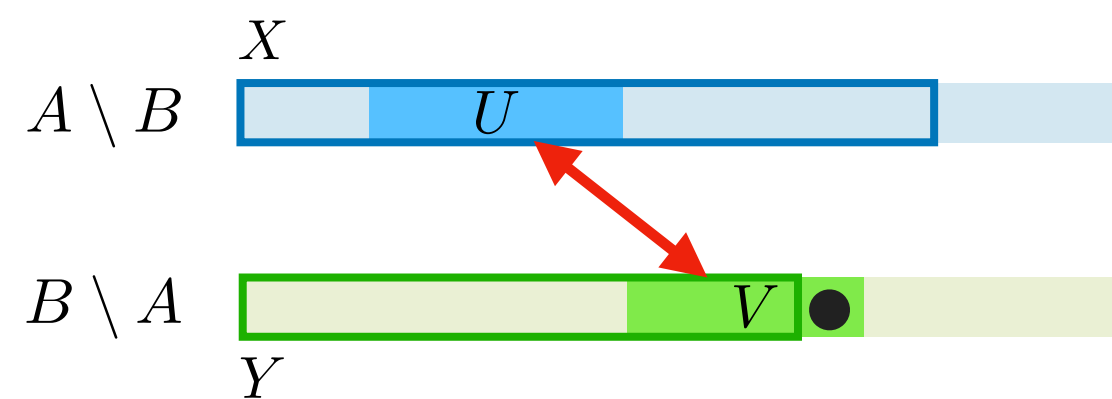
均衡改善交換性 (この講演では)

$$\begin{aligned} \forall X \subseteq A \setminus B, Y \subseteq B \setminus A \quad & \text{with } |X| > |Y| \\ \exists U \subseteq X, V \subseteq B \setminus A \quad & \text{s.t. } |V \setminus Y| = 1 \\ & A - U + V, B + U - V \in \mathcal{B} \end{aligned}$$

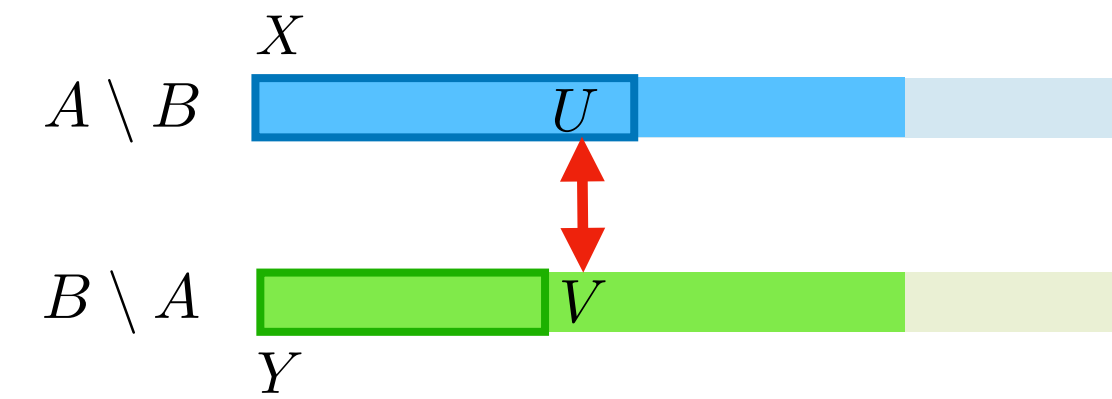
抱き合わせ交換性 (この講演では)

[O.-Schwarcz '26]

$$\begin{aligned} \forall X \subseteq A \setminus B, Y \subseteq B \setminus A \\ \exists U \subseteq A \setminus B, V \subseteq B \setminus A \quad & \text{s.t. } X \subseteq U, Y \subseteq V, |U| = |V| \leq |X + Y| \\ & A - U + V, B + U - V \in \mathcal{B} \end{aligned}$$

※ 上界 $|X + Y|$ は $X + Y$ の階数に改善可能

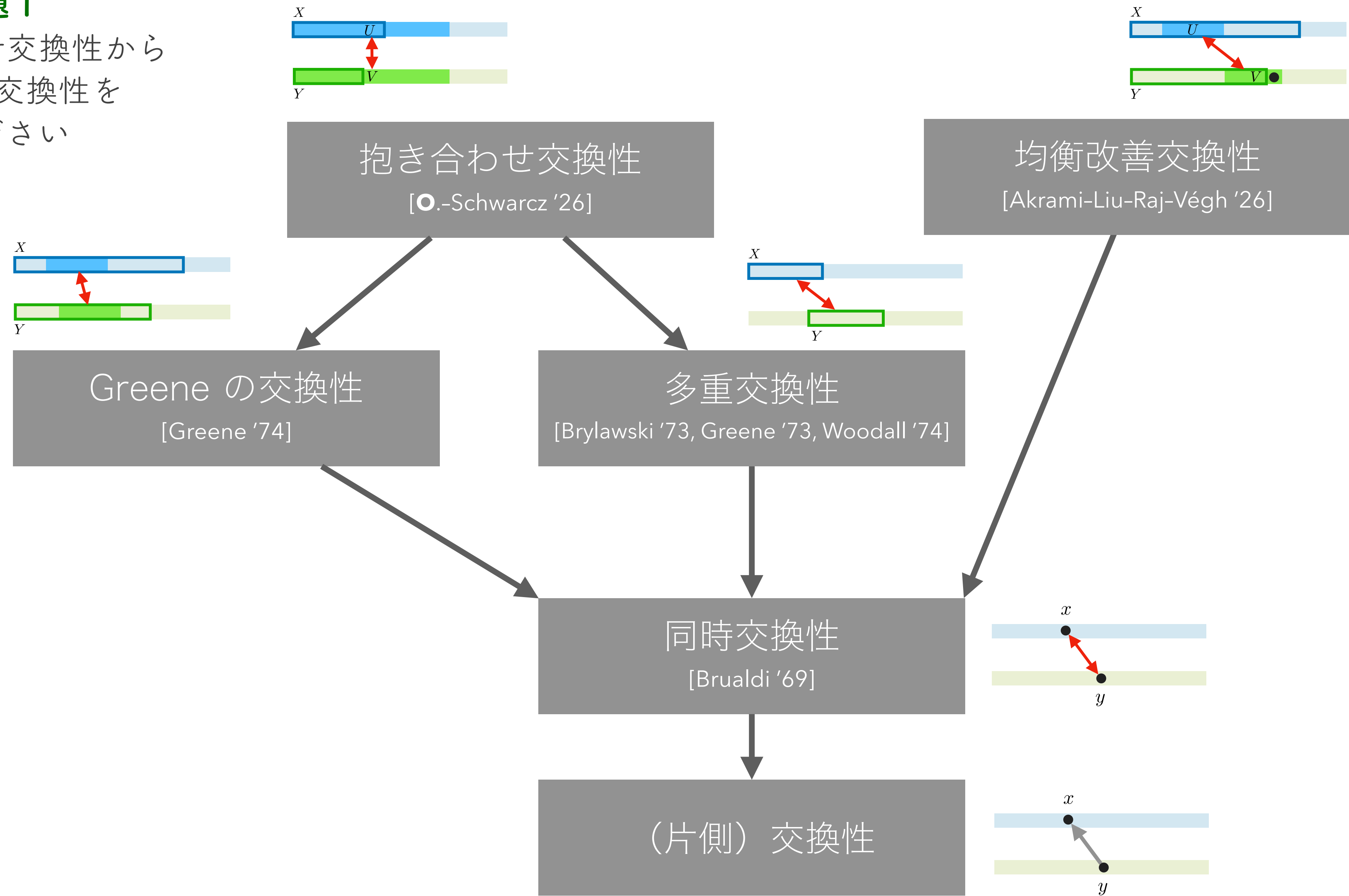
均衡改善交換性



抱き合わせ交換性

✓ 演習問題 1

抱き合わせ交換性から
Greene の交換性を
導いてください



なぜマトロイドの基の交換性は面白い？

9/89

- ✓ アルゴリズムの設計・解析に使える
- ✓ マトロイドの様々な定理・予想に関連する
- ✓ 様々な証明のテクニックがある

1 時限目

交換性を味わう

2 時限目

証明のアプローチ

3 時限目

表現可能なマトロイドの交換性

交換性を味わう

- ・この交換性は、どのような経緯で着想されたのか？
- ・「この交換性は成立しそうだ」という直感は、どのように得られるか？
- ・この交換性から、どのような帰結が成り立つか？

時限目

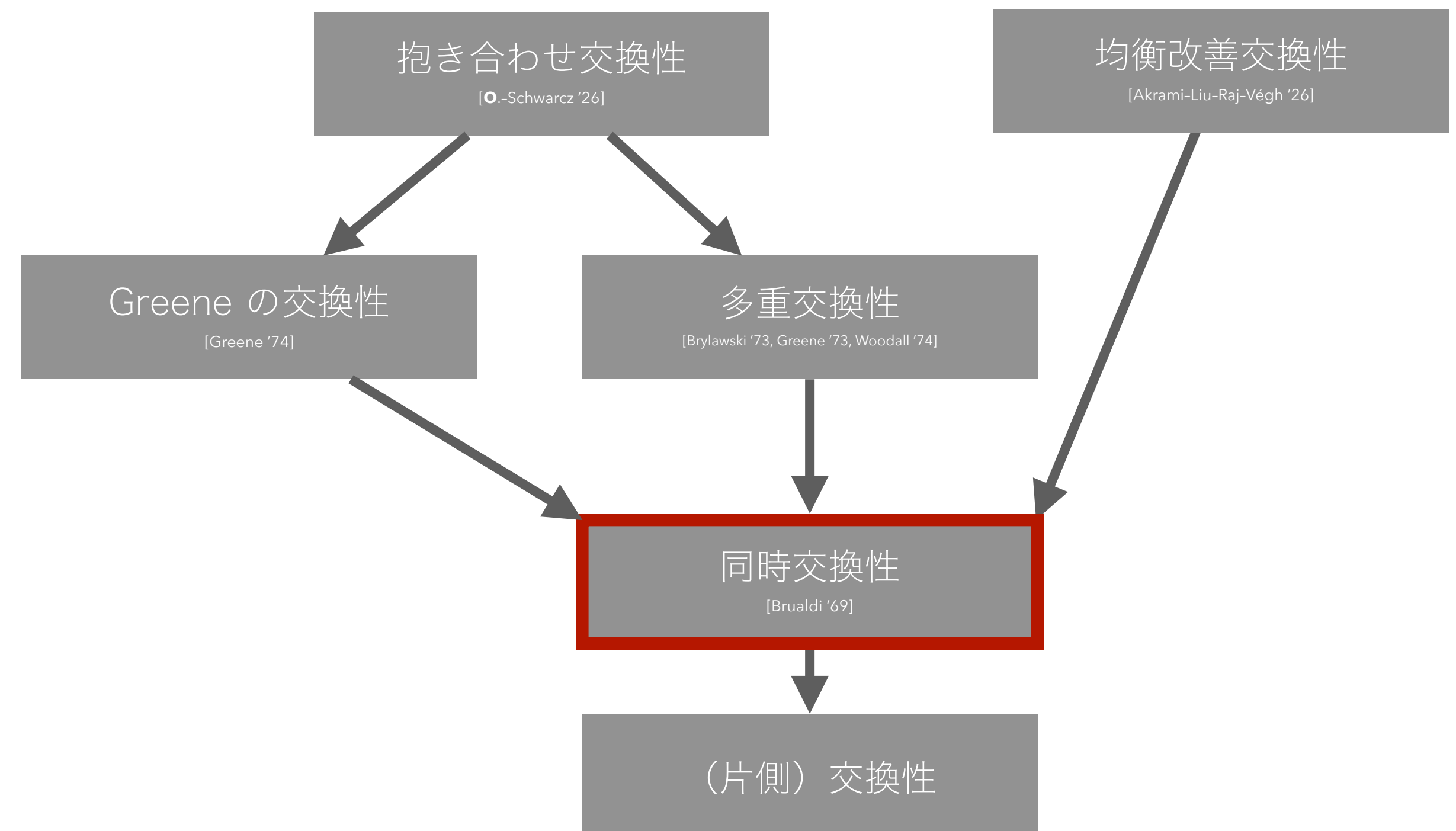
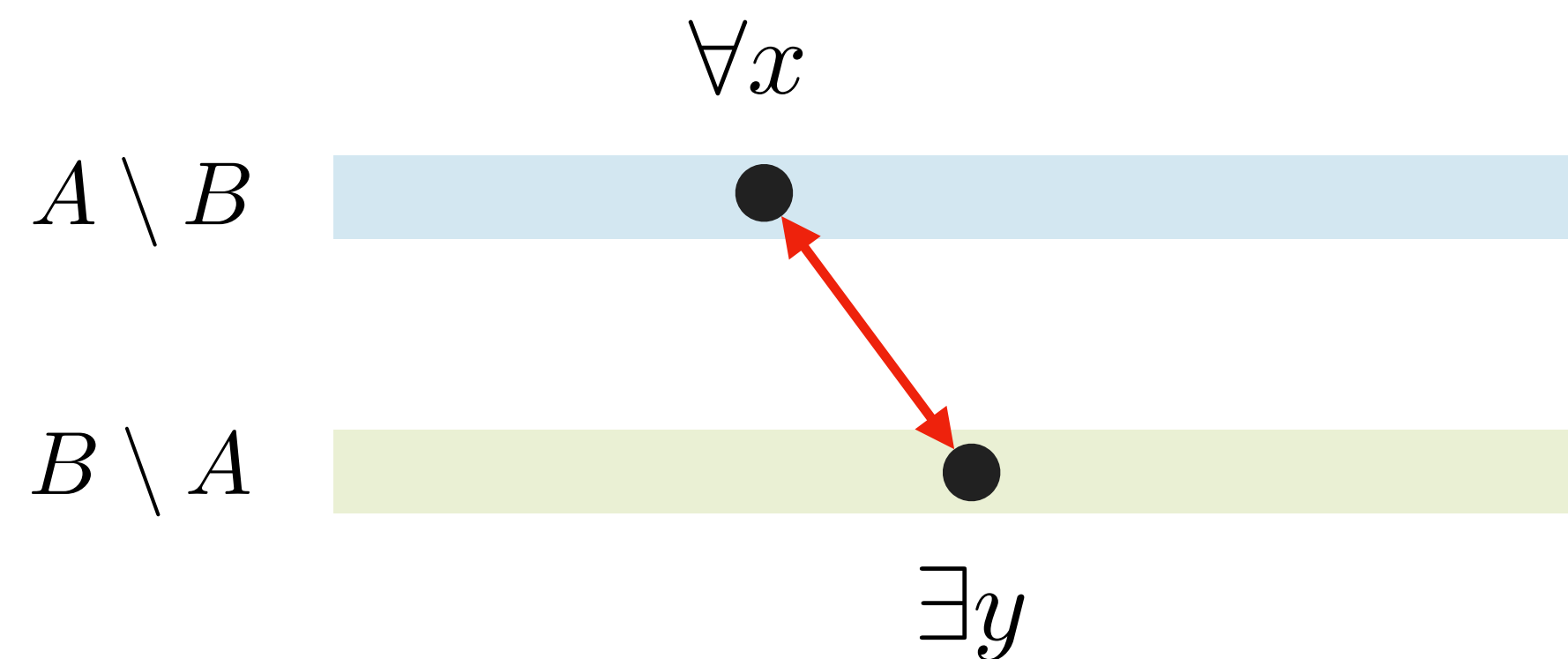
同時交換性

11 / 89

同時交換性 (symmetric exchange property / simultaneous exchange property)

[Brualdi '69]

$$\forall x \in A \setminus B \quad \exists y \in B \setminus A \quad \text{s.t.} \quad A - x + y, B + x - y \in \mathcal{B}$$



同時交換性 | 帰結

非常に基本的な命題なので、帰結はマトロイド理論の
全域にわたるが、強いて私が二つ挙げるならば

12/89

双対マトロイド

マトロイド $\mathbf{M} = (E, \mathcal{B})$ の^{dual}双対: $\mathbf{M}^* = (E, \mathcal{B}^*)$ with $\mathcal{B}^* := \{E - B \mid B \in \mathcal{B}\}$

$\mathbf{M}$ の同時交換性: $\forall A, B \in \mathcal{B} \quad \forall x \in A \setminus B \quad \exists y \in B \setminus A \quad \text{s.t.} \quad A - x + y, B + x - y \in \mathcal{B}$

$A' := E - A, B' := E - B \implies \forall x \in B' \setminus A' \quad \exists y \in A' \setminus B' \quad \text{s.t.} \quad B + x - y = E - (B' - x + y) \in \mathcal{B}$

よって, $\mathbf{M}^*$ はマトロイドとなる. $\iff B' - x + y \in \mathcal{B}^*$

離散凸性 (お気持ち)

基 $A, B \in \mathcal{B}$ から, 対称的な方向にお互い少しずつ近づいた集合 $A - x + y, B + x - y$ も基

$\implies \mathcal{B}$ は「凸っぽい」集合族

Cf. $S \subseteq \mathbb{R}^n$ が凸 $\iff \forall a, b \in S \quad \forall \lambda \in [0, 1] \quad a + \lambda(b - a), b - \lambda(b - a) \in S$

同時交換性を基礎として, マトロイドは, 付値マトロイドやM凸関数へ拡張されていく

[Dress-Wenzel '90, '92, Murota '98]

同時交換性 | Grassmann-Plücker 恒等式

13 / 89

$K \in \mathbb{F}^{r \times n}$ $K[S] := S$ の列を選択して得られる部分行列 ($S \subseteq [n]$)

$$K = \begin{array}{c} S \\ \boxed{K[S]} \end{array}$$

$A, B \in \binom{[n]}{r}$ $\binom{[n]}{r} := \{ A \subseteq [n] \mid |A| = r \}$

Grassmann-Plücker 恒等式 $x \in A \setminus B$

[Grassmann 1844, Plücker 1868, Hodge-Pedoe '47]

$$\det K[A] \det K[B] = \sum_{y \in B \setminus A} \pm \det K[A - x + y] \det K[B + x - y]$$

$$A, B \in \mathcal{B} \iff \det K[A] \det K[B] \neq 0$$

$$\iff \sum_{y \in B \setminus A} \pm \det K[A - x + y] \det K[B + x - y] \neq 0$$

$$\implies \exists y \in B \setminus A \quad \text{s.t.} \quad \det K[A - x + y] \det K[B + x - y] \neq 0$$

$$\iff \exists y \in B \setminus A \quad \text{s.t.} \quad A - x + y, B + x - y \in \mathcal{B}$$

表現可能マトロイドに対する同時交換性を与える！ → 一般のマトロイドでも考える動機

同時交換性 | 着想

14/89

[Brualdi '69] では、同時交換性は、同論文で示された以下の定理の拡張の必要条件として導入された

補題 (完全マッチング補題)

[Brualdi '69]

$A, B \in \mathcal{B}$ ならば、ある全単射 $\varphi: A \setminus B \rightarrow B \setminus A$ が存在し、
任意の $x \in A \setminus B$ に対して $A - x + \varphi(x) \in \mathcal{B}$

▶ “ 対称的に、任意の $y \in B \setminus A$ に対して $B - y + \psi(y) \in \mathcal{B}$ となる
全単射 $\psi: B \setminus A \rightarrow A \setminus B$ も存在するが、 $\varphi = \psi^{-1}$ とできるか？ ”

引用：R. A. Brualdi. Comments on bases in dependence structures. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 1:161-167, 1969.

これは任意のマトロイドでは成立せず、同論文 [Brualdi '69] で反例が与えられている

(weakly) base orderable

これが成立する特殊なマトロイドを (弱) **基対付合** という

基対応合性

15/89

マトロイド $\mathbf{M} = (E, \mathcal{B})$ が

(weakly) base orderable

- **(弱) 基対応合** (BO) $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall A, B \in \mathcal{B} \quad \exists \varphi: A \setminus B \rightarrow B \setminus A \text{ 全単射}$
s.t. $\forall x \in A \setminus B \quad A - x + \varphi(x), B + \varphi(x) - x \in \mathcal{B}$

strongly base orderable

- **強基対応合** (SBO) $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall A, B \in \mathcal{B} \quad \exists \varphi: A \setminus B \rightarrow B \setminus A \text{ 全単射}$
s.t. $\forall X \subseteq A \setminus B \quad A - X + \varphi(X), B + \varphi(X) - X \in \mathcal{B}$

一様マトロイド $\subseteq$ 分割マトロイド $\subseteq$ 層族マトロイド $\subseteq$ ガンモイド $\subseteq$ SBO $\subseteq$ BO
 $\subseteq$ 横断マトロイド $\subseteq$ ~~グラフ的マトロイド~~

同時交換性は (弱・強) 基対応合性を仮定すると直ちに従う. 一般に交換性がこれらの仮定から導かれるどうかを考えることは, 一般のマトロイドにおける成立の検証の第一歩として効果的

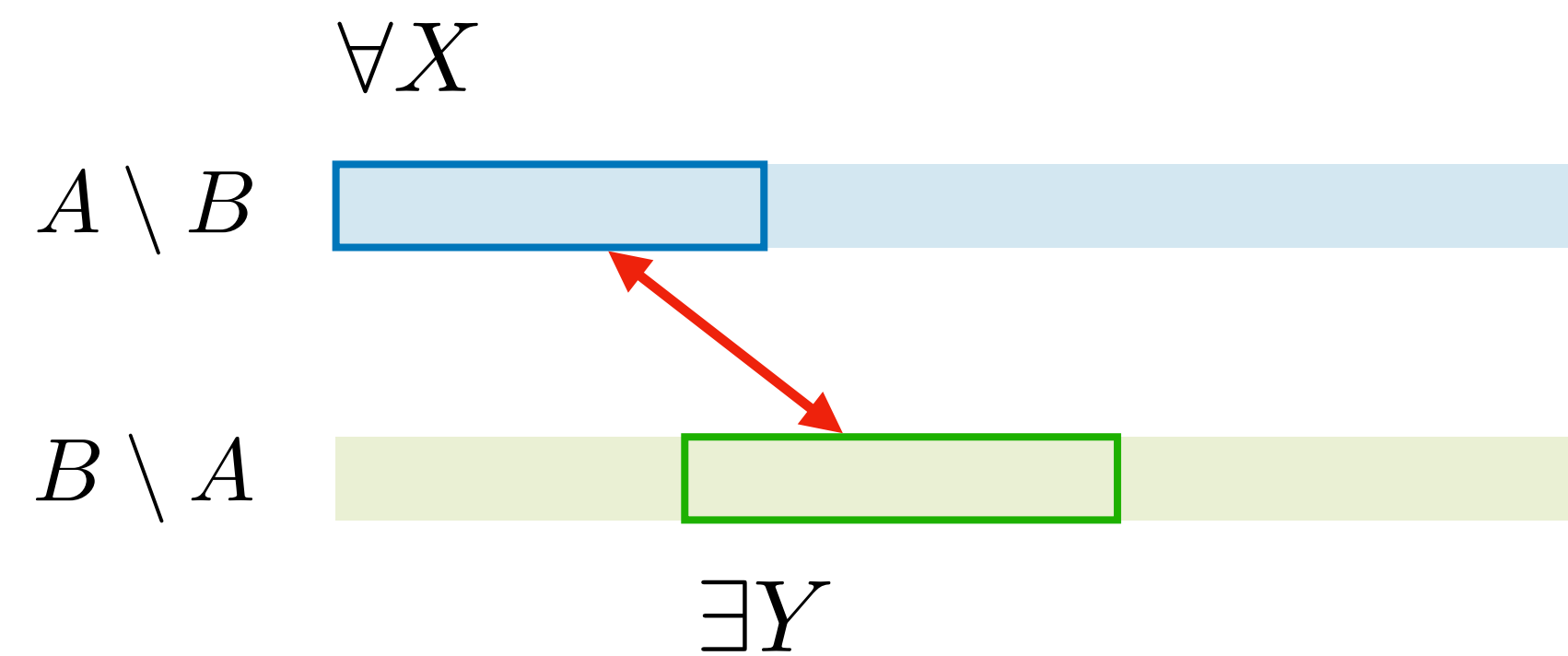
多重交換性

16 / 89

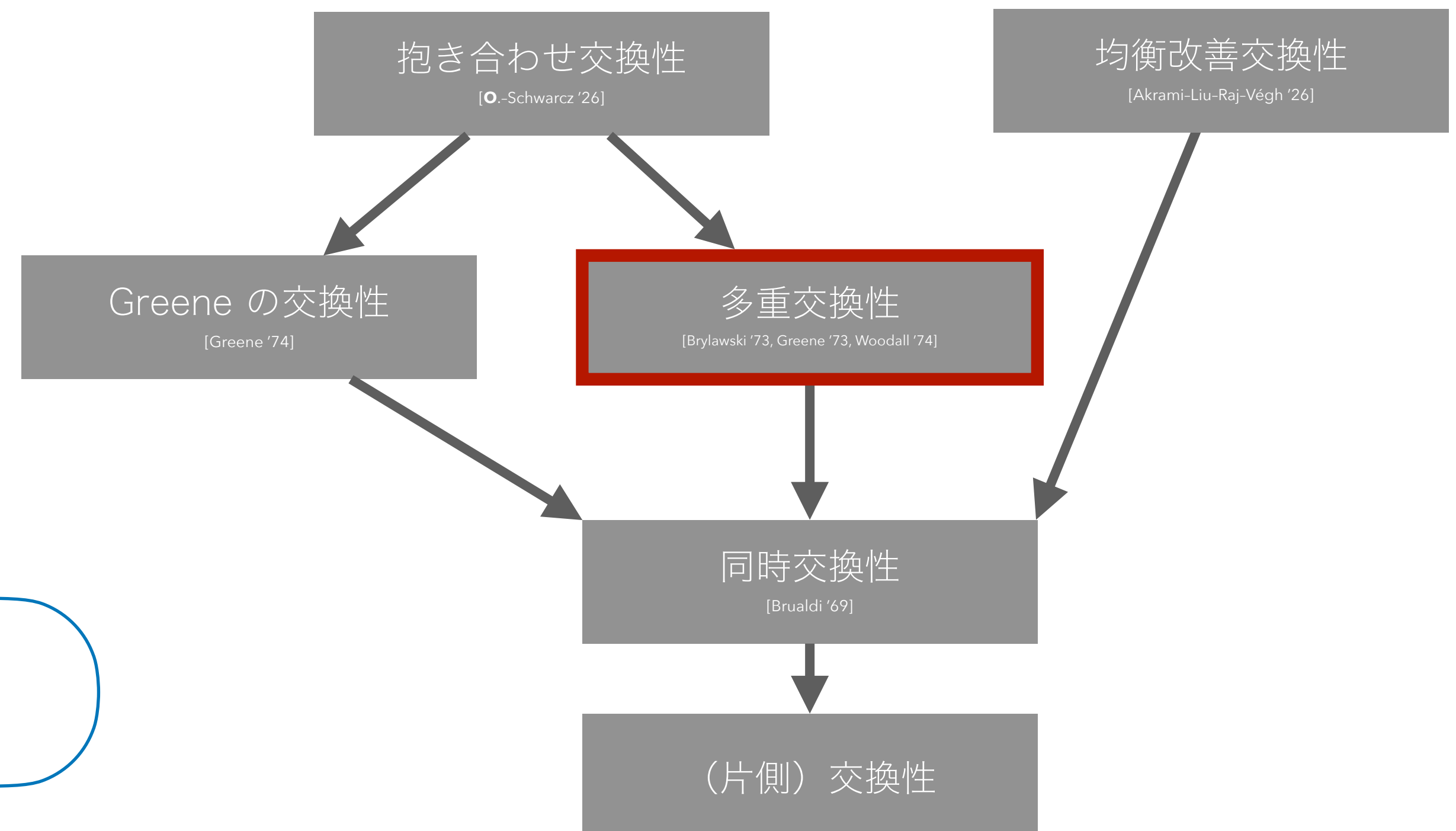
多重交換性 (multiple exchange property)

[Brylawski '73, Greene '73, Woodall '74]

$$\forall A, B \in \mathcal{B} \quad \forall X \subseteq A \setminus B \quad \exists Y \subseteq B \setminus A \quad \text{s.t.} \quad A - X + Y, B + X - Y \in \mathcal{B}$$



観察： 強基対応合性から直ちに従う



応用は多岐

- マトロイド制約下の（単調）劣モジュラ関数最大化
 - 決定性 $2 + \varepsilon$ 近似 [Buchbinder-Feldman-Garg '23]
 - ノイズつきオラクル [Huang-Wang-Yang-Zhou '22]
 - 階数をパラメータとした FPT [Nematollahi-Vladu-Zhao '26]
- 最大重み直並列部分グラフ問題に対する近似アルゴリズム [Călinescu-Wang '24]
- グラフ信号処理 [Li-Jin-Shuman '19]

さらなる拡張の応用

- k マトロイド制約下の単調劣モ最大化 [Lee-Sviridenko-Vondrak '10]
- グラフ TSP に対する 1.497 近似 [Traub-Vygen '23]

▶ “ 不変式論での結果を基に, Gian-Carlo Rota が予想した ”

引用: T. H. Brylawski. Some properties of basic families of subsets. *Disc. Math.*, 6:333-341, 1973.

▶ “ (出自について特に言及なし) ”

引用: C. Greene. A multiple exchange property for bases. In *Proc. Am. Math. Soc.*, 39(1):45-50, 1973.

▶ “ This result was first brought to my attention by D. Wright, who needed it in the case of p -groups and proved it for vector spaces in general [4]. I then proved it for matroids. Paul Seymour subsequently mentioned it as an unsolved problem at the 1973 (Aberystwyth) British Combinatorial Conference, and, since the result did not appear to be generally known, I have resurrected my proof. A recent paper by Greene [2] is devoted to a much longer proof of the same result; and it has since been pointed out to me that Greene also announced a short proof, apparently similar to mine, at the Dallas meeting of the A.M.S. in January 1973 [3], although the details have not been published. ”

引用: D. R. Woodall. An exchange theorem for bases of matroids. *J. Comb. Theory B*, 16:227-228, 1974.

▶ “ 不変式論での結果を基に, Gian-Carlo Rota が予想した ”

引用: T. H. Brylawski. Some properties of basic families of subsets. *Disc. Math.*, 6:333-341, 1973.

▶ “

D. Wright が線形マトロイドに対して示したのを見て, 私が一般のマトロイドに対して証明した. その後, 会議で Paul Seymour が未解決問題として言及したので, これは一般には知られていない結果なのではないかと思い至り, 証明を復活させた.

▶ “

最近の Greene の論文も, 同じ結果を非常に長い証明により示している. その後, Greene は短い証明があるとアナウンスしたが, 詳細は出版されていない.

昔は未解決問題だった. Woodall が与えたシンプルな証明は 2 時限目で紹介

多重交換性 | Grassmann-Plücker 恒等式

20/89

Grassmann-Plücker 恒等式の多重交換版も古くから知られている

(多重) **Grassmann-Plücker 恒等式** $X \subseteq A \setminus B$

[Grassmann 1844, Plücker 1868, Hodge-Pedoe '47]

$$\det K[A] \det K[B] = \sum_{Y \subseteq B \setminus A : |Y|=|X|} \pm \det K[A - X + Y] \det K[B + X - Y]$$

“ $\det M(X) \det M(Y) =$

$$= \sum_{Y' \subseteq Y} \pm \det M((X - X') \cup Y') \det M((Y - Y') \cup X') \quad ”$$

引用：T. H. Brylawski. Some properties of basic families of subsets. *Disc. Math.*, 6:333-341, 1973.

“ $\det M(X) = \sum_{B \subseteq Y} \pm \det M((X - A) \cup B) \det M((Y - B) \cup A).$

Since $\det M(X) \neq 0$, some term on the right must be nonzero, and the result follows. ”

引用：C. Greene. A multiple exchange property for bases. In *Proc. Am. Math. Soc.*, 39(1):45-50, 1973.

Greene の交換性

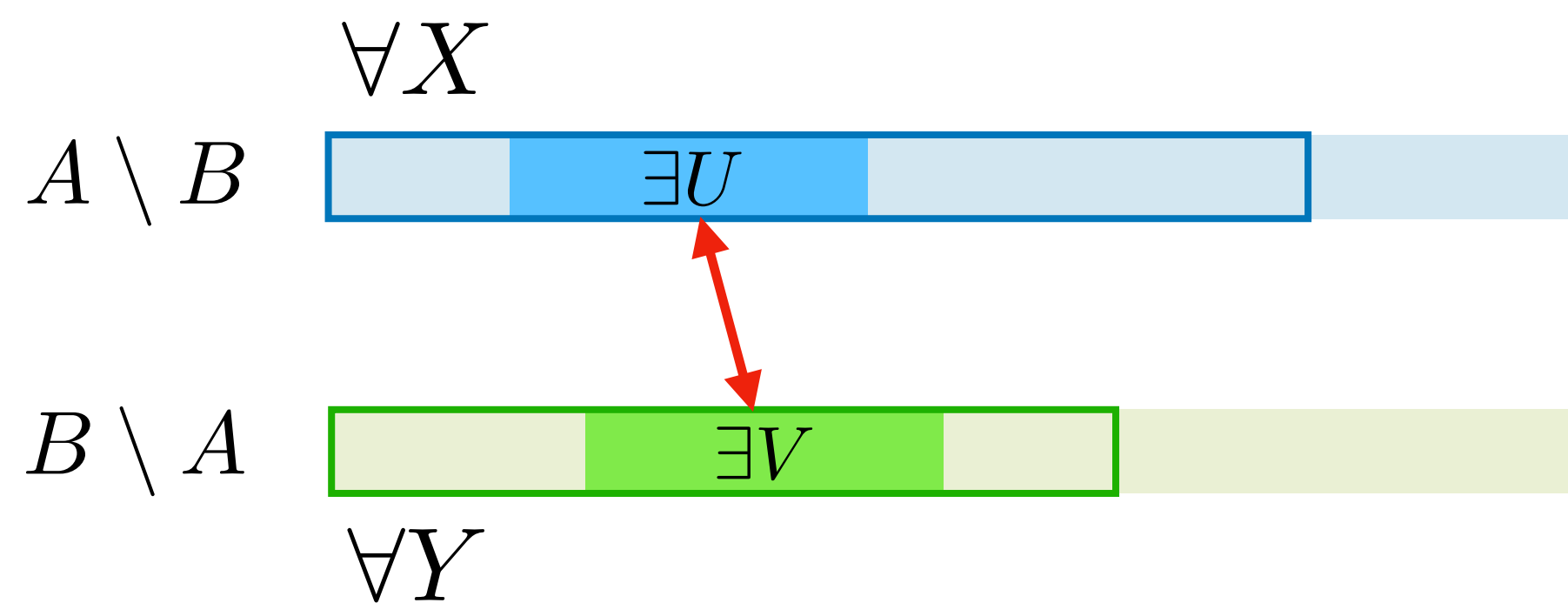
21 / 89

Greene の交換性

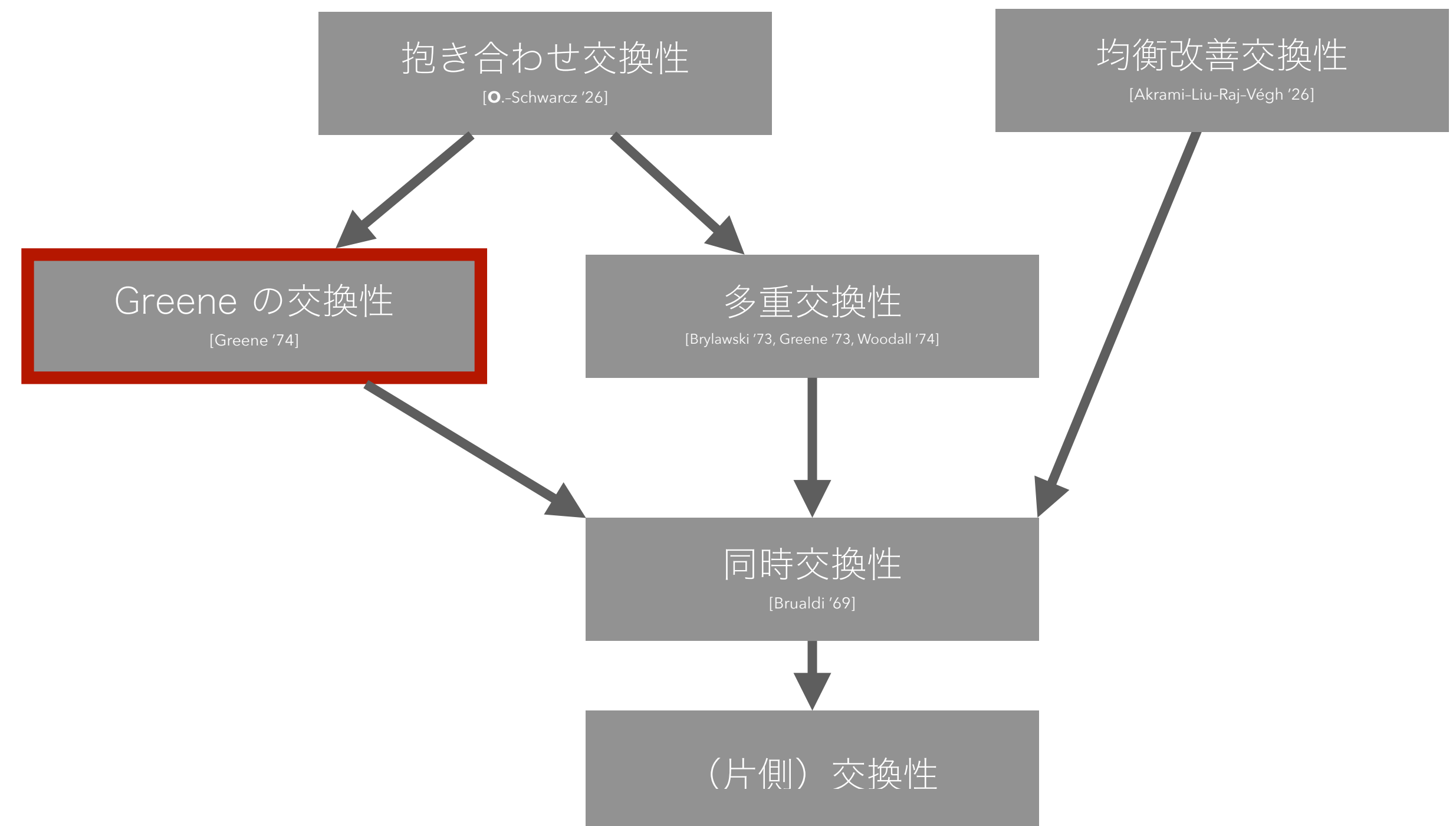
※ 条件 $|X| + |Y| > |A \setminus B|$ は「 $X + Y$ が従属」に緩和可能 [Kung '78]

[Greene '74]

$$\forall X \subseteq A \setminus B, Y \subseteq B \setminus A \text{ with } |X| + |Y| > |A \setminus B|$$
$$\exists \text{ nonempty } U \subseteq X, V \subseteq Y \text{ s.t. } A - U + V, B + U - V \in \mathcal{B}$$



観察： 弱基对付合性から従う



“ Gian-Carlo Rota が予想した ”

引用：C. Greene. Another exchange property for bases. In *Proc. Am. Math. Soc.*, 46(1):155-156, 1974.

- あまり知られていないと思われるが、Schrijver ABC では（主張なしで）引用されている
- いくつかの論文において、強基対応合が仮定されているものの、
Greene の交換性しか使用していないため、仮定を外せる結果がある

抱き合わせ交換性

抱き合わせ交換性 (この講義では)

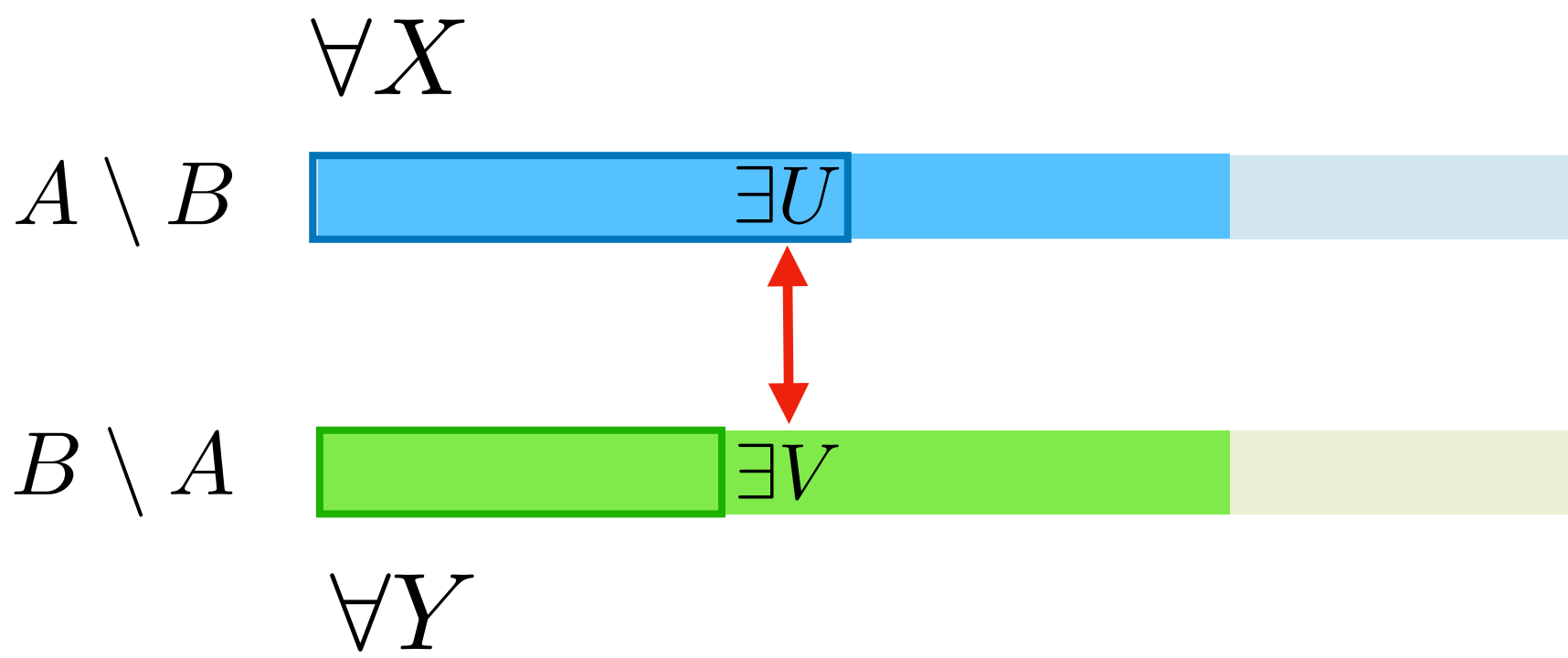
※ 上界 $|X + Y|$ は $X + Y$ の階数に改善可能
[O.-Schwarcz '26]

$\forall A, B \in \mathcal{B}$

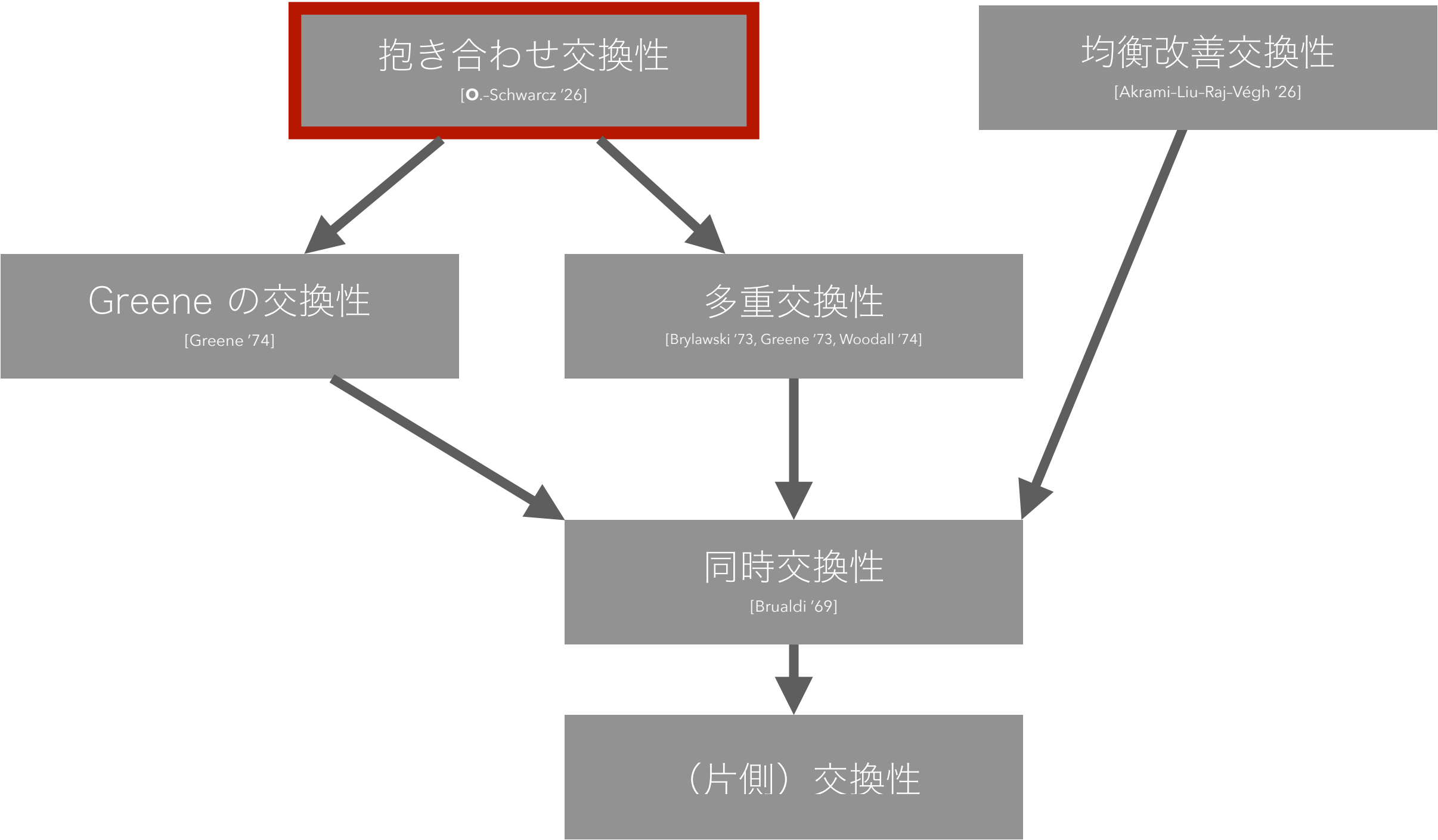
$\forall X \subseteq A \setminus B, Y \subseteq B \setminus A$

$\exists U \subseteq A \setminus B, V \subseteq B \setminus A \quad \text{s.t.} \quad X \subseteq U, Y \subseteq V, |U| = |V| \leq |X + Y|$

$A - U + V, B + U - V \in \mathcal{B}$



観察：強基対応合性から従う



抱き合わせ交換性 | 応用

24 / 89

応用は多岐 … とは言えないが： **重みつき最適基問題に対する局所探索法の頑健性**

[Cf. 〇.-Sakaue '24]

$$\max_{B \in \mathcal{B}} \sum_{e \in B} w(e) \quad \left\langle w: E \rightarrow \mathbb{R} \right\rangle$$

$$B_0 \in \mathcal{B}$$

$$\text{for } t = 1, \dots, T$$

$$B_t \leftarrow B \in \mathcal{B} \text{ with } |B \setminus B_{t-1}| \leq 1$$

- 各反復での移動が局所的に最適 ($B_t \in \arg \max \{ w(B) \mid B \in \mathcal{B}, |B \setminus B_{t-1}| \leq 1 \} \quad \forall t$)

なら $B_T \in \arg \max \{ w(B) \mid B \in \mathcal{B}, |B \setminus B_0| \leq T \}$ [Shioura '22]

- そうでない場合でも,

$$\underbrace{\max \{ w(B) \mid B \in \mathcal{B}, |B \setminus B_0| \leq T \} - w(B_T)}_{\text{最終出力の suboptimality}} \leq \sum_{t=1}^T \underbrace{(\max \{ w(B) \mid B \in \mathcal{B}, |B \setminus B_{t-1}| \leq 1 \} - w(B_{t-1}))}_{\text{第 } t \text{ 反復での局所探索の suboptimality}}$$

この証明に、抱き合わせ交換性の $|X| = |Y| = 1$ の場合を使える [〇.-Schwarcz '26]

抱き合わせ交換性 | 後日談

25 / 89

抱き合わせ交換性の $|X| = |Y| = 1$ の場合

$$\begin{aligned} & \forall x \in A \setminus B, y \in B \setminus A \exists e \in A \setminus B, f \in B \setminus A \\ \text{s.t. } & A - \{x, e\} + \{y, f\}, B + \{x, e\} - \{y, f\} \in \mathcal{B} \end{aligned} \quad \times (e, f) = (x, y) \text{ を許容}$$

後日, この特殊ケースは同時交換性から従うことが判明 ✓ 演習問題 3

一般の抱き合わせ交換性の応用が見つからず悩んでいたが...

均衡改善交換性

26 / 89

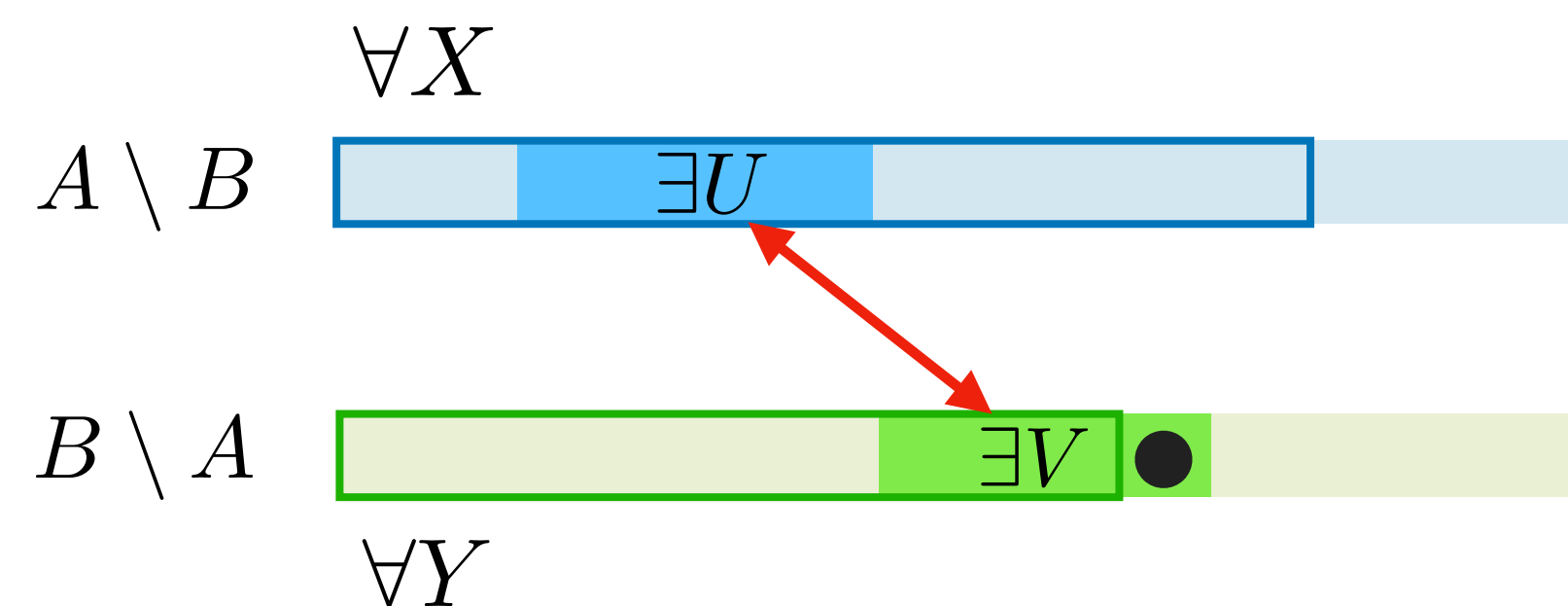
均衡改善交換性（この講演では）

[Akrami-Liu-Raj-Végh '26]

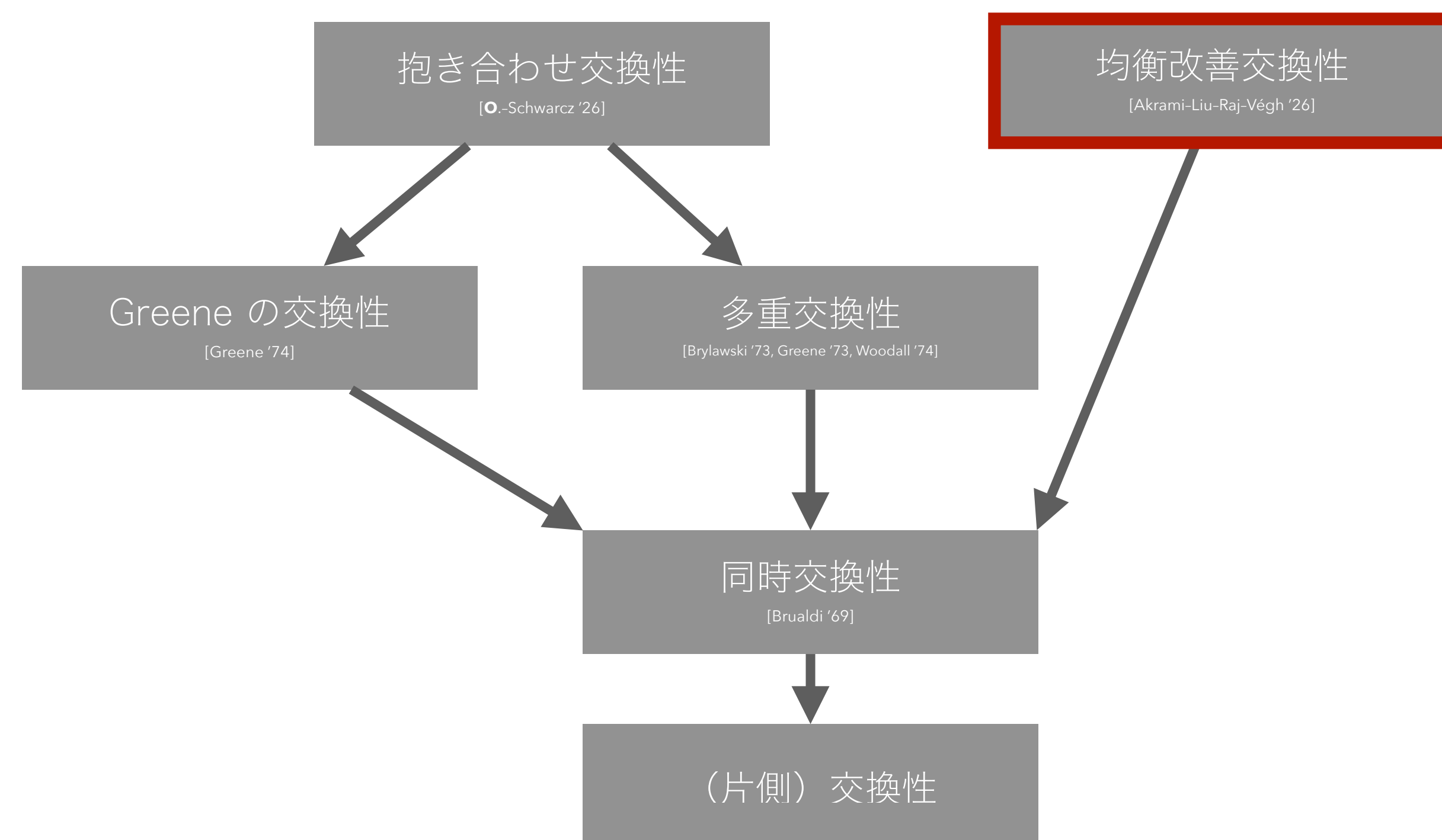
$$\forall A, B \in \mathcal{B} \quad \forall X \subseteq A \setminus B, Y \subseteq B \setminus A \quad \text{with} \quad |X| > |Y|$$

$$\exists U \subseteq X, V \subseteq B \setminus A \quad \text{s.t.} \quad |V \setminus Y| = 1$$

$$A - U + V, B + U - V \in \mathcal{B}$$



観察：弱基対応合性から従う



均衡改善交換性 | 応用・着想

27 / 89

均等性定理 (Equitability Theorem)

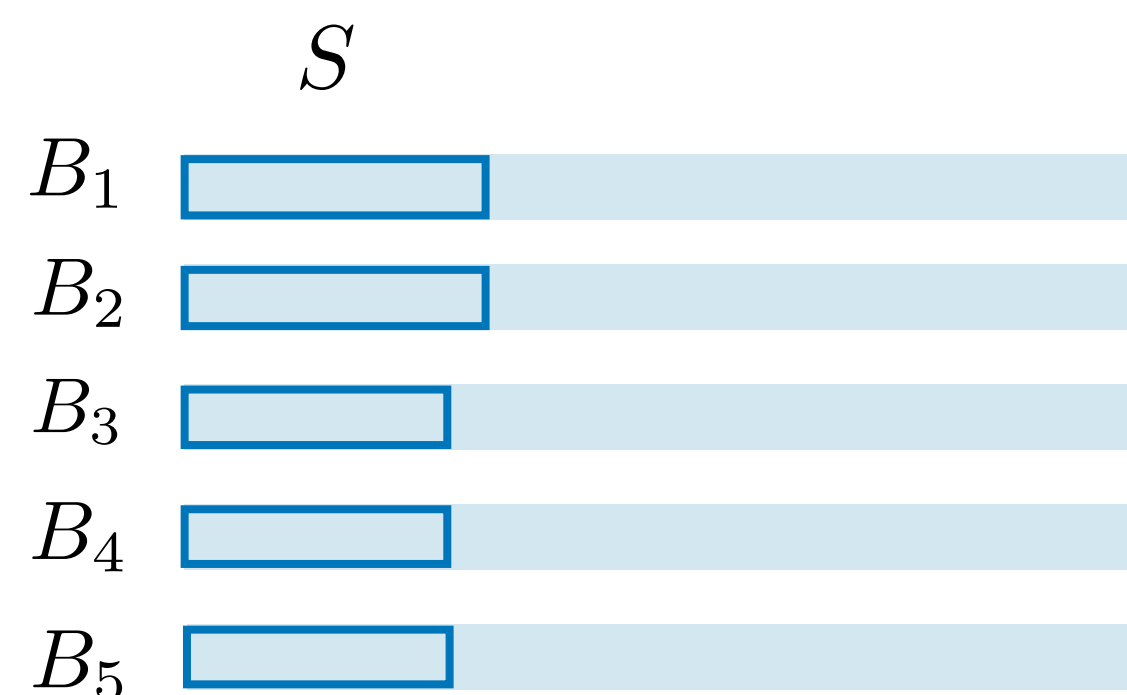
[Akrami-Liu-Raj-Végh '26]

マトロイドの台集合 E は k 個の基に分割可能であるとする.

このとき, 任意の $S \subseteq E$ に対し, ある E の k 個の基への分割 $\{B_1, \dots, B_k\}$ が存在し,

$$\left\lfloor \frac{|S|}{k} \right\rfloor \leq |B_i \cap S| \leq \left\lceil \frac{|S|}{k} \right\rceil \quad (\forall i \in \{1, \dots, k\})$$

- [Fekete-Szabó '11] により予想 $\rightarrow$ 14 年後に**均衡改善交換性**の証明を通して解決



均衡改善交換性 | 応用・着想

28/89

均等性定理 (Equitability Theorem)

[Akrami-Liu-Raj-Végh '26]

マトロイドの台集合 E は k 個の基に分割可能であるとする。

このとき、任意の $S \subseteq E$ に対し、ある E の k 個の基への分割 $\{B_1, \dots, B_k\}$ が存在し、

$$\left\lfloor \frac{|S|}{k} \right\rfloor \leq |B_i \cap S| \leq \left\lceil \frac{|S|}{k} \right\rceil \quad (\forall i \in \{1, \dots, k\})$$

公平配分と深い関係：

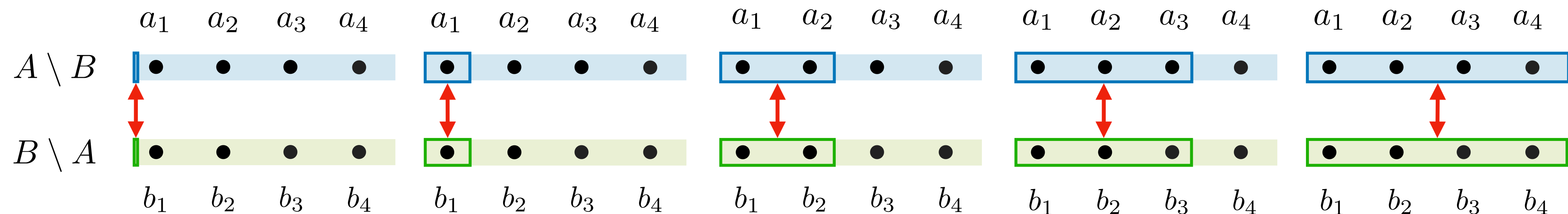
不可分財の分割において、

均等性定理 $\iff$ 全エージェントが同一・加法的・二値評価関数を持っている場合に、
マトロイド制約下で EF1 配分が存在

Gabow 予想

[Gabow '76]

$\forall A, B \in \mathcal{B} \quad \exists a_1, \dots, a_r : A \setminus B \text{ の順序付け } \exists b_1, \dots, b_r : A \setminus B \text{ の順序付け}$
s.t. $A - \{a_1, \dots, a_i\} + \{b_1, \dots, b_i\}, B + \{a_1, \dots, a_i\} - \{b_1, \dots, b_i\} \in \mathcal{B} \quad (\forall i \in \{0, \dots, r\})$



- 一般のマトロイドでは未解決. 正則マトロイドでは成立 [Bérczi-Mátravölgyi-Schwarcz '26]
- Gabow 予想を仮定すると, 同一・ (一般の) 加法的評価関数における
マトロイド制約下の EF1 配分の存在が導かれる [Akrami-Liu-Raj-Végh '26]

White 予想

[White '80]

$$\forall A, B, A', B' \in \mathcal{B} \text{ s.t. } A \cap B = A' \cap B', A \cup B = A' \cup B'$$

$$\exists \ell \geq 0 \exists A_0, B_0, A_1, B_1, \dots, A_\ell, B_\ell \in \mathcal{B}$$

$$\text{s.t. } (A_0, B_0) = (A, B) \quad (A_\ell, B_\ell) = (A', B')$$

$$\exists x_i \in A_{i-1} \setminus B_{i-1}, y_i \in B_{i-1} \setminus A_{i-1}$$

$$\text{with } A_i = A_{i-1} - x_i + y_i, B_i = B_{i-1} + x_i - y_i \quad (\forall i \in [\ell])$$

- Gabow 予想 $\iff (A', B') = (B, A)$ で $\ell = |A \setminus B|$ (最短距離) を要求する場合
- 正則マトロイドでは成立 [Bérczi-Mátravölgyi-Schwarcz '26]
- 最近, 二進マトロイド ($\mathbb{F}_2$ 上表現されるマトロイド) で反例が見つかった [Larson '26]

一時限目のまとめ

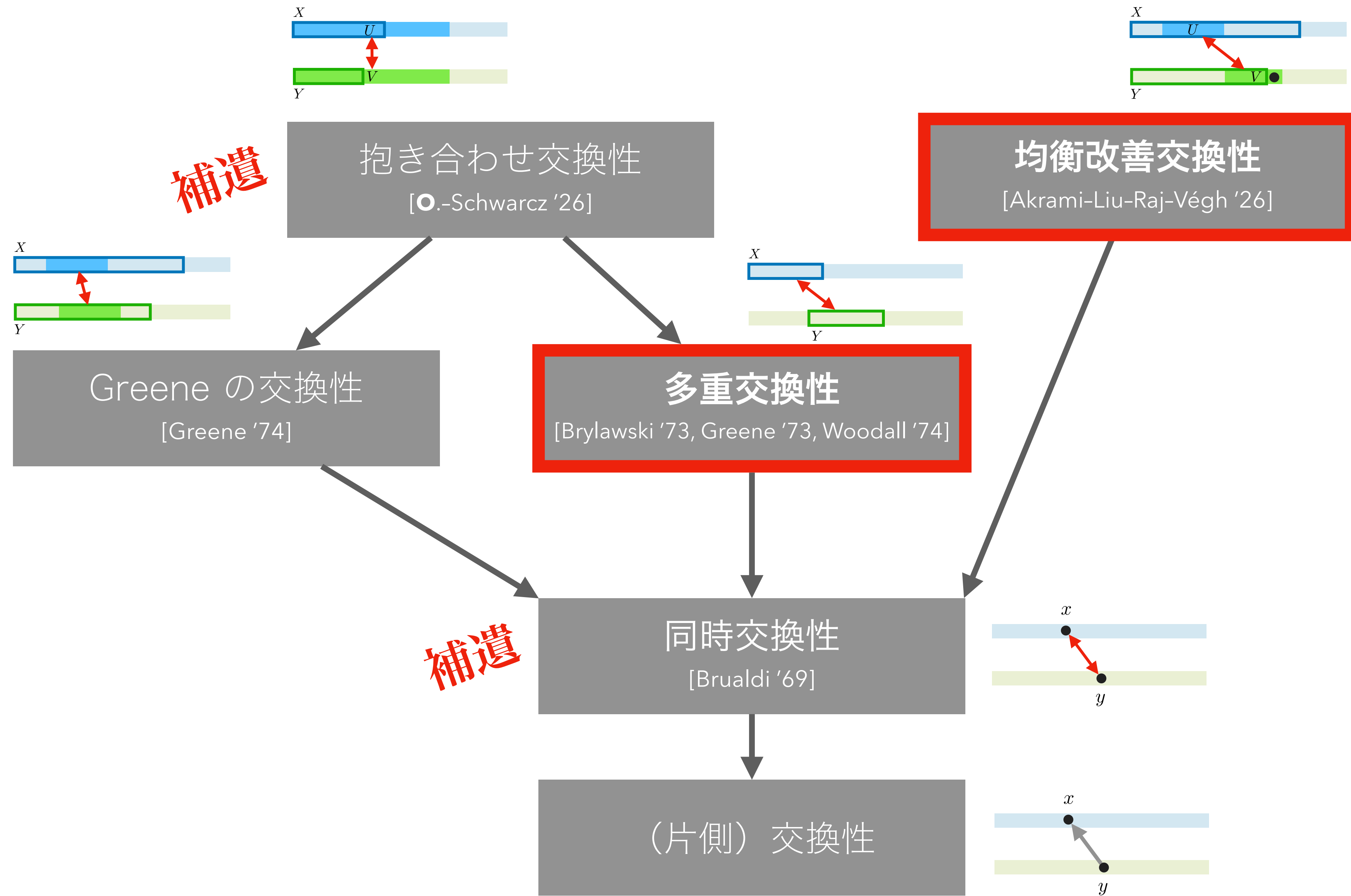
31 / 89

- マトロイドの基族は様々な交換性をもつ
- アルゴリズムの解析や公平配分への応用がある
- マトロイドの様々な予想と関連する
- 交換性を知っていると、余分な仮定を外せることがある
- マトロイドの交換性（に限らず、マトロイドの一般の性質）を示す際に基対応合性から従うか・ K_4 で成立するか、をまず考えるのは有効

証明のアプローチ



時限目



均衡改善交換性（再掲）

34 / 89

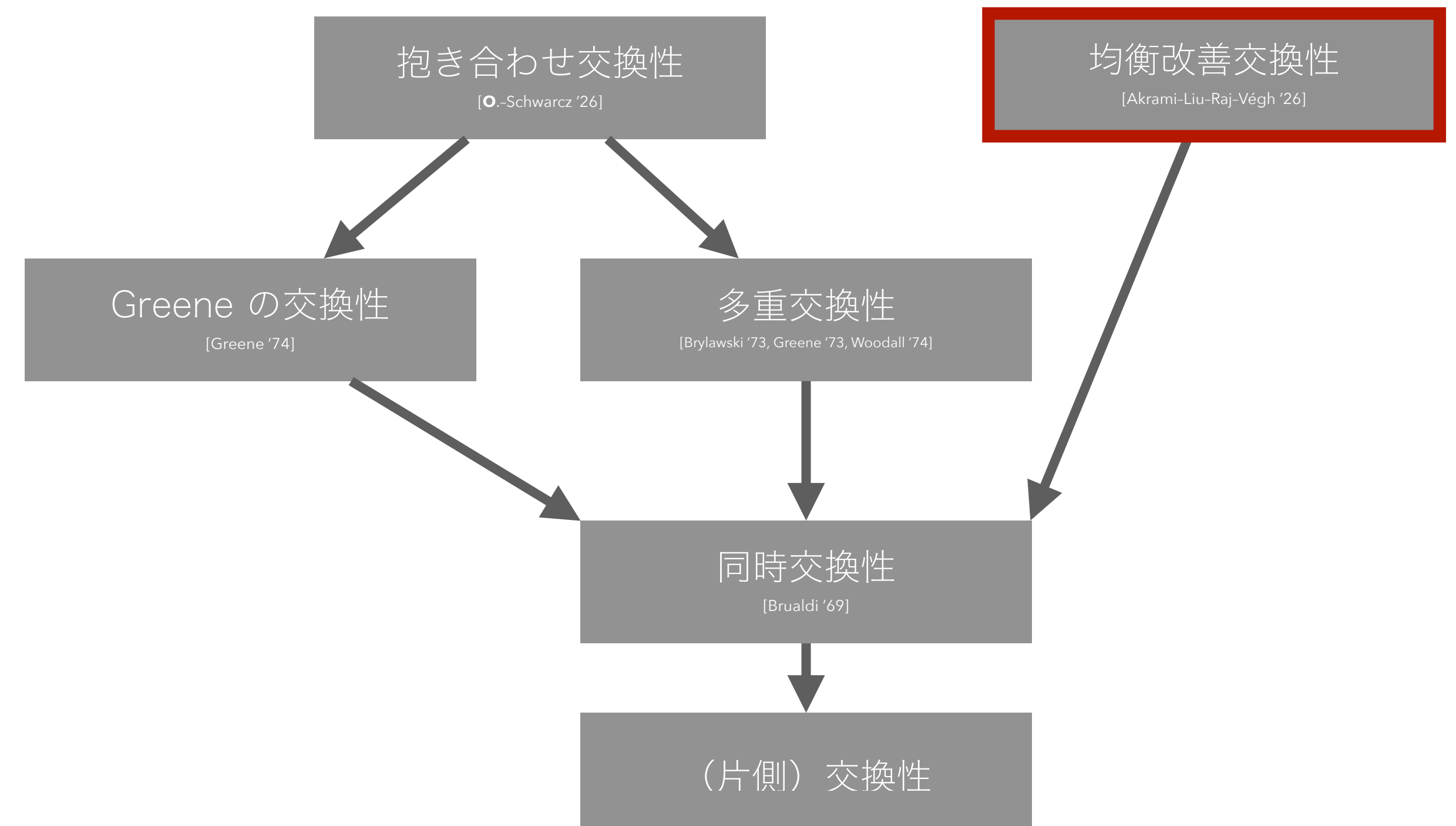
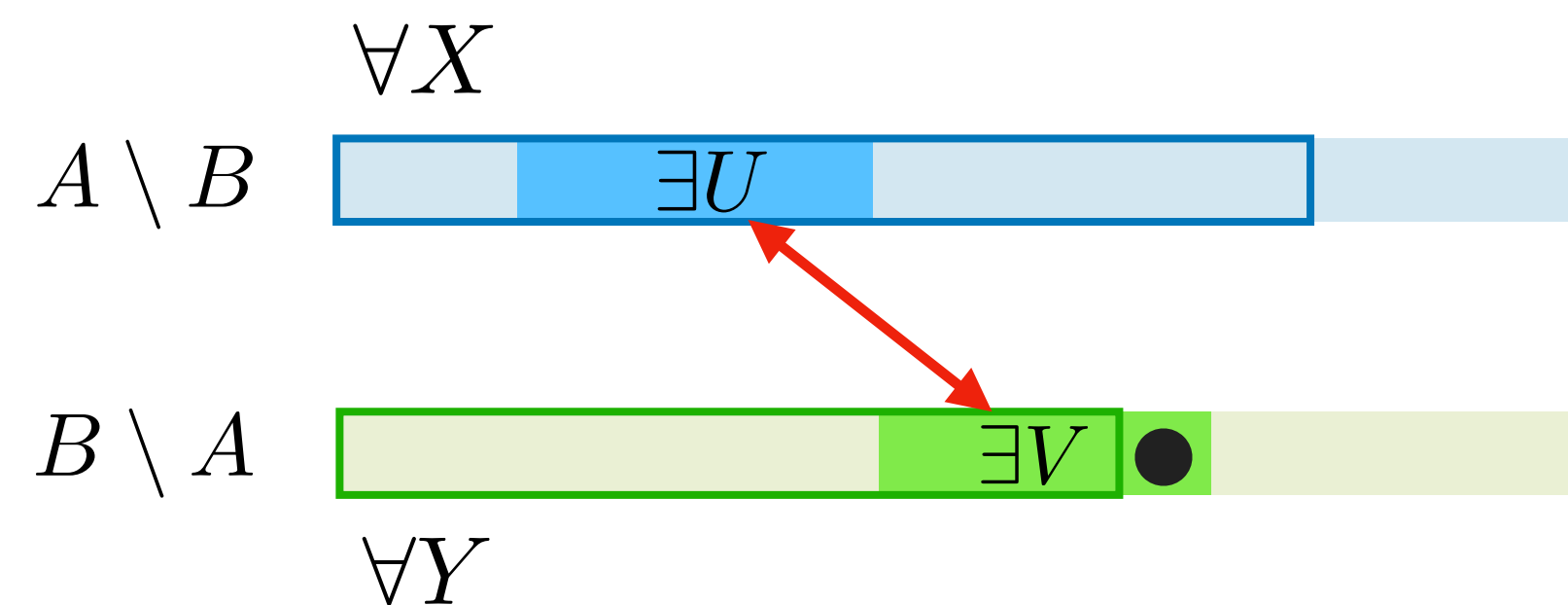
均衡改善交換性（この講演では）

[Akrami-Liu-Raj-Végh '26]

$$\forall A, B \in \mathcal{B} \quad \forall X \subseteq A \setminus B, Y \subseteq B \setminus A \quad \text{with} \quad |X| > |Y|$$

$$\exists U \subseteq X, V \subseteq B \setminus A \quad \text{s.t.} \quad |V \setminus Y| = 1$$

$$A - U + V, B + U - V \in \mathcal{B}$$



マトロイドの基礎事項① | 階数関数

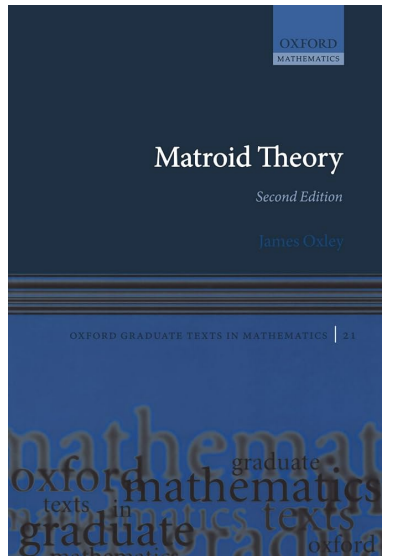
$\mathbf{M} = (E, \mathcal{B})$: マトロイド

$I \subseteq E$ が ^{independent} **独立** $\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists B \in \mathcal{B}$ s.t. $I \subseteq B$ ^{dependent} 独立でない集合を **従属** という

$S \subseteq E$ の ^{rank} **階数** $r(S) := \max\{ |I| \mid I \subseteq S, I \text{ is independent} \}$

- $r(S) \leq |S|$
- $S \subseteq T \implies r(S) \leq r(T)$ (単調性)
- $r(S) + r(T) \geq r(S \cap T) + r(S \cup T)$ (劣モジュラ性)

※ これらはマトロイドの階数関数を特徴づける (cryptomorphism)



Matroid Theory
(J. Oxley '11)

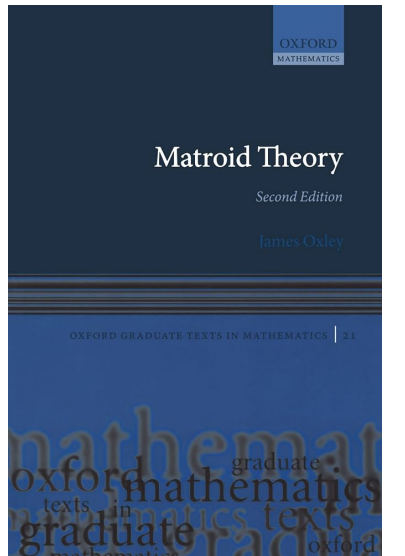
マトロイドの基礎事項② | 閉包

$\mathbf{M} = (E, \mathcal{B})$: マトロイド

$S \subseteq E$ の ^{closure} **閉包** $\text{cl}(S) := \{ e \in E \mid r(S \cup \{e\}) = r(S) \}$

- $S \subseteq \text{cl}(S)$ (拡大性)
- $S \subseteq T \implies \text{cl}(S) \subseteq \text{cl}(T)$ (単調性)
- $\text{cl}(\text{cl}(S)) = \text{cl}(S)$ (冪等性)
- $y \in \text{cl}(S \cup \{x\}) - \text{cl}(S) \implies x \in \text{cl}(S \cup \{y\})$

※ これらはマトロイドの閉包作用素を特徴づける (cryptomorphism)



Matroid Theory
(J. Oxley '11)

閉包は階数を保つ

37 / 89

補題 1

$$r(S) = r(\text{cl}(S)) \quad (S \subseteq E)$$

∴ $I \subseteq S$ を S の極大独立集合とする. 各 $e \in \text{cl}(S) - S$ に対し,

閉包の定義

I は独立

$$r(I + e) \leq r(S + e) = r(S) = |I| = r(I) \leq r(I + e)$$

階数の単調性

階数の定義

階数の単調性

より, $r(I + e) = |I| < |I + e|$ なので, $I + e$ は従属.

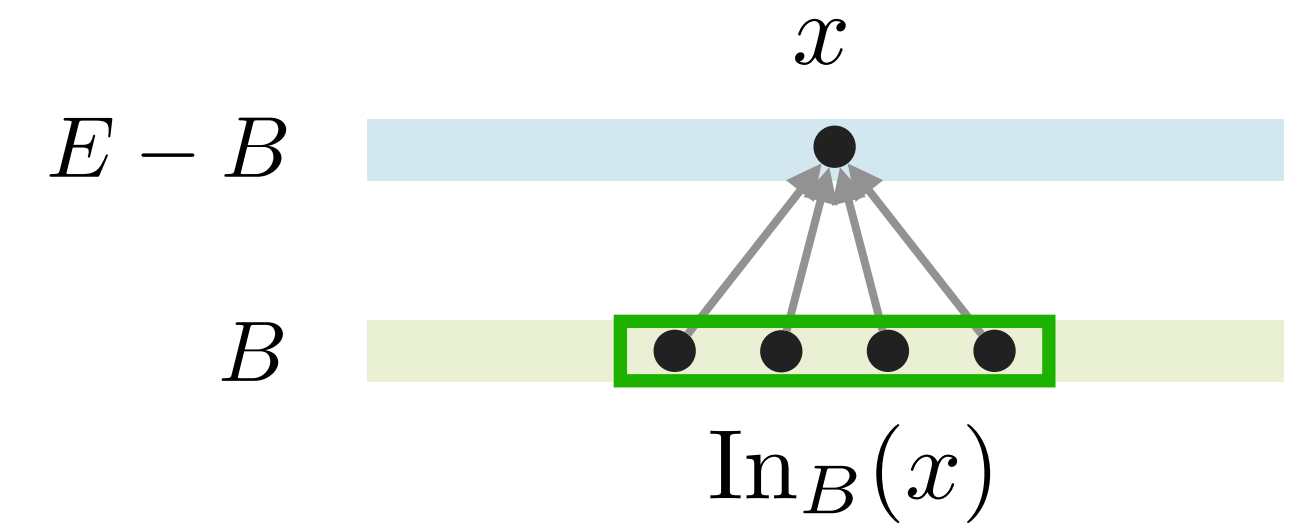
すなわち, I は $\text{cl}(S)$ における極大独立集合でもあるため, $r(\text{cl}(S)) = |I| = r(S)$ □

基本サーキット補題

38/89

$$B \in \mathcal{B}, \quad x \in E - B$$

$$\text{In}_B(x) := \{y \in B \mid B + x - y \in \mathcal{B}\} \quad \text{※一般的な記法ではない}$$

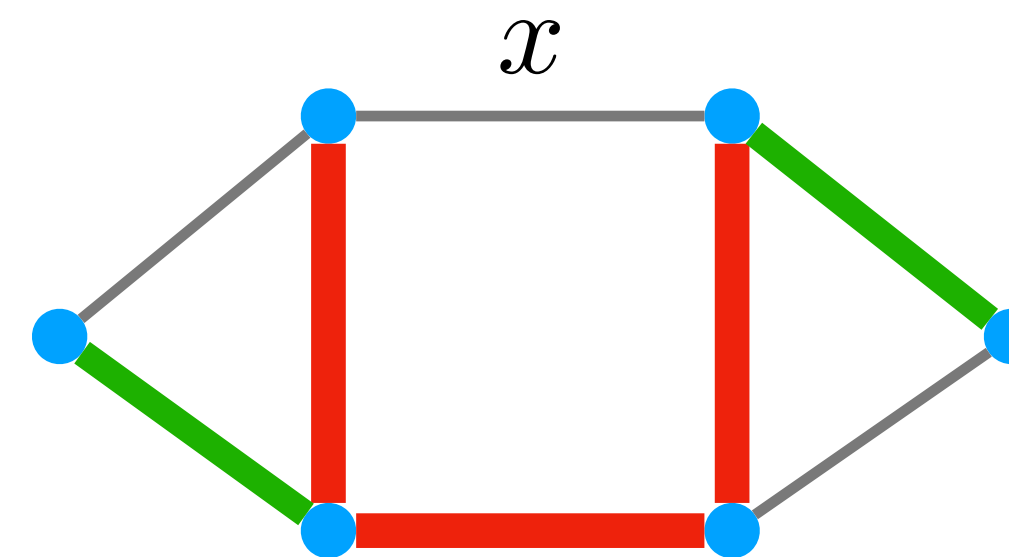
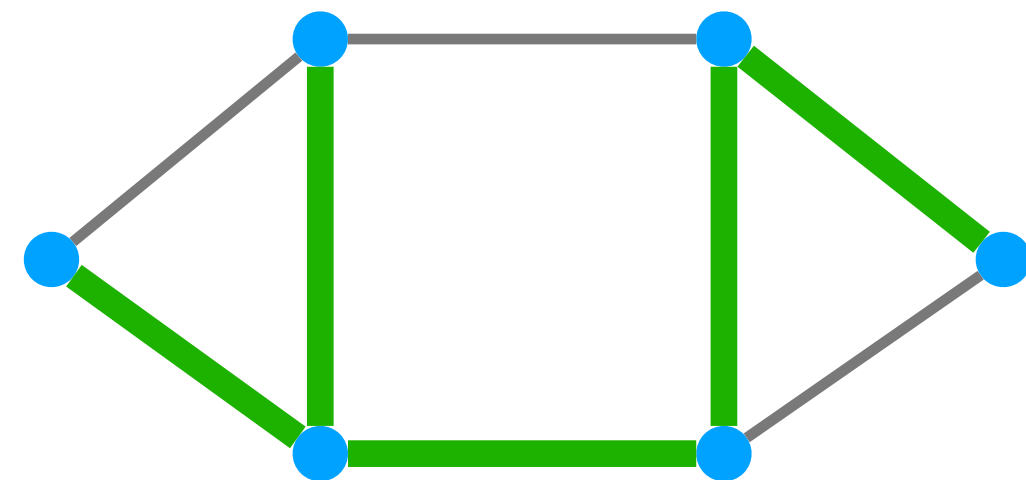


補題2 (基本サーキット補題) ※一般的な名称ではない

$$x \in \text{cl}(\text{In}_B(x))$$

fundamental circuit

※ $\text{In}_B(x) + x$ は B における x の**基本サーキット**とよばれる

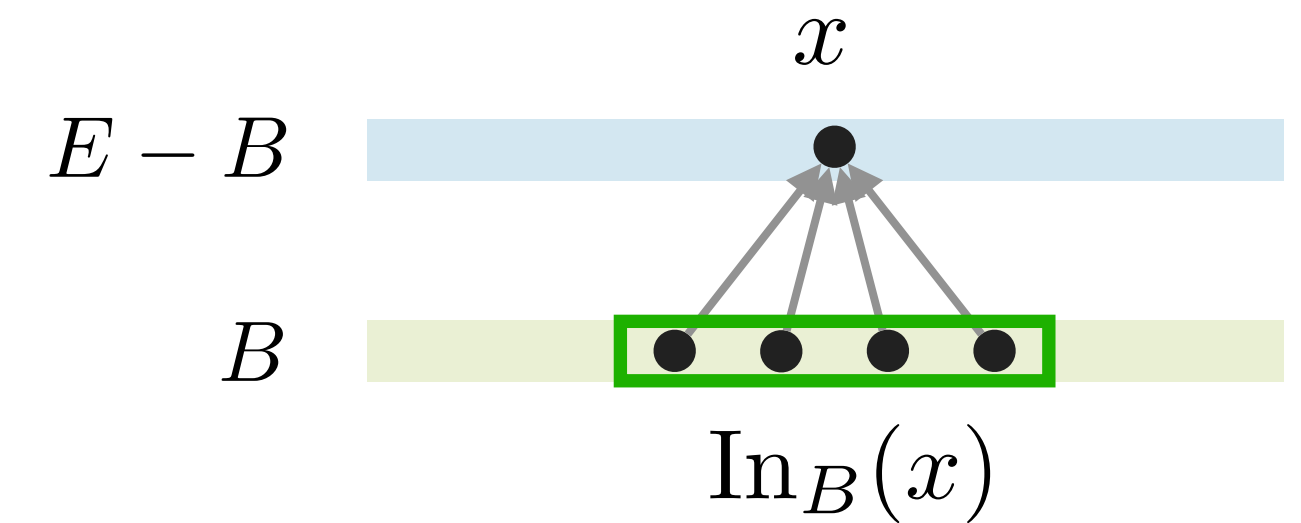


基本サーキット補題

39 / 89

$$B \in \mathcal{B}, \quad x \in E - B$$

$$\text{In}_B(x) := \{ y \in B \mid B + x - y \in \mathcal{B} \} \quad \text{※一般的な記法ではない}$$



補題2 (基本サーキット補題) ※一般的な名称ではない

$$x \in \text{cl}(\text{In}_B(x))$$

⊙ **背理法** : $x \notin \text{cl}(\text{In}_B(x))$ を仮定. B は基なので, $x \in \text{cl}(B)$.

(1/2) $\text{In}_B(x)$ から B まで元を一つずつ追加する列は, どこかで x を閉包に含む

つまり, ある S ($\text{In}_B(x) \subseteq S \subseteq B$) と $y \in B - S$ が存在し, $x \in \text{cl}(S + y) - \text{cl}(S)$

$$y \in \text{cl}(S + x) \subseteq \text{cl}(B - y + x)$$

閉包の性質 4 つ目

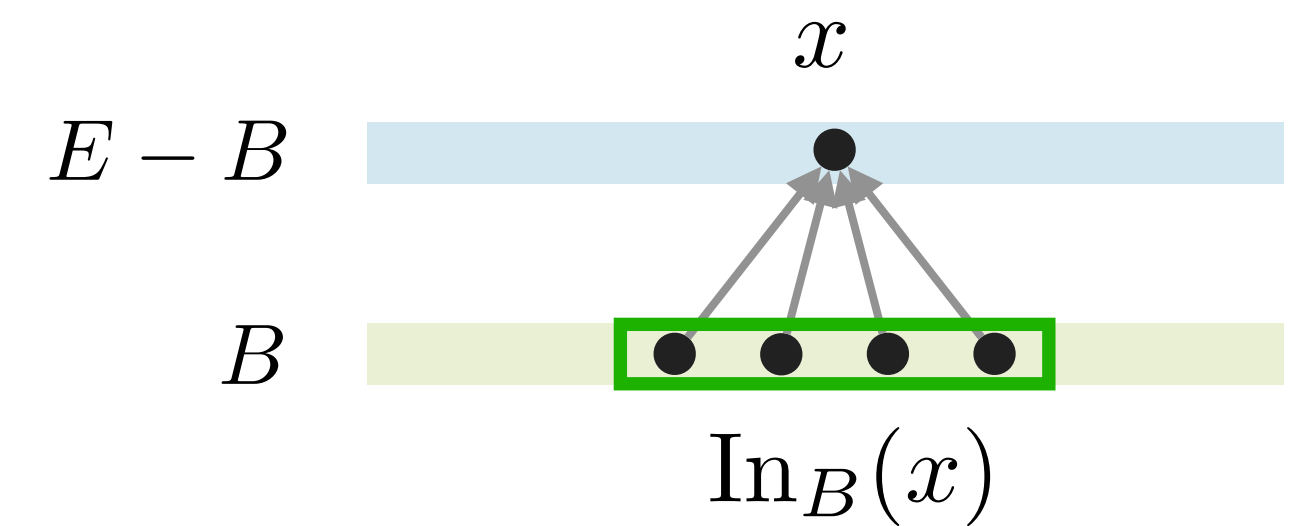
閉包の単調性

基本サーキット補題

40/89

$$B \in \mathcal{B}, \quad x \in E - B$$

$$\text{In}_B(x) := \{y \in B \mid B + x - y \in \mathcal{B}\} \quad \text{※一般的な記法ではない}$$



補題2 (基本サーキット補題) ※一般的な名称ではない

$$x \in \text{cl}(\text{In}_B(x))$$

∴ これと $B - y \subseteq \text{cl}(B - y) \subseteq \text{cl}(B - y + x)$ をあわせると $B \subseteq \text{cl}(B - y + x)$

(2/2)

拡大性 単調性

よって $r(B) \leq r(\text{cl}(B - y + x)) = r(B - y + x)$ から, $B - y + x \in \mathcal{B}$

単調性

補題1

すなわち $y \in \text{In}_B(x) \subseteq S$ だが, これは $y \notin S$ に矛盾



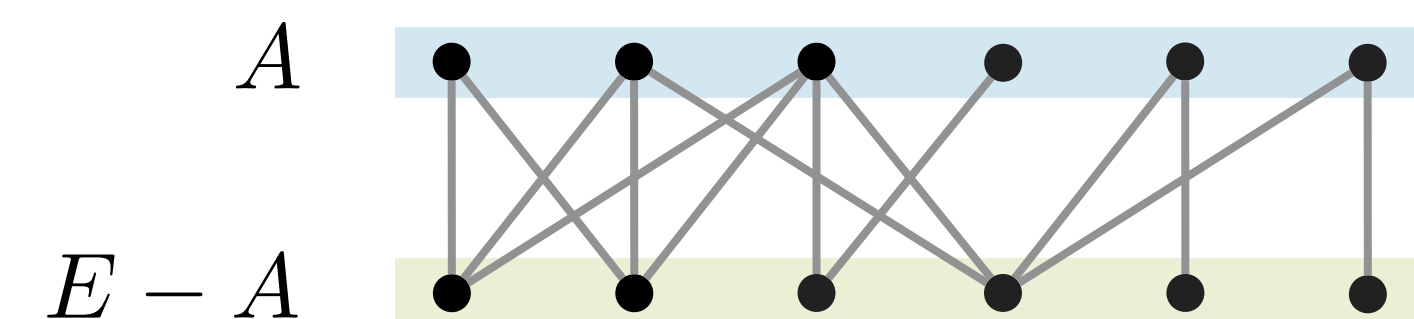
一意マッチング補題

41 / 89

exchangeability graph

$A \subseteq E$ の交換可能性グラフ $G(A)$ を以下で定義：

- 頂点集合 E
- 辺集合 $\{ \{x, y\} \mid x \in A, y \in E - A, A - x + y \in \mathcal{B} \}$



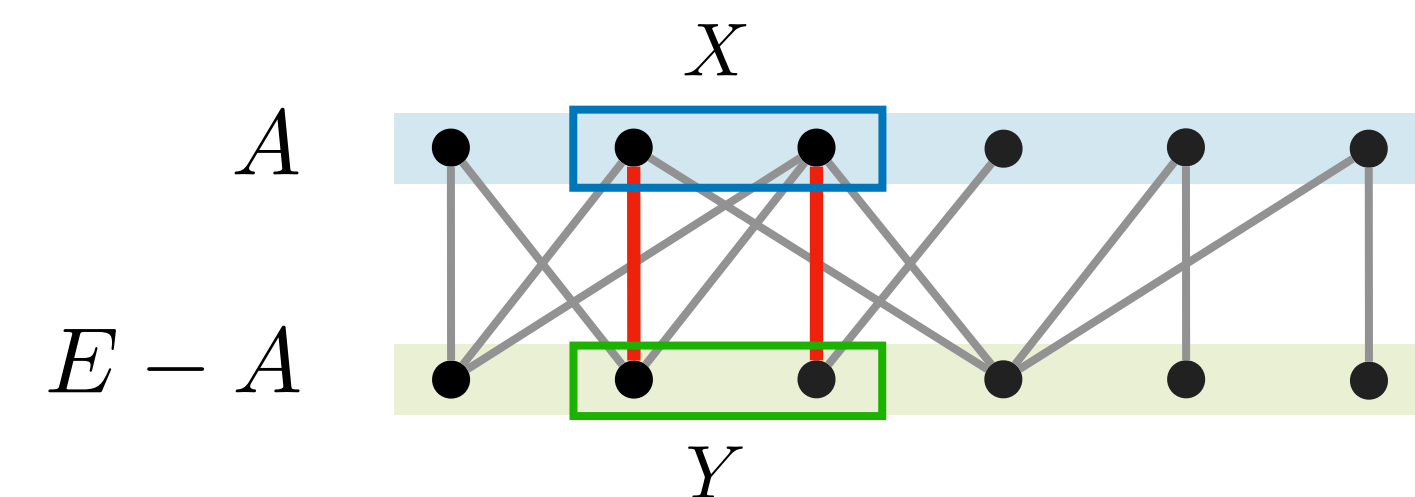
補題3 (一意マッチング補題)

[Krogdahl '74, '76, '77]

$$A \in \mathcal{B}, X \subseteq A, Y \subseteq E - A$$

誘導部分グラフ $G(A)[X + Y]$ に完全マッチングが**唯一**存在 $\implies A - X + Y \in \mathcal{B}$

∴ 帰納法 + 基本サーキット補題 (詳細は補遺) $\square$



均衡改善交換性の証明に向けて

42 / 89

$(A_1, A_2) : A \in \mathcal{B}$ の二分割 $(B_1, B_2) : B \in \mathcal{B}$ の二分割 $(A \cap B = \emptyset)$

補題 4

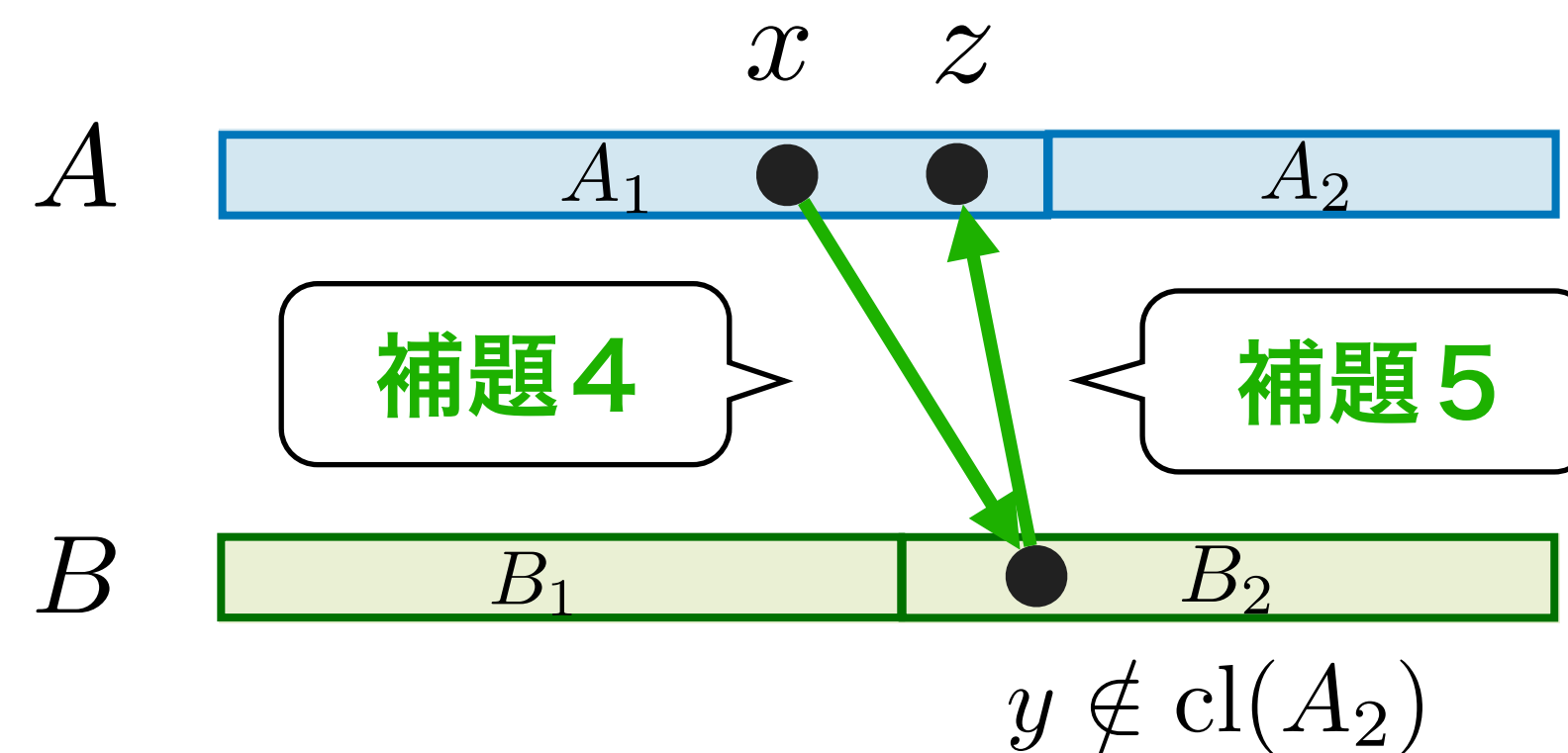
[Akrami-Liu-Raj-Végh '26]

$$\forall y \in B \setminus \text{cl}(A_2) \quad \exists x \in A_1 \quad \text{s.t.} \quad A - x + y \in \mathcal{B}$$

補題 5 仮定 : $|A_1| > |B_1|$

[Akrami-Liu-Raj-Végh '26]

$$\exists y \in B_2 \setminus \text{cl}(A_2) \quad \exists z \in A_1 \quad \text{s.t.} \quad B - y + z \in \mathcal{B}$$



均衡改善交換性の証明に向けて

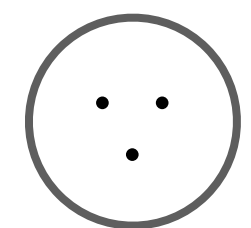
43 / 89

$(A_1, A_2) : A \in \mathcal{B}$ の二分割 $(B_1, B_2) : B \in \mathcal{B}$ の二分割 $(A \cap B = \emptyset)$

補題4

[Akrami-Liu-Raj-Végh '26]

$$\forall y \in B \setminus \text{cl}(A_2) \quad \exists x \in A_1 \quad \text{s.t.} \quad A - x + y \in \mathcal{B}$$



背理法：全ての $x \in A_1$ に対して $A - x + y \notin \mathcal{B}$ と仮定

$$\iff \text{In}_A(y) := \{x \in A \mid A - x + y \in \mathcal{B}\} \subseteq A_2$$

$y \in \text{cl}(\text{In}_A(y)) \subseteq \text{cl}(A_2)$ だが、これは $y \notin \text{cl}(A_2)$ に矛盾



基本サーキット補題

閉包の単調性

均衡改善交換性の証明に向けて

44 / 89

$(A_1, A_2) : A \in \mathcal{B}$ の二分割 $(B_1, B_2) : B \in \mathcal{B}$ の二分割 $(A \cap B = \emptyset)$

補題 5 $|A_1| > |B_1|$ を仮定

[Akrami-Liu-Raj-Végh '26]

$$\exists y \in B_2 \setminus \text{cl}(A_2) \quad \exists z \in A_1 \quad \text{s.t.} \quad B - y + z \in \mathcal{B}$$

⋮ **背理法** : 全ての $y \in B_2 \setminus \text{cl}(A_2), z \in A_1$ に対して $B - y + z \notin \mathcal{B}$ と仮定

$$\begin{aligned} (1/3) \quad \iff \text{In}_B(z) &:= \{ y \in B \mid B - y + z \in \mathcal{B} \} \subseteq B - (B_2 \setminus \text{cl}(A_2)) \\ &= B_1 + (\text{cl}(A_2) \cap B_2) \quad (\forall z \in A_1) \end{aligned}$$

基本サーキット補題

閉包の単調性

$$\implies z \in \text{cl}(\text{In}_B(z)) \subseteq \text{cl}(B_1 + (\text{cl}(A_2) \cap B_2)) \quad (\forall z \in A_1)$$

$$\text{より} \quad A_1 \subseteq \text{cl}(B_1 + (\text{cl}(A_2) \cap B_2))$$

均衡改善交換性の証明に向けて

45 / 89

$(A_1, A_2) : A \in \mathcal{B}$ の二分割 $(B_1, B_2) : B \in \mathcal{B}$ の二分割 $(A \cap B = \emptyset)$

補題 5 $|A_1| > |B_1|$ を仮定

[Akrami-Liu-Raj-Végh '26]

$$\exists y \in B_2 \setminus \text{cl}(A_2) \quad \exists z \in A_1 \quad \text{s.t.} \quad B - y + z \in \mathcal{B}$$

∴ $A = A_1 + A_2$

(2/3)
$$\begin{aligned} &\subseteq \text{cl}(B_1 + (\text{cl}(A_2) \cap B_2)) \cup A_2 \\ &\subseteq \text{cl}(B_1 + (\text{cl}(A_2) \cap B_2)) \cup \text{cl}(A_2) \\ &\subseteq \text{cl}((B_1 + (\text{cl}(A_2) \cap B_2)) \cup A_2) \\ &\subseteq \text{cl}(B_1 \cup \text{cl}(A_2)) \\ &= \text{cl}(B_1 + A_2) \end{aligned}$$

前スライド : $A_1 \subseteq \text{cl}(B_1 + (\text{cl}(A_2) \cap B_2))$

$$S \subseteq \text{cl}(S)$$

$$\text{cl}(S) \cup \text{cl}(T) \subseteq \text{cl}(S \cup T)$$

$(\text{cl}(A_2) \cap B_2) \cup A_2 \subseteq \text{cl}(A_2)$ & 閉包の単調性

✓ 演習問題 4 $\text{cl}(S \cup \text{cl}(T)) = \text{cl}(S \cup T)$

均衡改善交換性の証明に向けて

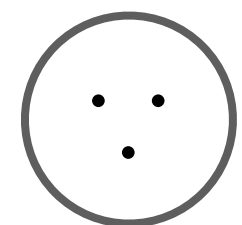
46 / 89

$(A_1, A_2) : A \in \mathcal{B}$ の二分割 $(B_1, B_2) : B \in \mathcal{B}$ の二分割 $(A \cap B = \emptyset)$

補題 5 $|A_1| > |B_1|$ を仮定

[Akrami-Liu-Raj-Végh '26]

$$\exists y \in B_2 \setminus \text{cl}(A_2) \quad \exists z \in A_1 \quad \text{s.t.} \quad B - y + z \in \mathcal{B}$$



(3/3)

$$|A| = r(A)$$

$$\leq r(\text{cl}(B_1 + A_2))$$

$$= r(B_1 + A_2)$$

$$\leq r(B_1) + r(A_2)$$

$$= |B_1| + |A_2|$$

仮定 :

$$|A_1| > |B_1|$$

$$< |A_1| + |A_2| = |A|$$

A は独立

前スライド : $A \subseteq \text{cl}(B_1 + A_2)$ & 階数関数の単調性

補題 1

階数関数の劣モジュラ性 (劣加法性)

B_1, A_2 は独立

より矛盾.



マトロイドの基礎事項③ | マイナー操作

47/89

$\mathbf{M} = (E, \mathcal{B})$: マトロイド

contraction

- $X \subseteq E$ による $\mathbf{M}$ の**縮約** $\mathbf{M} / X = (E \setminus X, \{B \setminus X \mid B \in \mathcal{B}, X \subseteq B\})$
(X の独立性を仮定)

deletion

- $Y \subseteq E$ による $\mathbf{M}$ の**削除** $\mathbf{M} \setminus Y = (E \setminus Y, \{B \in \mathcal{B} \mid B \cap Y = \emptyset\})$
(Y と交叉しない基の存在を仮定)

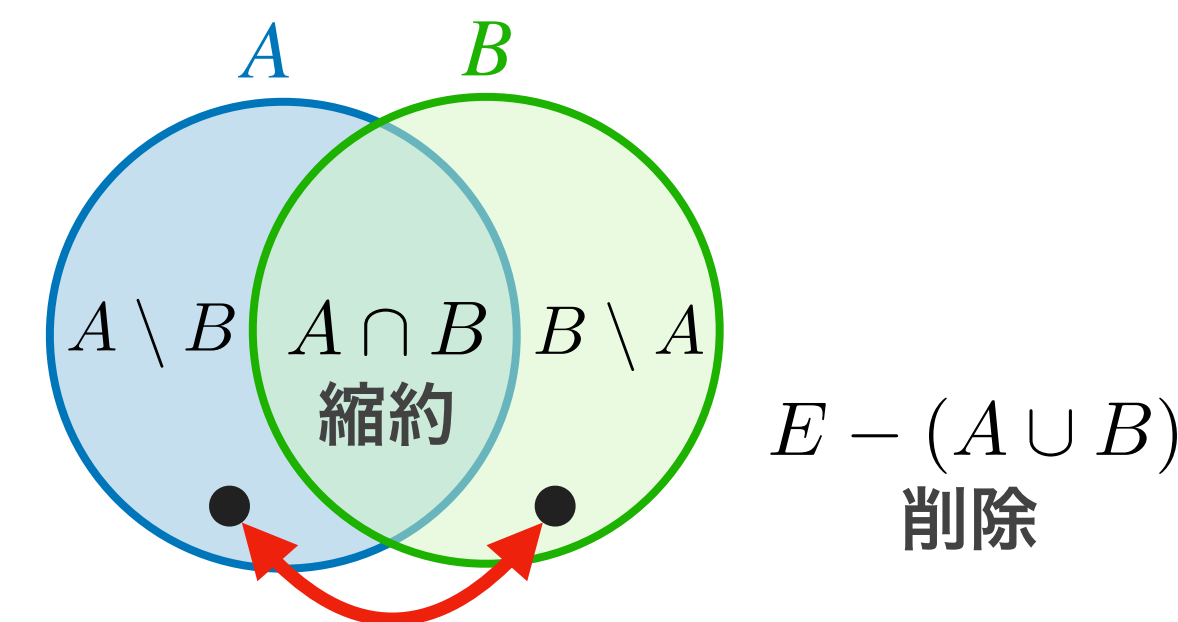
これらは再びマトロイドになる.

考察

基 $A, B \in \mathcal{B}$ に対する交換性を考えるときは,

$\mathbf{M} / (A \cap B) \setminus (E - (A \cup B))$ 上で証明すればいい

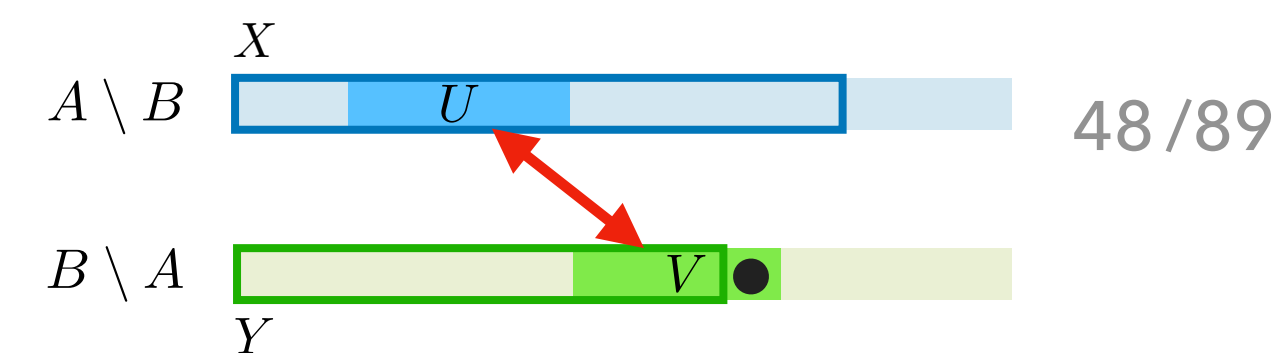
$\implies A \cap B = \emptyset, A + B = E$ を仮定してよい



※ 台集合を二つの基に分割できるマトロイドを**ブロックマトロイド**とよぶ

均衡改善交換性の証明

均衡改善交換性



[Akrami-Liu-Raj-Végh '26]

$$\forall A, B \in \mathcal{B} \quad \forall X \subseteq A \setminus B, Y \subseteq B \setminus A \quad \text{with} \quad |X| > |Y|$$

$$\exists U \subseteq X, V \subseteq B \setminus A \quad \text{s.t.} \quad |V \setminus Y| = 1, A - U + V, B + U - V \in \mathcal{B}$$

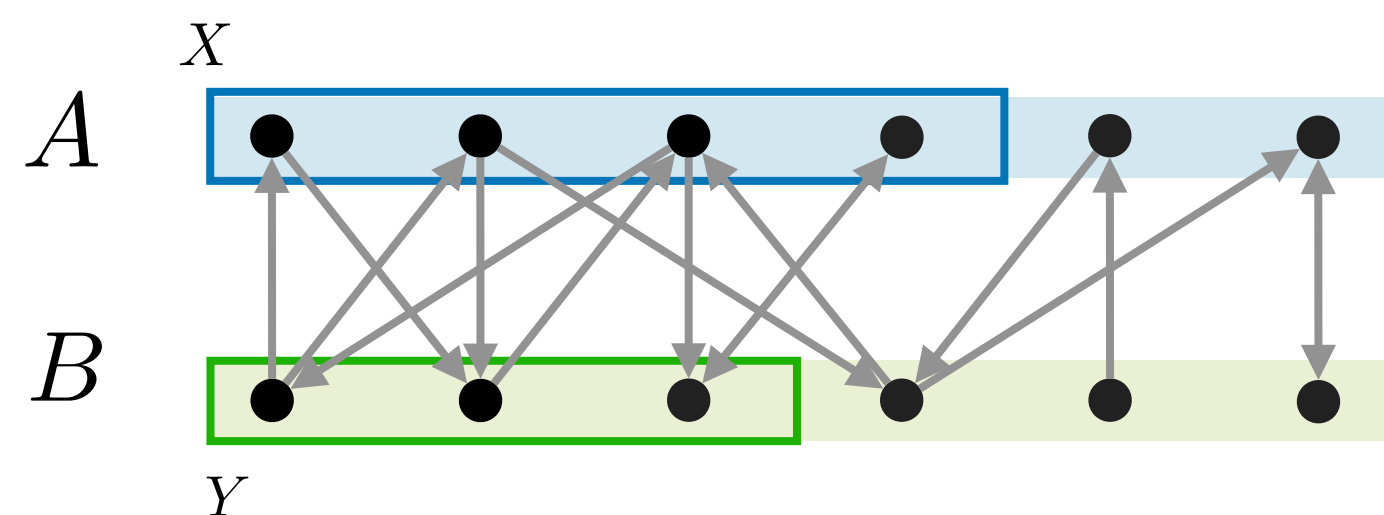
∴ $A \cap B$ を縮約, $E - (A \cup B)$ を削除することにより, $A \cap B = \emptyset, A + B = E$ を仮定してよい

(1/5) (A, B) を頂点分割とする有向二部グラフ $D = D(A, B)$ を, 以下の辺集合で定義:

$$\{ (x, y) \mid x \in A, y \in B, A - x + y \in \mathcal{B} \} \cup \{ (y, x) \mid x \in A, y \in B, B + x - y \in \mathcal{B} \}$$

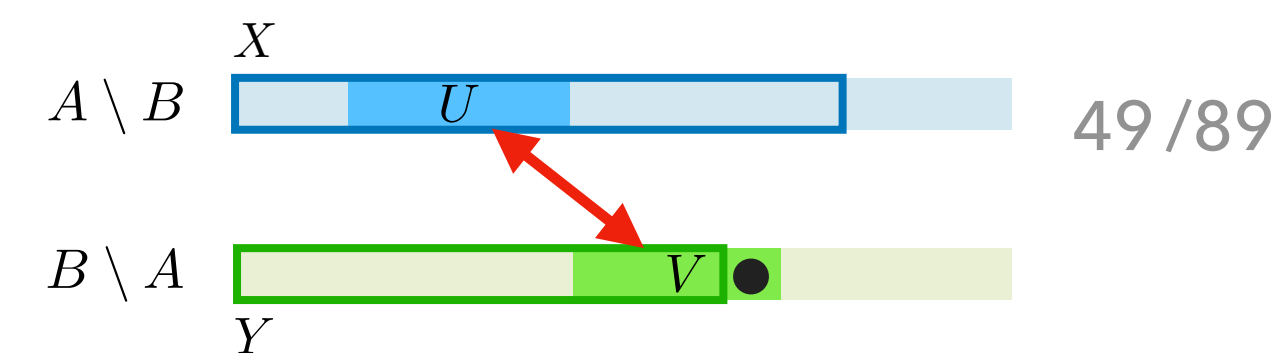
$G(A, B)$ の辺

$G(B, A)$ の辺



均衡改善交換性の証明

均衡改善交換性



[Akrami-Liu-Raj-Végh '26]

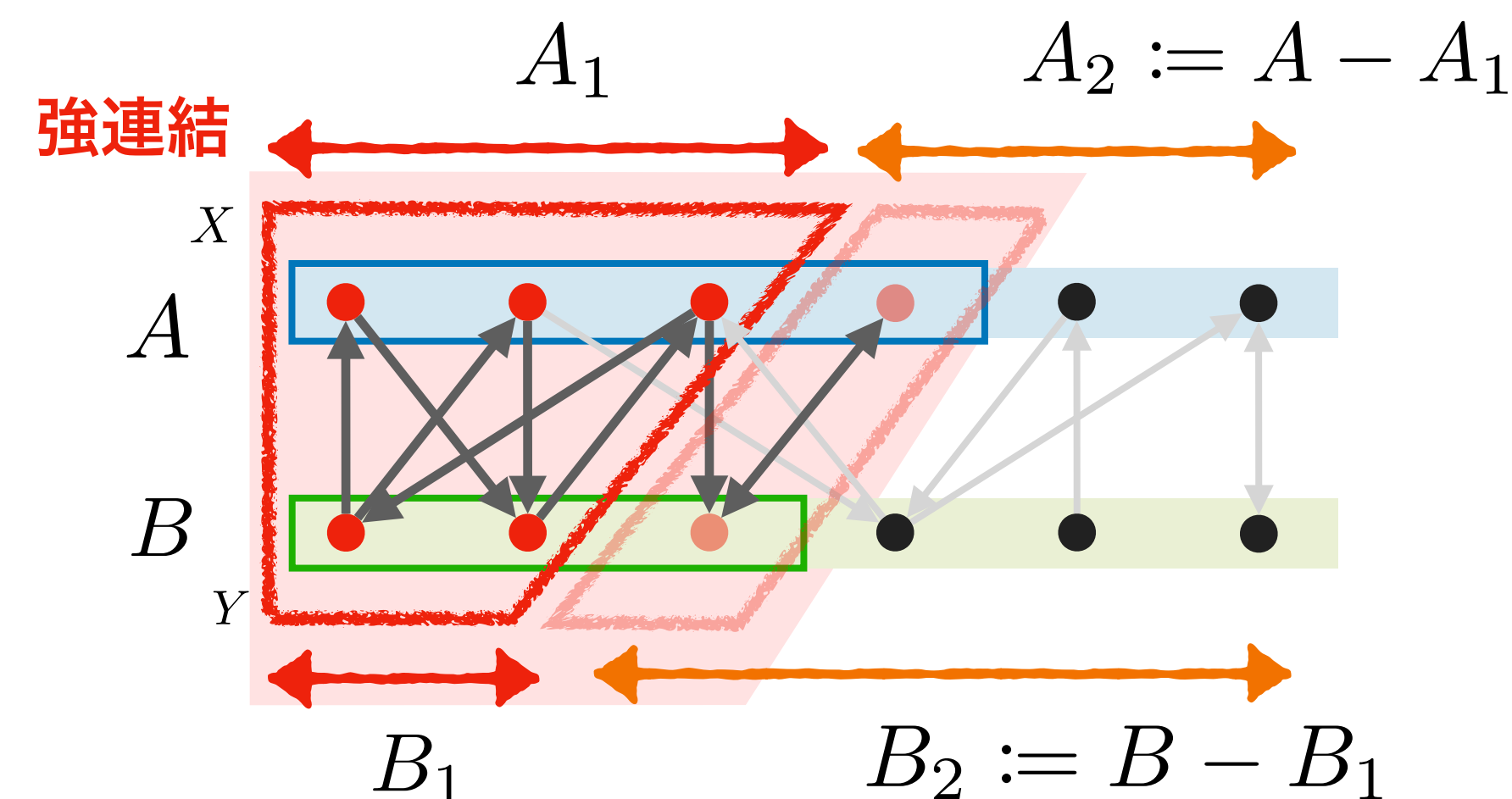
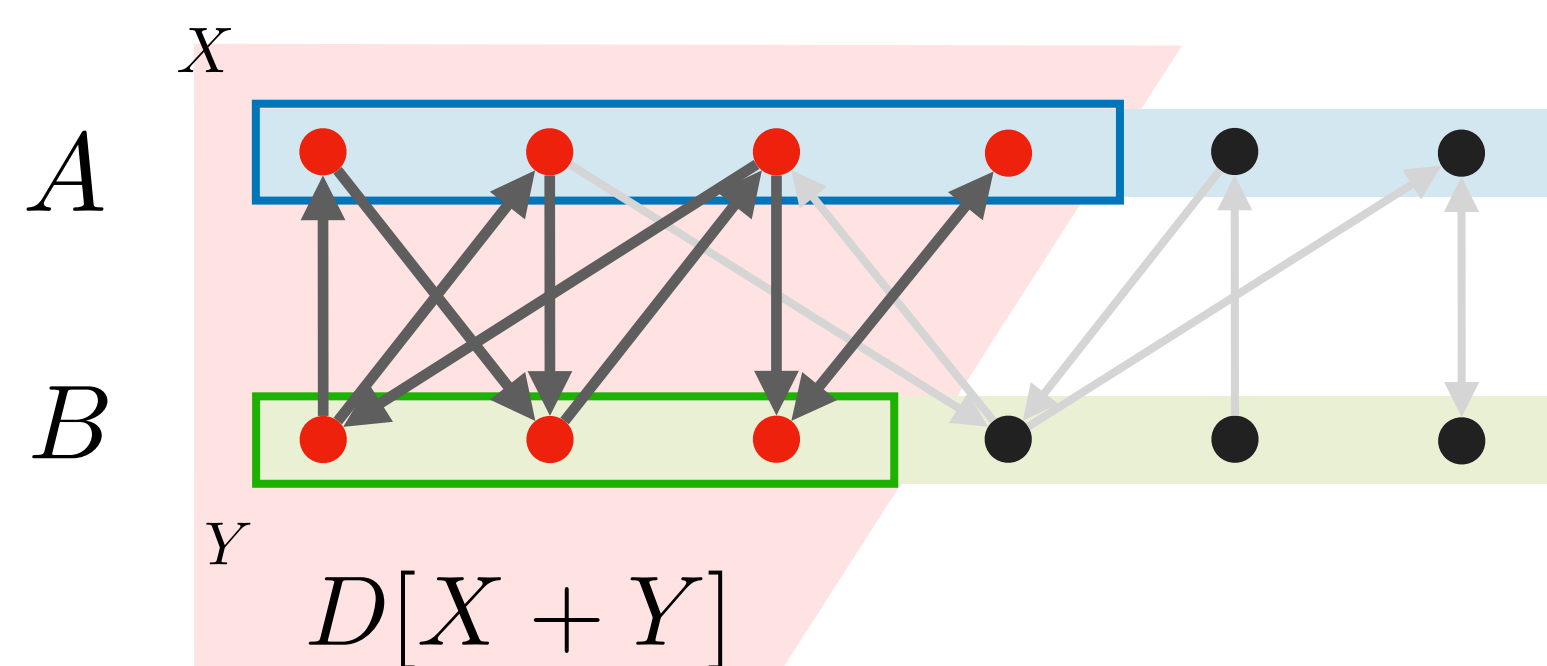
$$\forall A, B \in \mathcal{B} \quad \forall X \subseteq A \setminus B, Y \subseteq B \setminus A \quad \text{with} \quad |X| > |Y|$$

$$\exists U \subseteq X, V \subseteq B \setminus A \quad \text{s.t.} \quad |V \setminus Y| = 1, A - U + V, B + U - V \in \mathcal{B}$$

$\because$ $X + Y$ が誘導する部分グラフ $D[X + Y]$ の強連結成分 $K \subseteq X + Y$ であって,

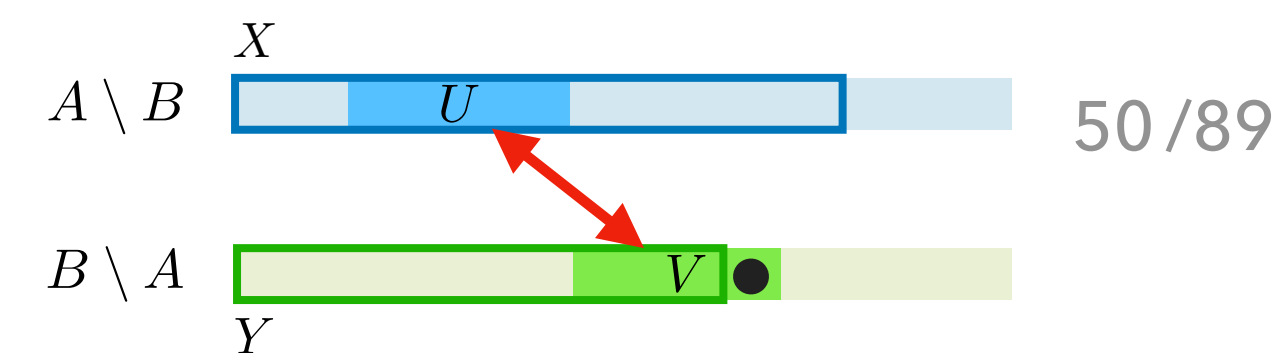
(2/5) $|X \cap K| > |Y \cap K|$ であるものをとる (仮定 $|X| > |Y|$ より存在)

$$=: A_1 \quad =: B_1$$



均衡改善交換性の証明

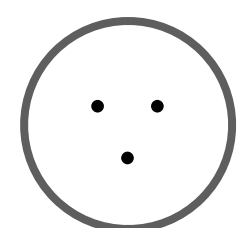
均衡改善交換性



[Akrami-Liu-Raj-Végh '26]

$$\forall A, B \in \mathcal{B} \quad \forall X \subseteq A \setminus B, Y \subseteq B \setminus A \quad \text{with} \quad |X| > |Y|$$

$$\exists U \subseteq X, V \subseteq B \setminus A \quad \text{s.t.} \quad |V \setminus Y| = 1, A - U + V, B + U - V \in \mathcal{B}$$



補題4

(3/5)

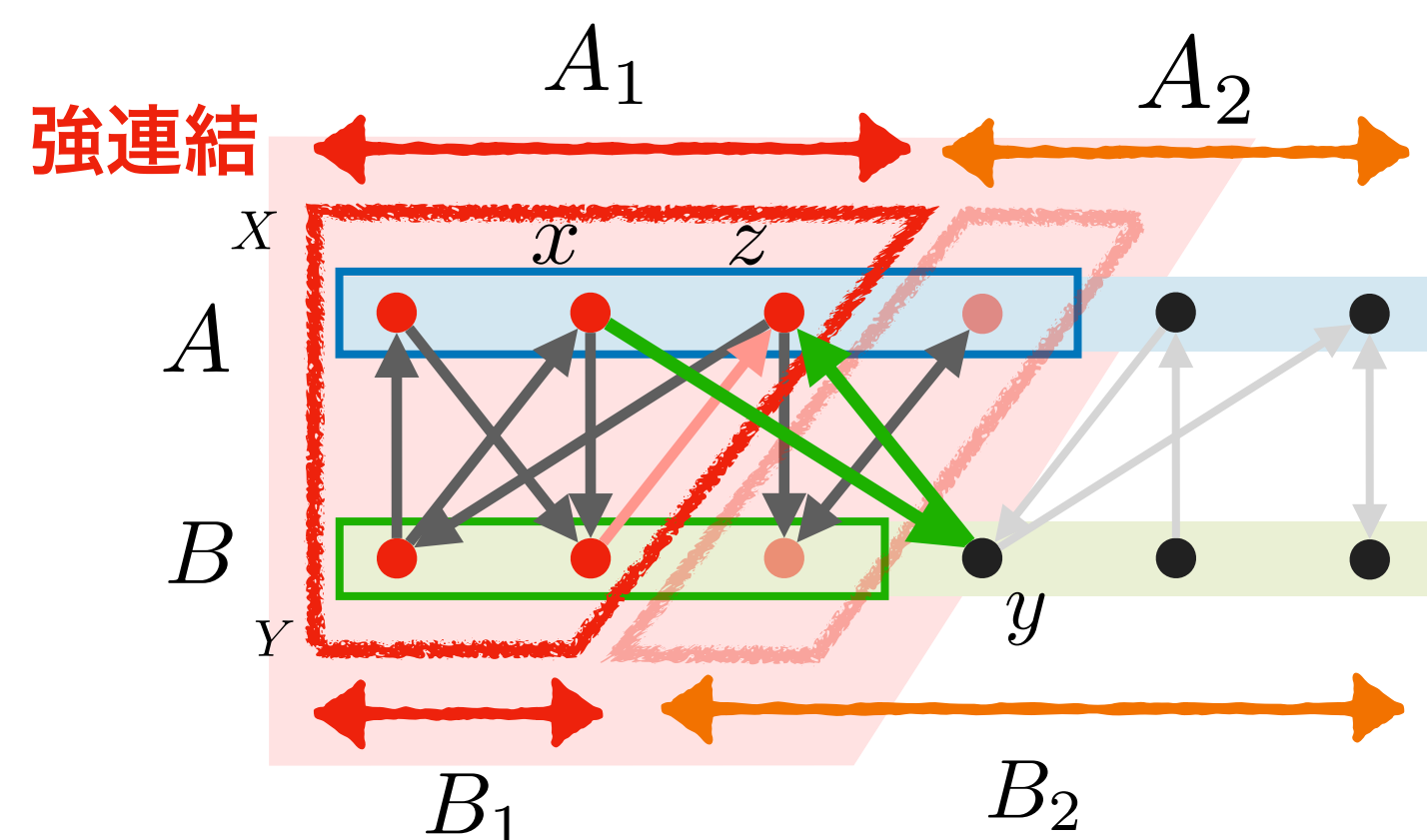
$$\forall y \in B \setminus \text{cl}(A_2) \quad \exists x \in A_1 \quad \text{s.t.} \quad A - x + y \in \mathcal{B}$$

補題5 (仮定: $|A_1| > |B_1|$)

$$\exists y \in B_2 \setminus \text{cl}(A_2) \quad \exists z \in A_1 \quad \text{s.t.} \quad B - y + z \in \mathcal{B}$$

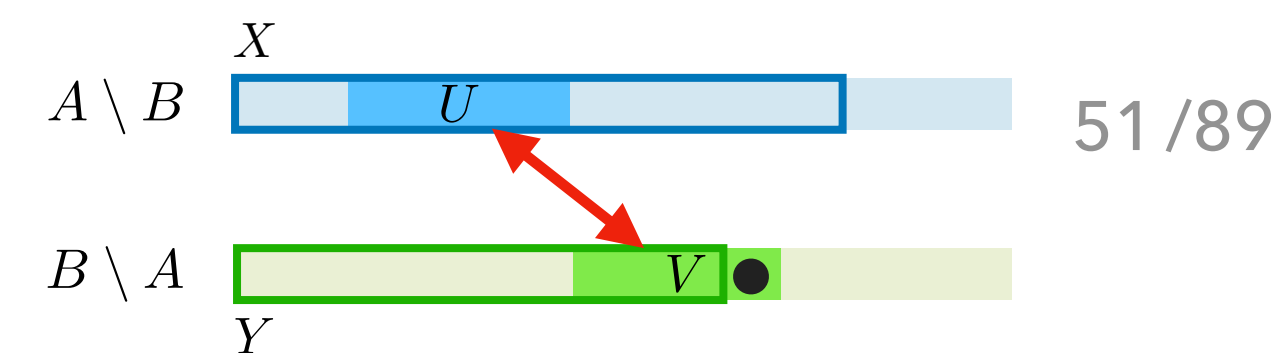
より, $x \rightarrow y \rightarrow z$ というパスが存在. $D[X + Y]$ における $A_1 + B_1$ の強連結性から, $y \notin Y$.

$$\begin{matrix} \cap & \cap & \cap \\ A_1 & B_2 & A_1 \end{matrix}$$



均衡改善交換性の証明

均衡改善交換性



[Akrami-Liu-Raj-Végh '26]

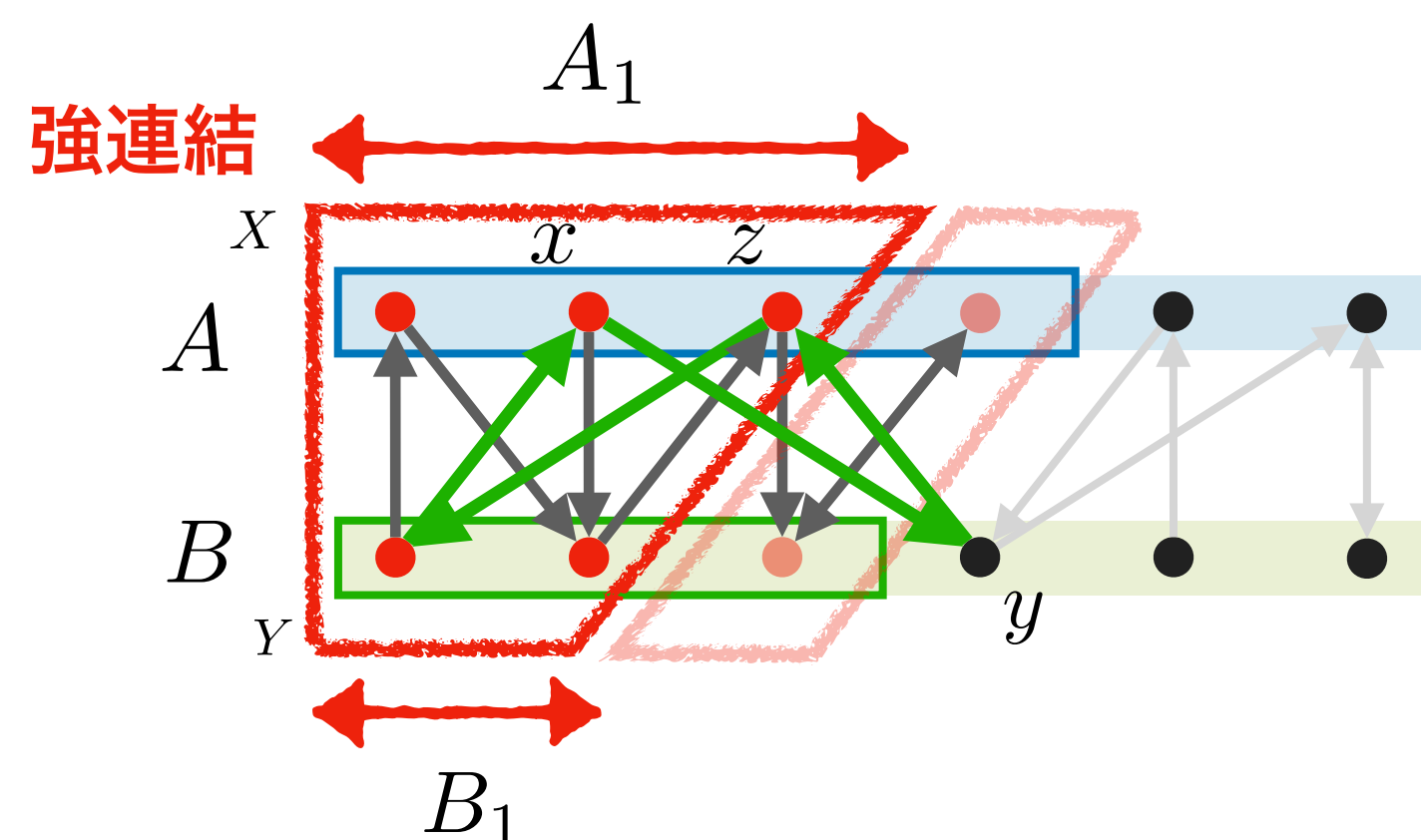
$$\forall A, B \in \mathcal{B} \quad \forall X \subseteq A \setminus B, Y \subseteq B \setminus A \quad \text{with} \quad |X| > |Y|$$

$$\exists U \subseteq X, V \subseteq B \setminus A \quad \text{s.t.} \quad |V \setminus Y| = 1, A - U + V, B + U - V \in \mathcal{B}$$

$\because$ $D[A_1 + B_1]$ は強連結なので, $D[A_1 + B_1]$ 内で z から x へ至るパスが存在

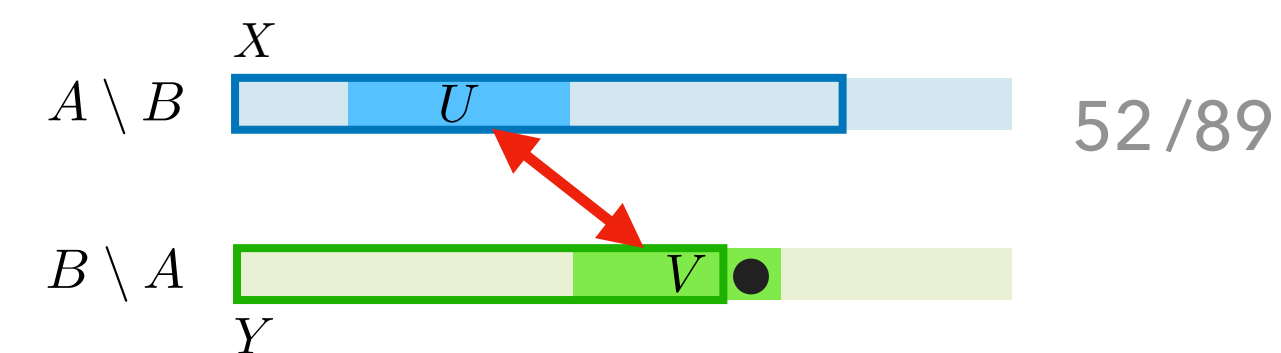
(4/5) $\implies$ 有向閉路 C で, $y \in V(C) \subseteq A_1 + B_1 + y$ なるものが存在

そのようなものの中で $V(C)$ が極小のものを取る



均衡改善交換性の証明

均衡改善交換性



[Akrami-Liu-Raj-Végh '26]

$$\forall A, B \in \mathcal{B} \quad \forall X \subseteq A \setminus B, Y \subseteq B \setminus A \quad \text{with} \quad |X| > |Y|$$

$$\exists U \subseteq X, V \subseteq B \setminus A \quad \text{s.t.} \quad |V \setminus Y| = 1, A - U + V, B + U - V \in \mathcal{B}$$

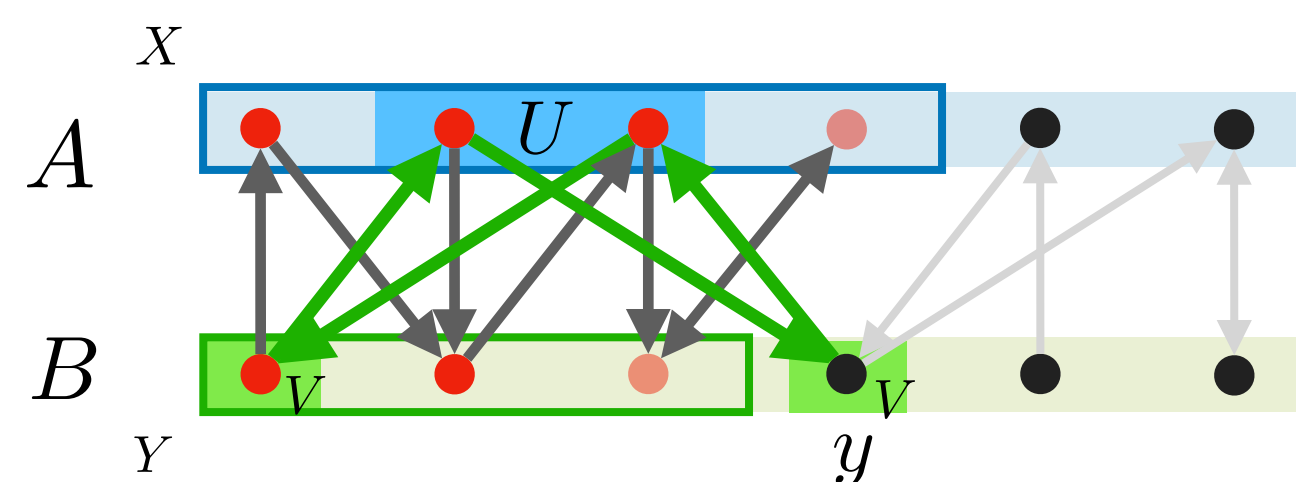
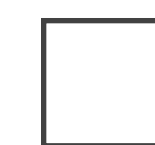
$$\because U := V(C) \cap A \quad V := V(C) \cap B \implies U \subseteq X, |V \setminus Y| = 1$$

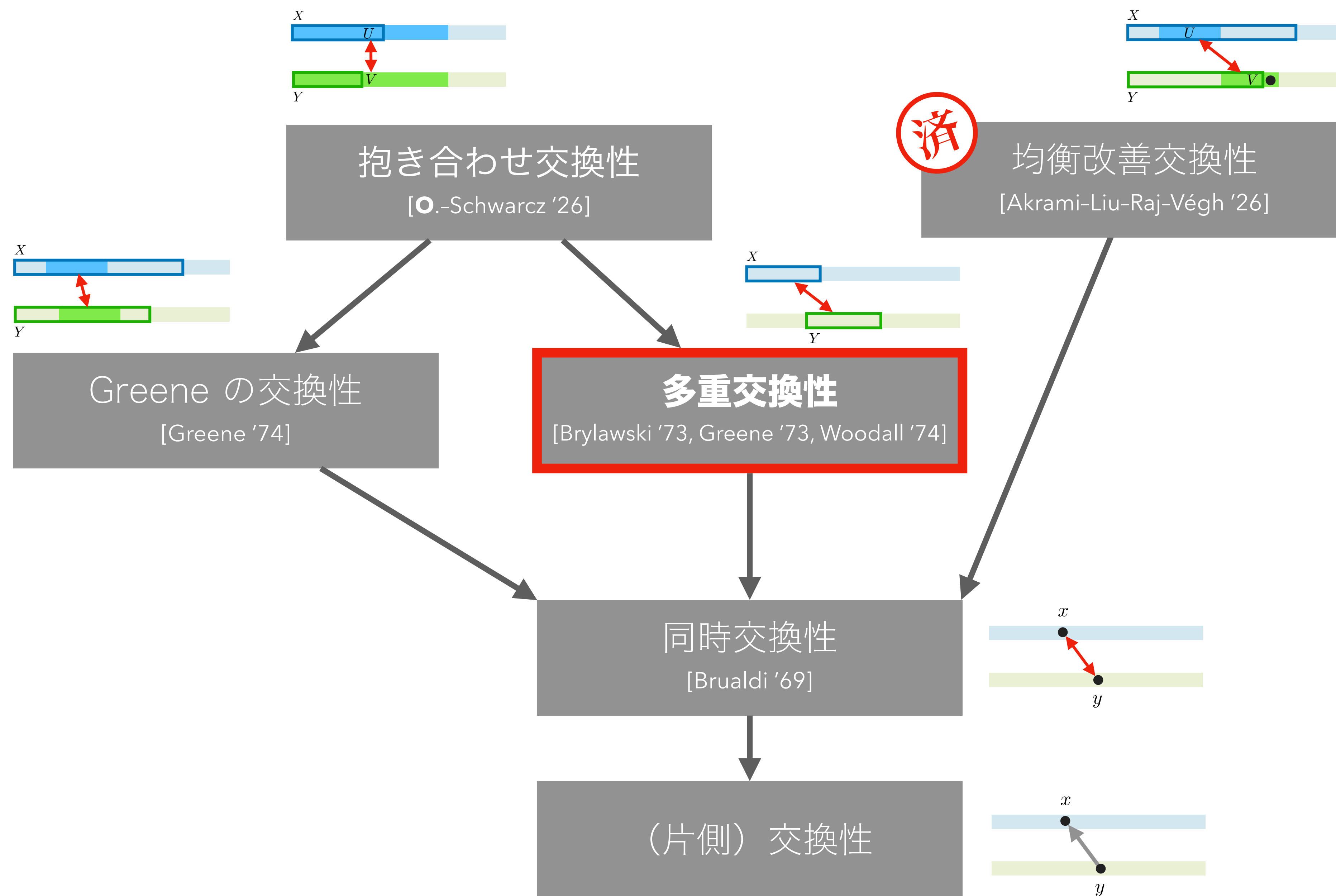
(5/5)

主張 $D[V(C)]$ において, $U \rightarrow V$ の辺には一意の完全マッチングが存在
 $V \rightarrow U$ の辺にも一意の完全マッチングが存在

直感的理由：完全マッチングが一意でなければ, $V(C)$ の極小性に反する.

一意マッチング補題より, $A - U + V, B + U - V \in \mathcal{B}$





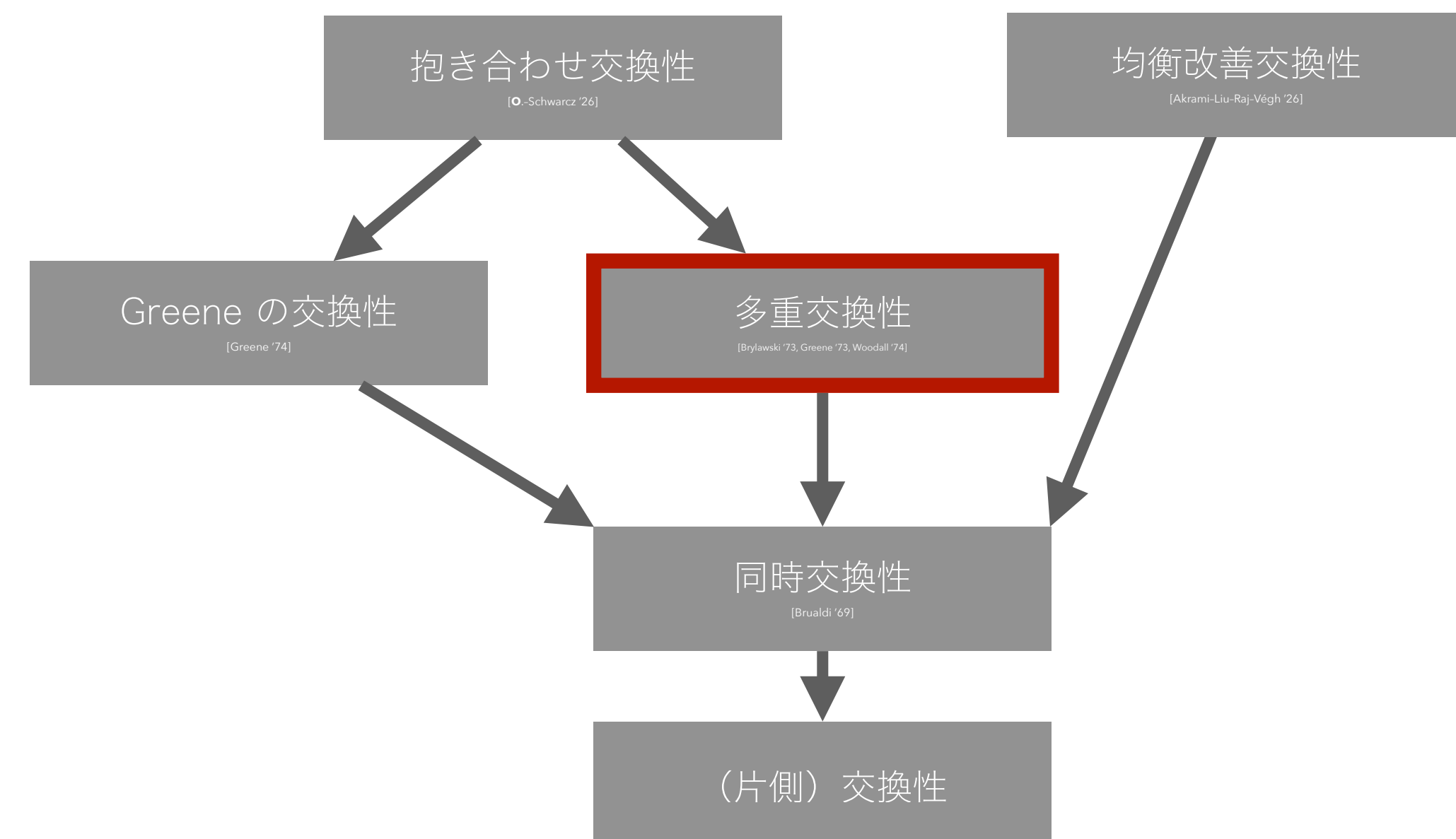
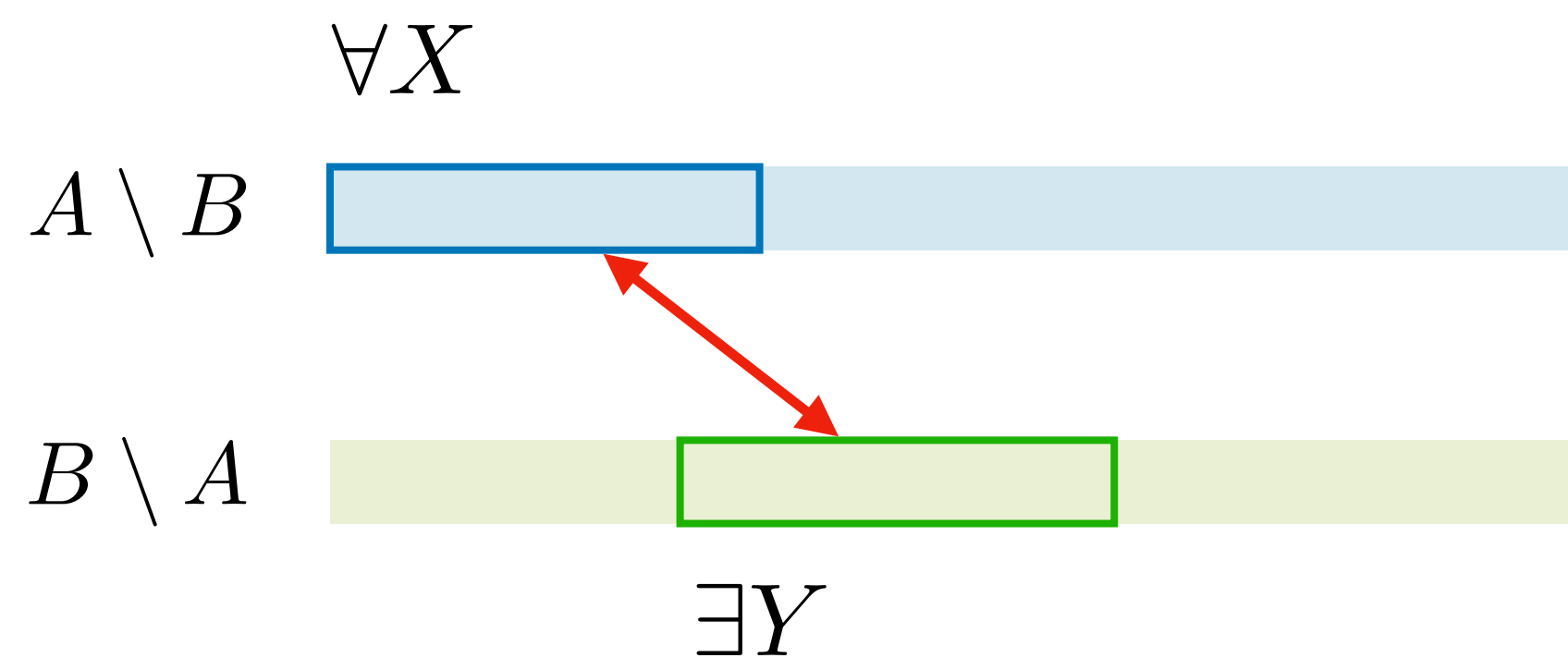
多重交換性（再掲）

54 / 89

多重交換性 (multiple exchange property)

[Brylawski '73, Greene '73, Woodall '74]

$$\forall A, B \in \mathcal{B} \quad \forall X \subseteq A \setminus B \quad \exists Y \subseteq B \setminus A \quad \text{s.t.} \quad A - X + Y, B + X - Y \in \mathcal{B}$$



マトロイド交叉の最大最小定理を用いて証明できる [Woodall '74]

マトロイドの基礎事項④ | マトロイド交差

55 / 89

matroid intersection

マトロイド交差：台集合が同じ二つのマトロイドが共通基を持つか判定する問題

多項式回の独立性オラクル呼び出しで解ける

$\mathbf{M}_1 = (E, \mathcal{B}_1)$ $\mathbf{M}_2 = (E, \mathcal{B}_2)$: マトロイド

r_1, r_2 : $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ の階数関数

Edmonds のマトロイド交差定理

[Edmonds '70]

$$\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \neq \emptyset \iff r_1(S) + r_2(E - S) \geq r_1(E) = r_2(E) \quad (\forall S \subseteq E)$$

マトロイドの基礎事項⑤ | 双対・マイナーの階数

56/89

マトロイド $\mathbf{M} = (E, \mathcal{B})$ の階数関数を r ,

それ以外のマトロイド $\mathbf{M}'$ の階数関数を $r_{\mathbf{M}'}$ とかくことにする

- **双対** : $\mathbf{M}^* = (E, \{E - B \mid B \in \mathcal{B}\})$

の階数関数 $r_{\mathbf{M}^*}(S) = r(E - S) + |S| - r(E)$

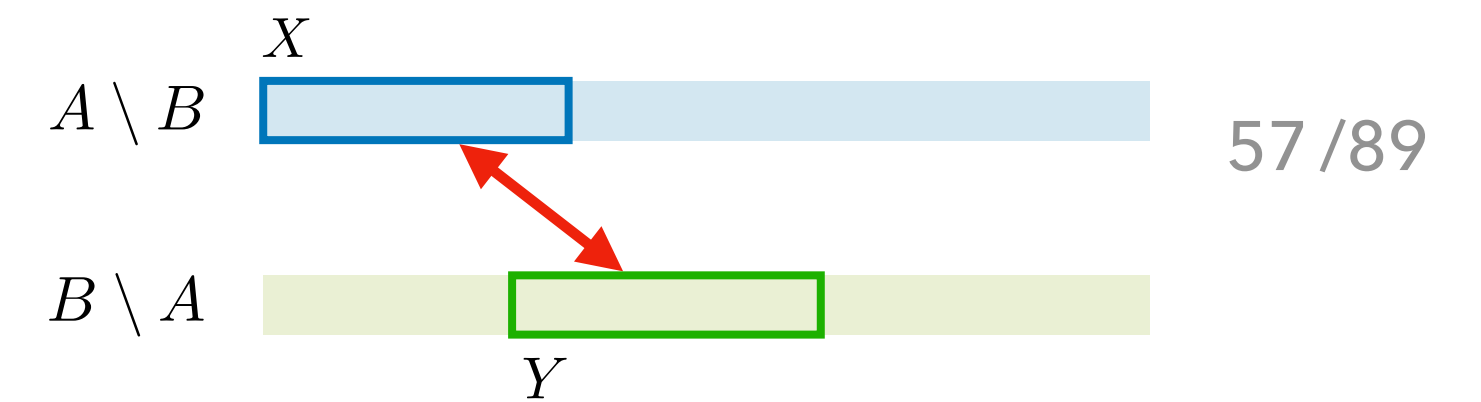
- **縮約** : $\mathbf{M} / X = (E \setminus X, \{B \setminus X \mid B \in \mathcal{B}, X \subseteq B\})$ ($X \subseteq E$: 独立)

の階数関数 $r_{\mathbf{M}/X}(S) = r(S + X) - |X|$

- **制限** : $\mathbf{M} \mid Y = (Y, \{B \in \mathcal{B} \mid B \subseteq Y\})$ ($Y \subseteq E : r(Y) = r(E)$)

の階数関数 $r_{\mathbf{M}|Y}(S) = r(S)$

多重交換性の証明



多重交換性 (multiple exchange property)

[Brylawski '73, Greene '73, Woodall '74]

$$\forall X \subseteq A \setminus B \quad \exists Y \subseteq B \setminus A \quad \text{s.t.} \quad A - X + Y, B + X - Y \in \mathcal{B}$$

∴ $A \cap B$ を縮約, $E - (A \cup B)$ を削除することにより, $A \cap B = \emptyset, A + B = E$ を仮定してよい

(1/4) $Y \subseteq B$ に対し

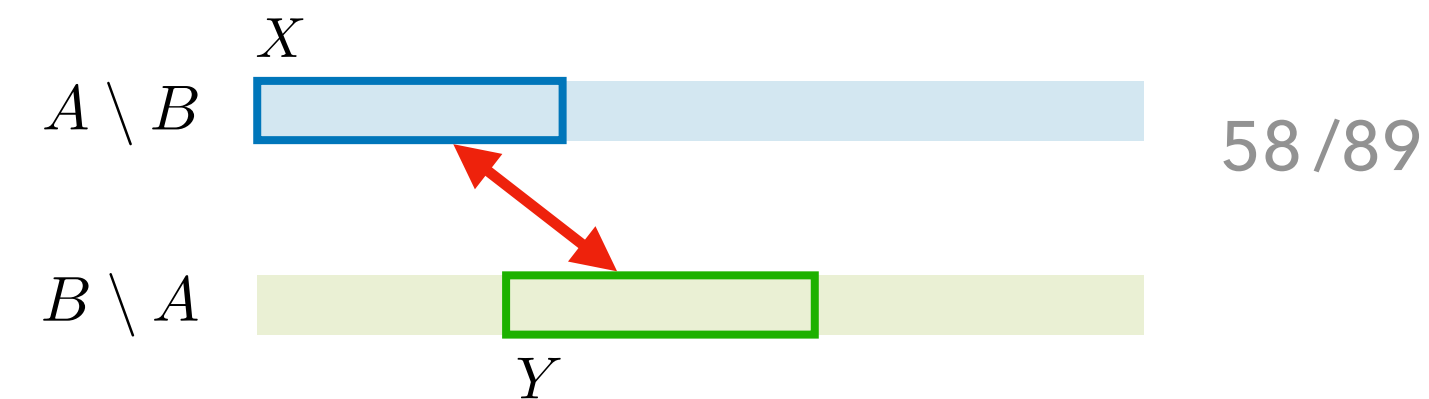
- $B + X - Y \in \mathcal{B} \iff B - Y \in \mathcal{B}((\mathbf{M}/X)|B)$ $\leftarrow (\mathbf{M}/X)|B$ の基族
- $A - X + Y \in \mathcal{B} \iff E - (A - X + Y) = B + X - Y \in \mathcal{B}(\mathbf{M}^*)$
 $\iff B - Y \in \mathcal{B}((\mathbf{M}^*/X)|B)$

より $A - X + Y, B + X - Y \in \mathcal{B} \iff B - Y \in \mathcal{B}((\mathbf{M}/X)|B) \cap \mathcal{B}((\mathbf{M}^*/X)|B)$

逆に共通基 B' に対し, $Y := B - B'$ とすると, $A - X + Y, B + X - Y \in \mathcal{B}$

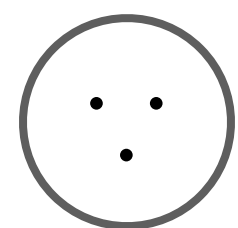
$(\mathbf{M}/X)|B$ と $(\mathbf{M}^*/X)|B$ が共通基を持つことを示せば良い

多重交換性の証明



58/89

目標 $\mathcal{B}((\mathbf{M}/X)|B) \cap \mathcal{B}((\mathbf{M}^*/X)|B) \neq \emptyset$



Edmonds のマトロイド交叉定理により,

(2/4)

$$\mathcal{B}((\mathbf{M}/X)|B) \cap \mathcal{B}((\mathbf{M}^*/X)|B) \neq \emptyset$$

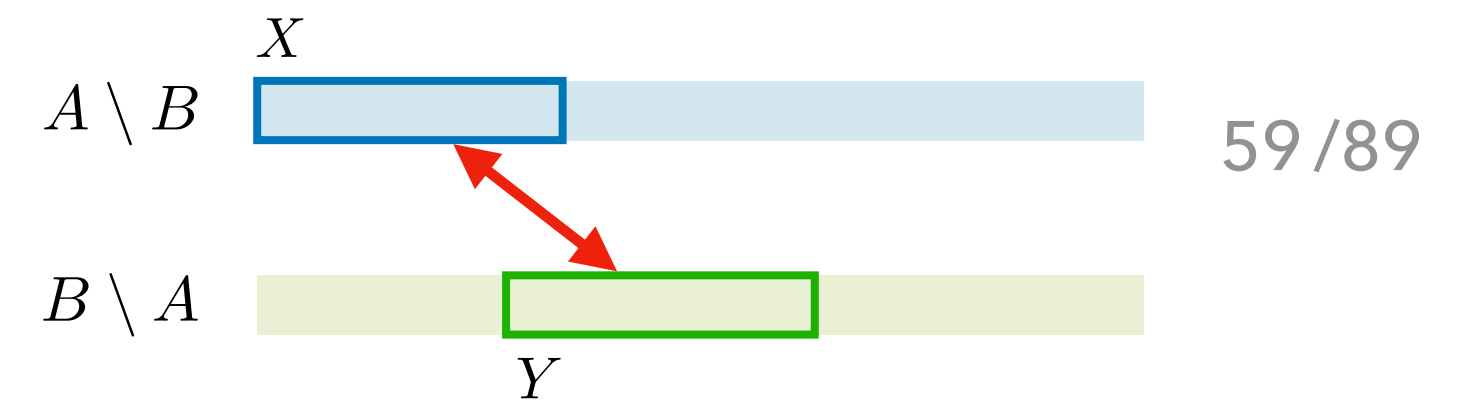
$$\iff r_{(\mathbf{M}/X)|B}(S) + r_{(\mathbf{M}^*/X)|B}(B - S) \geq |B| - |X| \quad (\forall S \subseteq B)$$

$(\mathbf{M}/X)|B$ の階数関数

$(\mathbf{M}^*/X)|B$ の階数関数

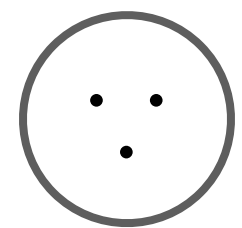
$r_{(\mathbf{M}/X)|B}(S) + r_{(\mathbf{M}^*/X)|B}(B - S) \geq |B| - |X| \quad (\forall S \subseteq B)$ を示せば良い

多重交換性の証明



59/89

目標 $r_{(\mathbf{M}/X)|B}(S) + r_{(\mathbf{M}^*/X)|B}(B - S) \geq |B| - |X| \quad (\forall S \subseteq B)$



(3/4)

- $r_{(\mathbf{M}/X)|B}(S) = r_{\mathbf{M}/X}(S) = r(S + X) - |X|$
- $r_{(\mathbf{M}^*/X)|B}(B - S) = r_{\mathbf{M}^*/X}(B - S)$

$$= r_{\mathbf{M}^*}(B - S + X) - |X|$$

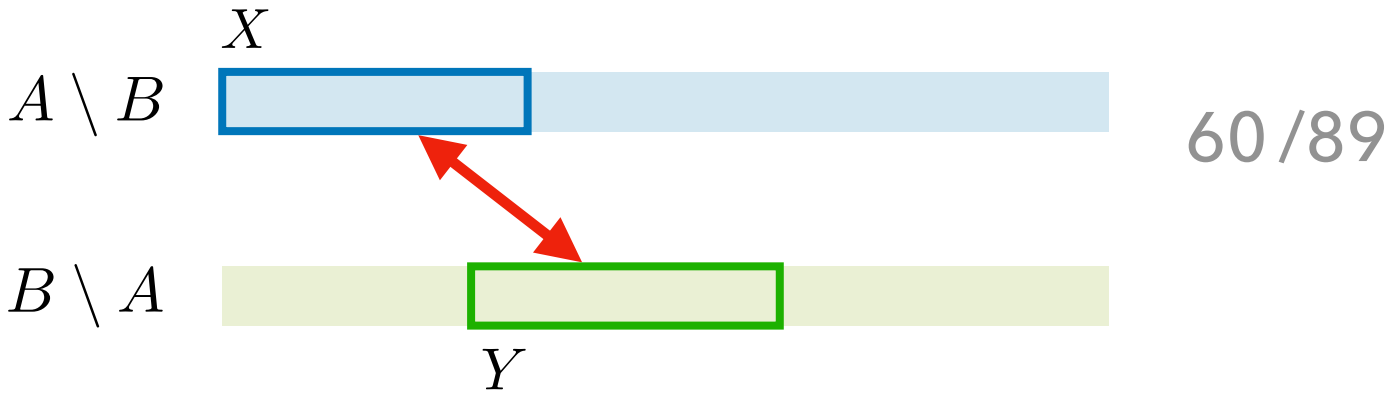
$$= r(A - X + S) + |B - S + X| - |B| - |X|$$

$$= r(A - X + S) - |S|$$

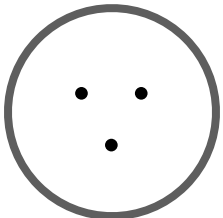
より $r_{(\mathbf{M}^*/X)|B}(B - S) = r(A - X + S) - |S|$

目標 $\iff r(S + X) + r(A - X + S) \geq |B| + |S| \quad (\forall S \subseteq B)$

多重交換性の証明



目標 $r(S + X) + r(A - X + S) \geq |B| + |S| \quad (\forall S \subseteq B)$



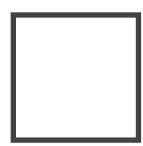
階数関数の劣モジュラ性から,

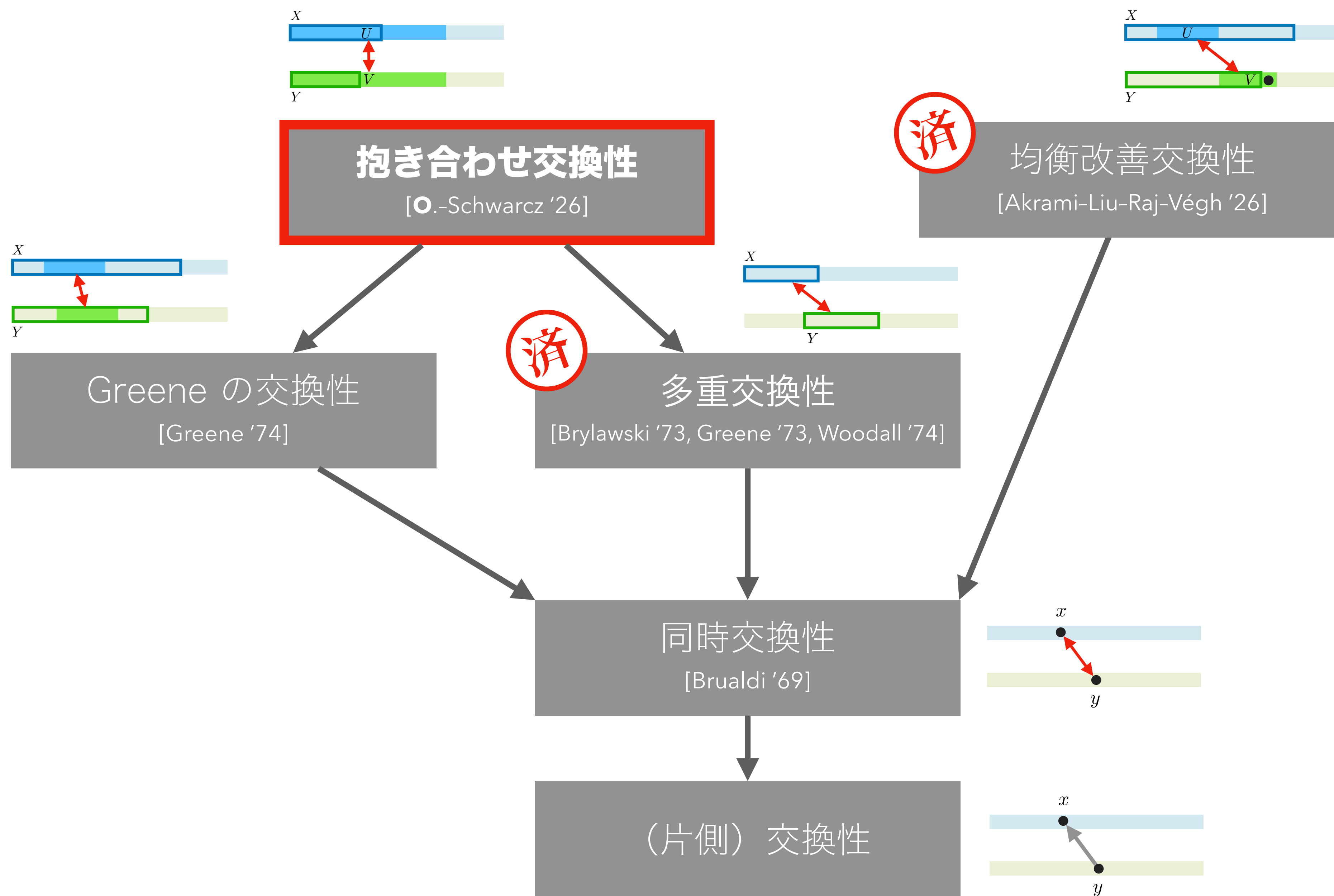
(4/4)

$$r(S + X) + r(A - X + S) \geq r(S) + r(A + S)$$

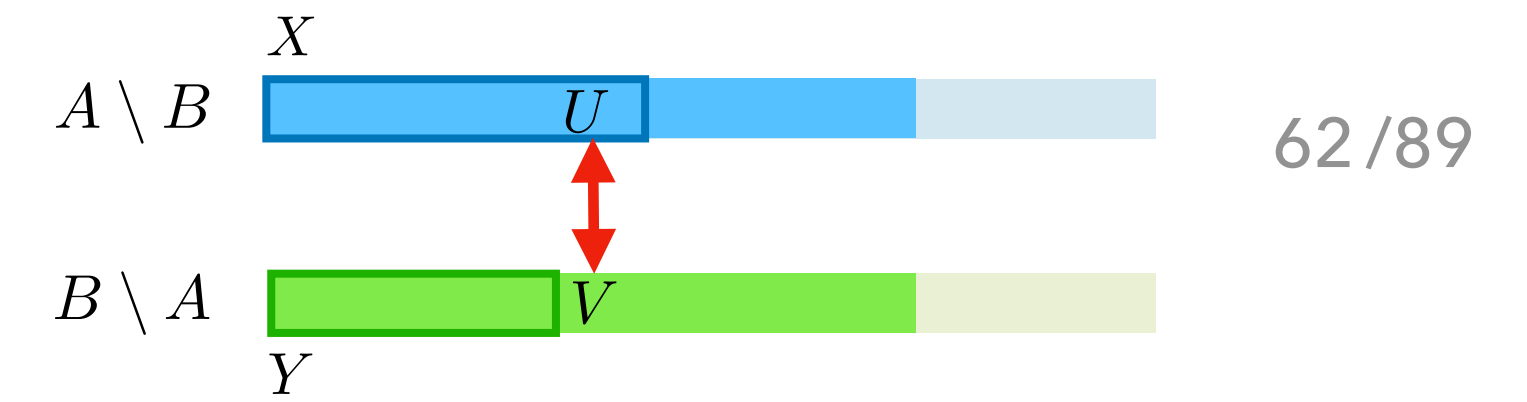
S は独立, A は基

$$\begin{aligned} &= |S| + |A| \\ &= |S| + |B| \end{aligned}$$





抱き合わせ交換性の証明のアイデア



62 / 89

抱き合わせ交換性

[O.-Schwarcz '26]

$$\begin{aligned} & \forall X \subseteq A \setminus B, Y \subseteq B \setminus A \quad \exists U \subseteq A \setminus B, V \subseteq B \setminus A \\ \text{s.t. } & X \subseteq U, Y \subseteq V, |U| = |V| \leq |X + Y|, A - U + V, B + U - V \in \mathcal{B} \end{aligned}$$

重みつきマトロイド交叉に帰着

- $X \subseteq U, Y \subseteq V, A - U + V, B + U - V \in \mathcal{B}$
 $\iff B' := B + (U - X) - V \in \mathcal{B}(\mathbf{M}/X \setminus Y) \cap \mathcal{B}((\mathbf{M}/Y \setminus X)^*)$
- $|U| = |V| \leq |X + Y|$
 $\iff w(B') \leq |Y| \quad \text{with} \quad w(e) := \begin{cases} 1 & (e \in A - X) \\ 0 & (e \in B - Y) \end{cases}$

Frank の重み分割定理 [Frank '81] を用いて最適値を抑える. 詳細は補遺を参照

表現可能なマトロイドの交換性

時限目

Grassmann-Plücker 恒等式

64 / 89

$$K \in \mathbb{F}^{r \times n}, A, B \in \binom{[n]}{r} \quad \left\langle \binom{[n]}{r} := \{ A \subseteq [n] \mid |A| = r \} \right\rangle$$

$$K = \begin{array}{c} S \\ \boxed{K[S]} \end{array}$$

Grassmann-Plücker 恒等式 $x \in A \setminus B$

[Grassmann 1844, Plücker 1868, Hodge-Pedoe '47]

$$\det K[A] \det K[B] = \sum_{y \in B \setminus A} \pm \det K[A - x + y] \det K[B + x - y]$$

多重 Grassmann-Plücker 恒等式 $X \subseteq A \setminus B$

[Grassmann 1844, Plücker 1868, Hodge-Pedoe '47]

$$\det K[A] \det K[B] = \sum_{Y \subseteq B \setminus A : |Y| = |X|} \pm \det K[A - X + Y] \det K[B + X - Y]$$

これらから，表現可能マトロイドに対する同時交換性・多重交換性が導かれる

Grassmann-Plücker 恒等式の拡張

65 / 89

実は、抱き合わせ交換性や均衡改善交換性に対応する恒等式も存在！

抱き合わせ Grassmann-Plücker 恒等式 $X \subseteq A \setminus B, Y \subseteq B \setminus A$ [O.-Schwarcz '26]

$$\det K[A] \det K[B] = \sum_{\substack{U \subseteq A \setminus B : X \subseteq U \\ V \subseteq B \setminus A : Y \subseteq V \\ |U|=|V| \leq |X+Y|}} \pm \binom{|X+Y| - |A \setminus B|}{|X+Y| - |U|} \det K[A - U + V] \det K[B + U - V]$$

※ 拡張二項係数

均衡改善 Grassmann-Plücker 恒等式 $X \subseteq A \setminus B, Y \subseteq B \setminus A$ with $|X| > |Y|$ [O.-Schwarcz '26]

$$\det K[A] \det K[B] = \sum_{\substack{U \subseteq X \\ V \subseteq B \setminus A : |V \setminus Y|=1}} \pm \frac{1}{|U| \binom{|X|}{|U|}} \det K[A - U + V] \det K[B + U - V]$$

※ $\mathbb{F}$ 上で係数の分母が非零である必要がある

このような恒等式を導出するための一般論がある [O.-Schwarcz '26]

Grassmann-Plücker 恒等式の一般化

66/89

$$\mathcal{S} := \{ (U, V) \mid U \subseteq A \setminus B, V \subseteq B \setminus A, |U| = |V| \}$$

$$c: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{F} \quad \text{s.t.} \quad \text{任意の全単射 } \varphi: A \setminus B \rightarrow B \setminus A \text{ に対し} \quad \sum_{U \subseteq A \setminus B} c(U, \varphi(U)) = 1$$

主定理

[O.-Schwarcz '26]

体 $\mathbb{F}$ 上の任意の行列 $K \in \mathbb{F}^{r \times 2r}$ に対して

$$\det K[A] \det K[B] = \sum_{(U, V) \in \mathcal{S}} \pm c(U, V) \det K[A - U + V] \det K[B + U - V]$$

$\Rightarrow$ A, B が K により表現されるマトロイドの基なら

ある $(U, V) \in \text{supp}(c)$ が存在し, $A - U + V, B - U + V$ も基

$$\text{supp}(c) := \{ (X, Y) \in \mathcal{S} \mid c(X, Y) \neq 0 \}$$

主定理を認めると…

67 / 89

多重 Grassmann-Plücker 恒等式 $X \subseteq A \setminus B$

[Grassmann 1844, Plücker 1868, Hodge-Pedoe '47]

$$\det K[A] \det K[B] = \sum_{Y \subseteq B \setminus A : |Y|=|X|} \pm \det K[A - X + Y] \det K[B + X - Y]$$

$\odot$ $c(U, V) := \begin{cases} 1 & (U = X) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$ とすると,

任意の全単射 $\varphi: A \setminus B \rightarrow B \setminus A$ に対し $\sum_{U \subseteq A \setminus B} c(U, \varphi(U)) = 1$



Grassmann-Plücker 恒等式を導く二項係数恒等式 ^{68/89}

抱き合わせ・均衡改善 Grassmann-Plücker 恒等式も,

任意の全単射 $\varphi: A \setminus B \rightarrow B \setminus A$ に対して成立する以下の恒等式から, 主定理によって従う

抱き合わせ Grassmann-Plücker 恒等式

$$\sum_{U \subseteq A \setminus B : X \subseteq U, Y \subseteq \varphi(U), |U| \leq |X+Y|} \binom{|X+Y| - |A \setminus B|}{|X+Y| - |U|} = 1$$

均衡改善 Grassmann-Plücker 恒等式 ($|X| > |Y|$)

$$\sum_{U \subseteq X : |\varphi(U) \setminus Y| = 1} \frac{1}{|U| \binom{|X|}{|U|}} = 1$$

✓ 演習問題X これらの二項係数の恒等式を示してください

さらなる交換性

主定理を使うと, こんな交換性も示せる

定理

[O.-Schwarcz '26]

$A, B \in \mathcal{B}$ $(X_1, X_2) : A \setminus B$ の二分割, $(Y_1, Y_2) : B \setminus A$ の二分割 s.t. $|X_1| \neq |Y_1|$

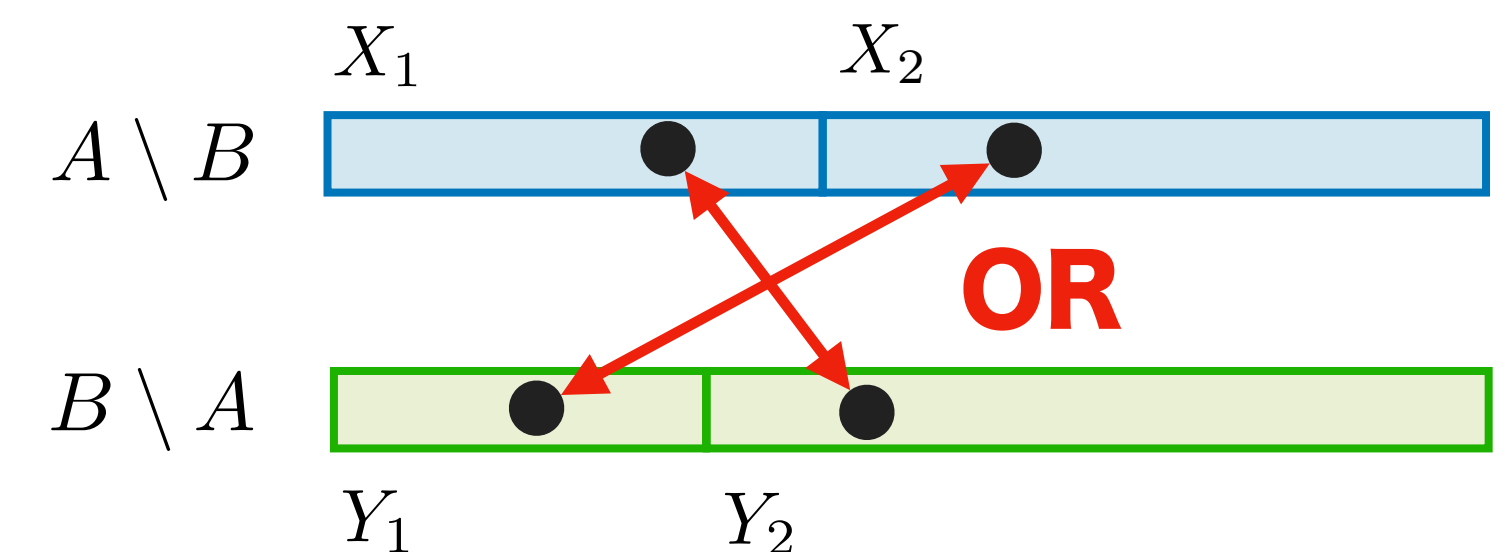
マトロイドが**標数 0 の体上で表現可能**ならば,

$$\exists x \in X_1, y \in Y_2 \text{ s.t. } A - x + y, B + x - y \in \mathcal{B}$$

$$\text{または } \exists x \in X_2, y \in Y_1 \text{ s.t. } A - x + y, B + x - y \in \mathcal{B}$$

二進マトロイド ($\mathbb{F}_2$ 上表現されるマトロイド) で
反例があり, 一般のマトロイドでは成立しない

✓ 演習問題 6



さらなる交換性

主定理を使うと, こんな交換性も示せる

定理

[O.-Schwarcz '26]

$A, B \in \mathcal{B}$ $(X_1, X_2) : A \setminus B$ の二分割, $(Y_1, Y_2) : B \setminus A$ の二分割

整数 $0 \leq p \leq \max\{|X_1| - |Y_1|, 0\}$

マトロイドが体 $\mathbb{F}$ 上表現可能で, $\mathbb{F}$ の標数または p が 0 ならば,

$\exists U \subseteq X_1, \exists V \subseteq B \setminus A$ s.t. $|V \cap Y_2| = p, |U| = |V| \geq |X_1| - |Y_2| + p$

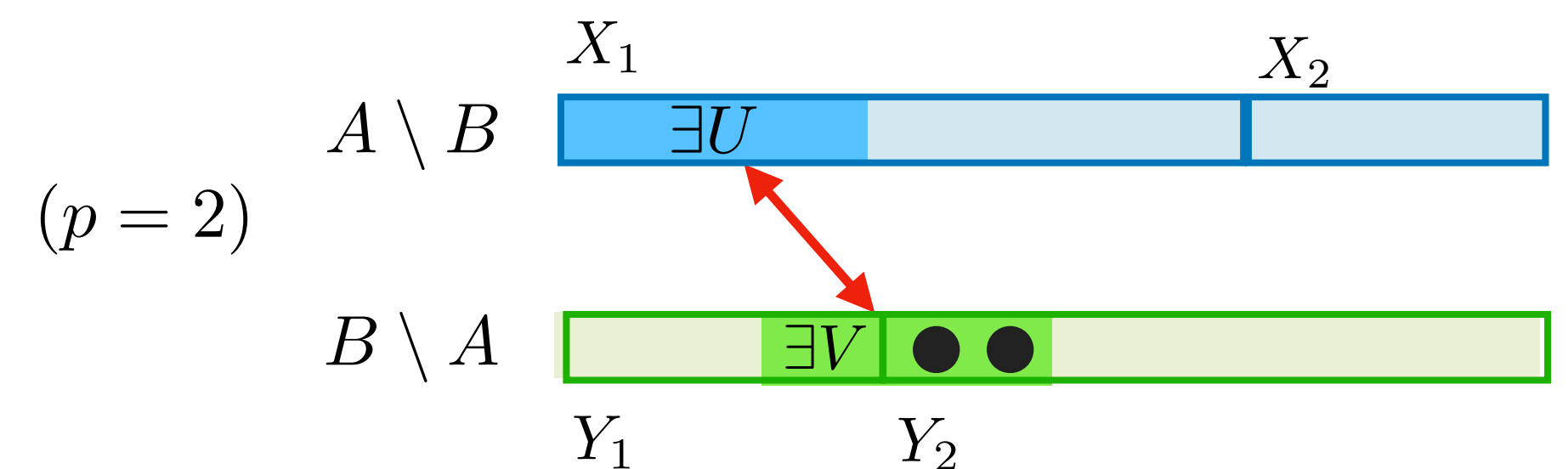
$A - U + V, B + U - V \in \mathcal{B}$

$p = 0 \iff$ 抱き合わせ交換性

$p = 1 \iff$ 均衡改善交換性 + U, V のサイズ下界

よって, 両交換性の共通の一般化となっている

一般のマトロイドでは未解決



$$c: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{F} \quad \text{s.t.} \quad \text{任意の全単射 } \varphi: A \setminus B \rightarrow B \setminus A \text{ に対し } \sum_{U \subseteq A \setminus B} c(U, \varphi(U)) = 1$$

主定理 (再掲)

[O.-Schwarcz '26]

体 $\mathbb{F}$ 上の任意の行列 $K \in \mathbb{F}^{r \times 2r}$ に対して

$$\det K[A] \det K[B] = \sum_{(U,V) \in \mathcal{S}} \pm c(U, V) \det K[A - U + V] \det K[B + U - V]$$

3 時限目の目標

$\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ の場合の主定理を証明

調和関数

$$\mathcal{S} := \{ (X, Y) \mid X \subseteq A, Y \subseteq B, |X| = |Y| \}$$

関数 $h: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{Q}$ が ^{harmonic} **調和的** $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の $X \subseteq A, Y \subseteq B$ ($|X| = |Y| + 1$) に対して

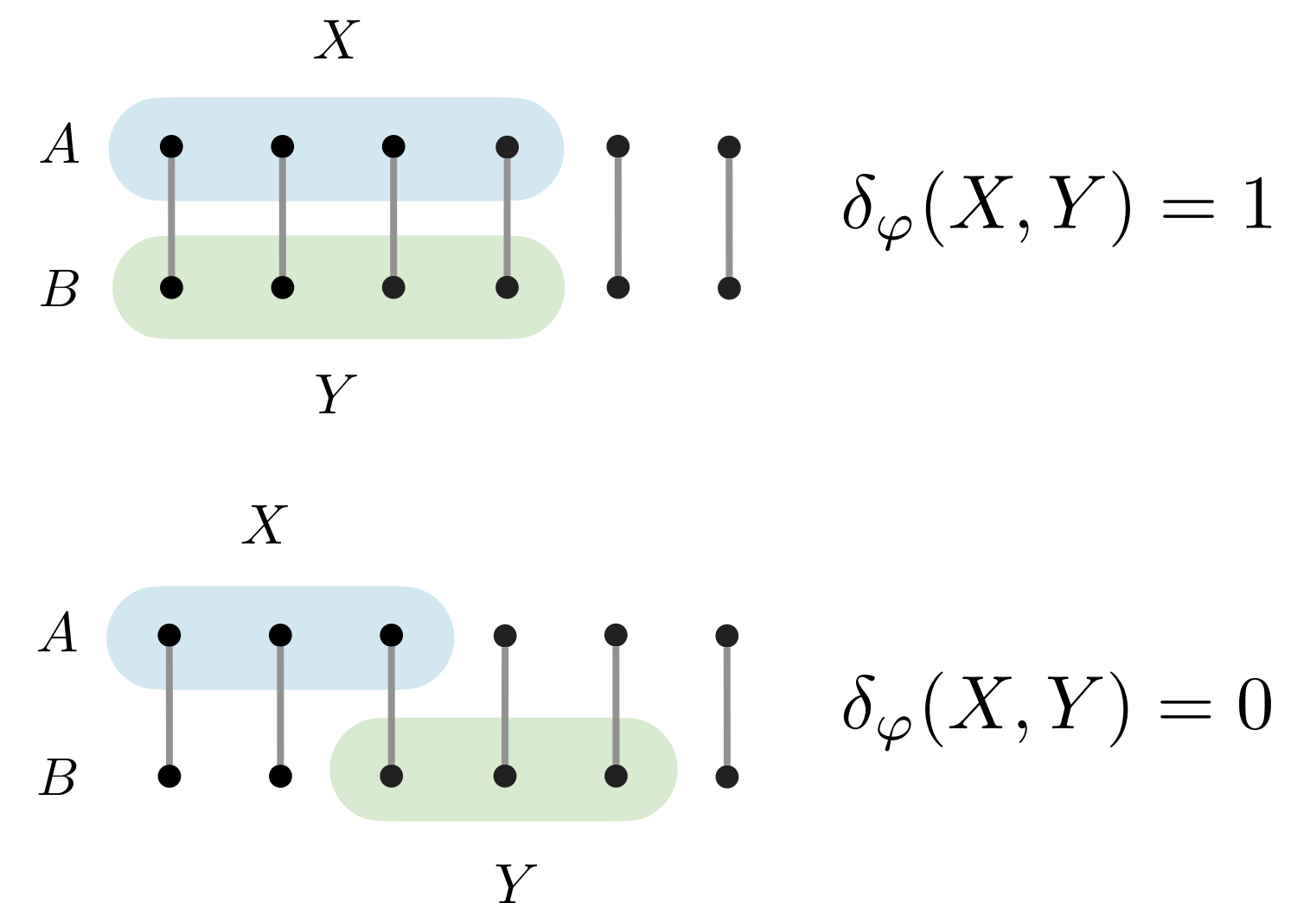
$$\sum_{a \in X} h(X - a, Y) = \sum_{b \in B - Y} h(X, Y + b)$$

例

$\varphi: A \rightarrow B$ 全単射 に対し, $\delta_\varphi: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{Q}$ を

$$\delta_\varphi(X, Y) := \begin{cases} 1 & (\varphi(X) = Y) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

と定義すると, δ_φ は調和的 ✓ 演習問題 7



行列式関数の調和性

73 / 89

$$\mu(X, Y) := \operatorname{sgn}(X, Y) \det K[A - X + Y] \det K[B + X - Y]$$

ただし, $\operatorname{sgn}(\cdot)$ は「 $\cdot$ から定まる符号」とする (ここでは具体的な対応は提示しない)

補題6 (Plücker 関係)

[Grassmann 1844, Plücker 1868, Hodge-Pedoe '47]

μ は**調和的** (となるような符号付け $\operatorname{sgn}: \mathcal{S} \rightarrow \{+1, -1\}$ が存在)

証明には, 次の**一般化 Laplace 展開**を用いる:

$$\det \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} = \sum_J \operatorname{sgn}(J) \det L_1[J] \det L_2[\bar{J}]$$

J の補集合

行列式関数の調和性

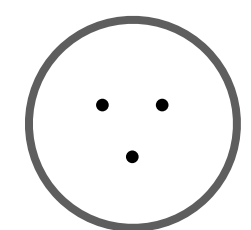
74/89

$$\mu(X, Y) := \operatorname{sgn}(X, Y) \det K[A - X + Y] \det K[B + X - Y]$$

補題6 (Plücker 関係)

[Grassmann 1844, Plücker 1868, Hodge-Pedoe '47]

μ は調和的



簡単のため, ここでは $A = \{1, \dots, r\}, B = \{r + 1, \dots, 2r\}$ とする

$$K = \begin{bmatrix} K[A] & K[B] \end{bmatrix}$$

(1/3)

$X \subseteq A, Y \subseteq B$ ($|X| = |Y| + 1$) に対し

$$\sum_{a \in X} \mu(X - a, Y) = \sum_{b \in B - Y} \mu(X, Y + b)$$

を示す

次の行列を考える：

行基本変形

白抜き部分のサイズ

$$r \times (|X| + (r - |Y|)) > r$$

より, この行列は非正則

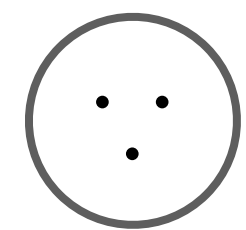
行列式関数の調和性

75 / 89

$$\mu(X, Y) := \text{sgn}(X, Y) \det K[A - X + Y] \det K[B + X - Y]$$

目標

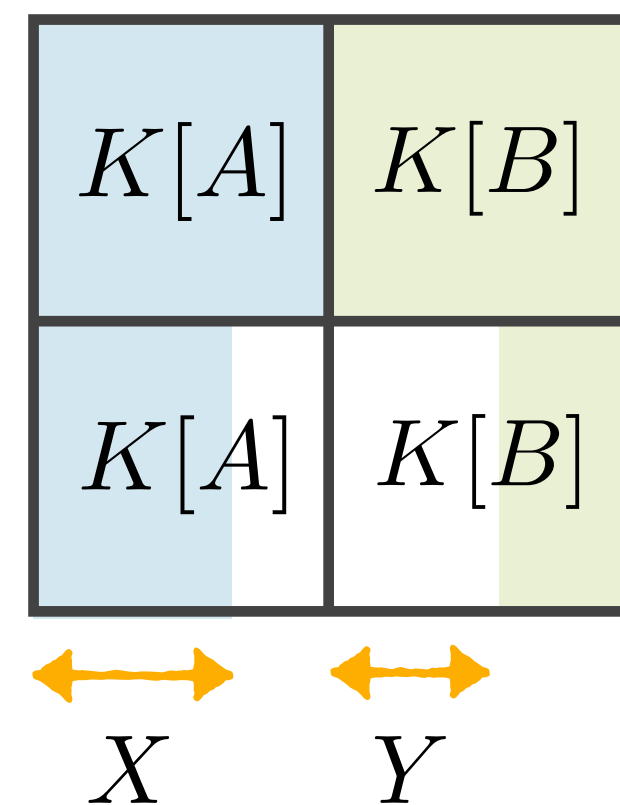
$$\sum_{a \in X} \mu(X - a, Y) = \sum_{b \in B - Y} \mu(X, Y + b)$$



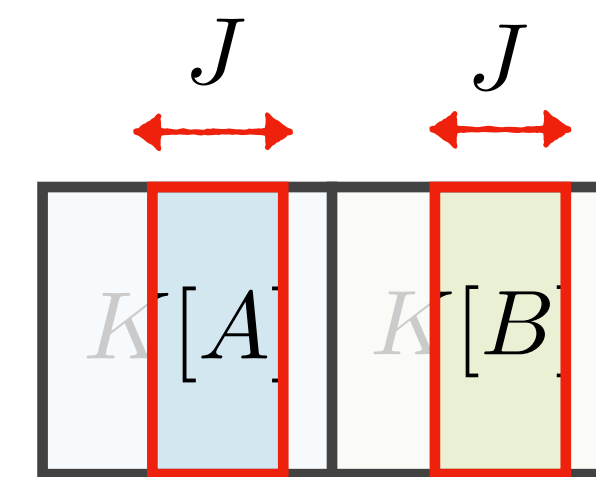
(2/3)

一般化 Laplace 展開により,

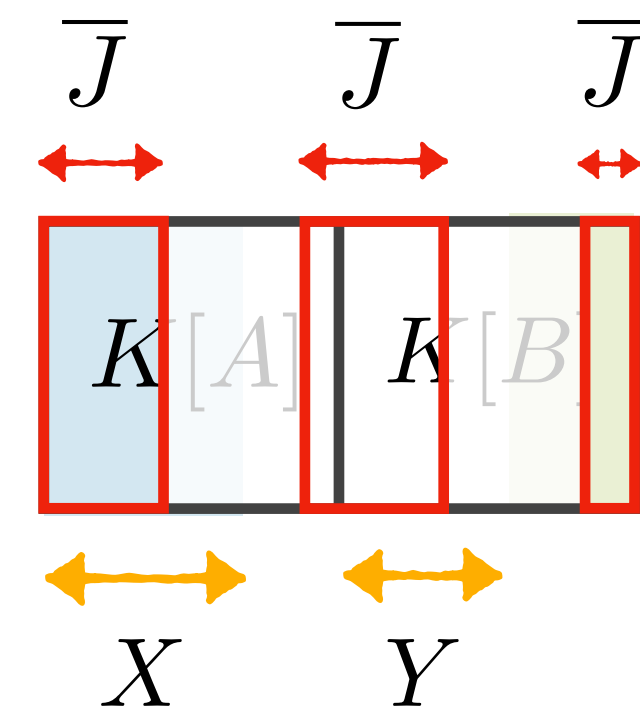
非正則
0 = det



$$= \sum_{J \in \binom{[2r]}{r}} \text{sgn}(J) \det$$



det



$$\bar{J} := [2r] - J$$

$$\bar{J} \text{ が白抜き部分を含まない} \iff \bar{J} \cap A \subseteq X, Y \subseteq J \cap B$$

$$U := \bar{J} \cap A, V := J \cap B \text{ と変数変換すると } |J| = r \iff |U| = |V|$$

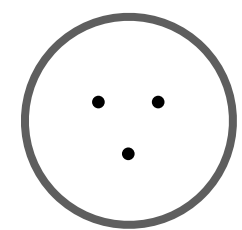
行列式関数の調和性

76/89

$$\mu(X, Y) := \text{sgn}(X, Y) \det K[A - X + Y] \det K[B + X - Y]$$

目標

$$\sum_{a \in X} \mu(X - a, Y) = \sum_{b \in B - Y} \mu(X, Y + b)$$



よって

(3/3)

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\substack{U \subseteq X \\ V \subseteq B : Y \subseteq V, |U|=|V|}} \text{sgn}(U, V) \det \begin{array}{|c|c|c|} \hline & A - U & V \\ \hline \end{array} \det \begin{array}{|c|c|} \hline U & B - V \\ \hline \end{array} \\ &= \sum_{\substack{U \subseteq X \\ V \subseteq B : Y \subseteq V, |U|=|V|}} \text{sgn}(U, V) \det K[A - U + V] \det K[B + U - V] \end{aligned}$$

$|X| = |Y| + 1$ なので, 条件を満たす (U, V) は $(X - a, Y), (X, Y + b)$ という形のみ

移項にかかる -1 倍も sgn に含めれば, 与式を得る



調和関数全体の次元

77/89

調和関数全体 $\mathcal{H} := \{h: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{Q} \text{ harmonic}\}$ は $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間. 次元は？

補題 7

[Gottlieb '66]

$$\dim \mathcal{H} = \binom{2r}{r} - \binom{2r}{r-1} = \frac{1}{r-1} \binom{2r}{r} \quad \text{Catalan 数}$$

$\odot$ $h: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{Q}$ に対し, $\hat{h}: \binom{[2r]}{r} \rightarrow \mathbb{Q}$ を $\hat{h}(S) := (-1)^{|S|} h(A \setminus S, B \cap S)$ と定めると,
(1/3)

$$\sum_{a \in X} h(X - a, Y) = \sum_{b \in B - Y} h(X, Y + b) \quad (\forall X \subseteq A, \forall Y \subseteq B : |X| = |Y| + 1)$$

$$\iff \sum_{e \in [2r] - T} \hat{h}(T + e) = 0 \quad (\forall T \subseteq [2r] : |T| = r - 1)$$

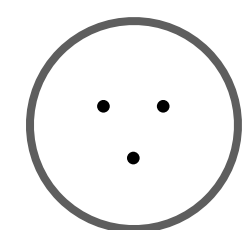
よって, このような関数 $\hat{h}$ 全体 $\hat{\mathcal{H}}$ の次元が Catalan 数 であることを示せばよい

調和関数全体の次元

$$\hat{\mathcal{H}} := \left\{ \hat{h}: \binom{[2r]}{r} \rightarrow \mathbb{Q}, \sum_{e \in [2r] - T} \hat{h}(T + e) = 0 \quad (T \in \binom{[2r]}{r-1}) \right\} \quad 78/89$$

目標

$$\dim \hat{\mathcal{H}} = \binom{2r}{r} - \binom{2r}{r-1} = \frac{1}{r-1} \binom{2r}{r}$$



$\binom{[2r]}{r} \rightarrow \mathbb{Q}$ なる関数全体の次元は $\binom{2r}{r}$

(2/3)

各 $T \in \binom{[2r]}{r-1}$ から一本ずつ制約があるので、制約の本数は $\binom{2r}{r-1}$

$$\implies \dim \hat{\mathcal{H}} \geq \binom{2r}{r} - \binom{2r}{r-1}$$

よって、各制約が線形独立であること、つまり、

行列 $W_{2r,r}$ が行フルランク

を示せば良い

$$W_{n,r} \in \mathbb{Q}^{\binom{[n]}{r-1} \times \binom{[n]}{r}}$$

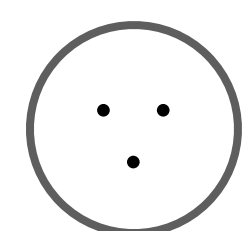
$$(W_{n,r})_{T,S} := \begin{cases} 1 & (T \subseteq S) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

調和関数全体の次元

$$W_{n,r} \in \mathbb{Q}^{\binom{[n]}{r-1} \times \binom{[n]}{r}} \quad (W_{n,r})_{T,S} := \begin{cases} 1 & (T \subseteq S) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad 79/89$$

目標

行列 $W_{2r,r}$ は行フルランク



(3/3)

各 $T, U \in \binom{[2r]}{r-1}$ に対し,

$$(W_{2r,r} W_{2r,r}^\top)_{T,U} = |\{ S \in \binom{[2r]}{r} \mid T \cup U \subseteq S \}| = \begin{cases} r+1 & (T=U) \\ 1 & (|T \setminus U|=1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

$$(W_{2r,r-1}^\top W_{2r,r-1})_{T,U} = |\{ R \in \binom{[2r]}{r-2} \mid R \subseteq T \cap U \}| = \begin{cases} r-1 & (T=U) \\ 1 & (|T \setminus U|=1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

$$\text{より, } W_{2r,r} W_{2r,r}^\top = W_{2r,r-1}^\top W_{2r,r-1} + 2I$$

$W_{2r,r-1}^\top W_{2r,r-1}$ は半正定値対称なので, $W_{2r,r} W_{2r,r}^\top$ は正定値. 特に, 正則. $\square$

調和関数全体の構造

80/89

$$\delta_\varphi(X, Y) := \begin{cases} 1 & (\varphi(X) = Y) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

実は、調和関数全体は、全単射 φ から定まる調和関数 δ_φ によって $\mathbb{Q}$ 上生成される

補題 8

[Frankl-Graham '89]

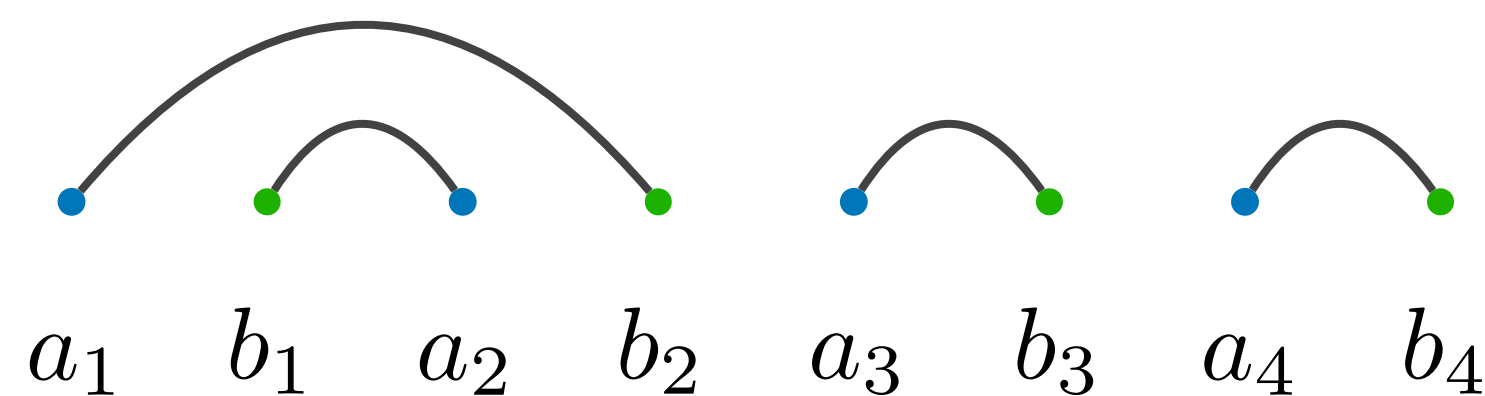
$$\mathcal{H} = \text{span}\{ \delta_\varphi \mid \varphi: A \rightarrow B \text{ bijection} \}$$

⊙ $\delta_\varphi \in \mathcal{H}$ より $\supseteq$ は明らか. $\subseteq$ を示す.

(1/3) $A = \{a_1, \dots, a_r\}$ と $B = \{b_1, \dots, b_r\}$ の元を一行に交互に並べ,

全単射 φ によって対応付けられる元同士を, 列の上半平面に円弧を描いて結ぶ

$$\begin{aligned} \varphi(a_1) &= b_2 \\ \varphi(a_2) &= b_1 \\ \varphi(a_3) &= b_3 \\ \varphi(a_4) &= b_4 \end{aligned}$$



このとき, 円弧同士が交差しないように描けるような φ を**非交差**とよぶ

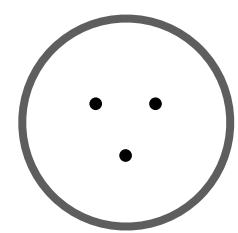
調和関数全体の構造

81 / 89

補題 8

[Frankl-Graham '89]

$$\mathcal{H} = \text{span}\{ \delta_\varphi \mid \varphi: A \rightarrow B \text{ bijection} \}$$



(2/3)

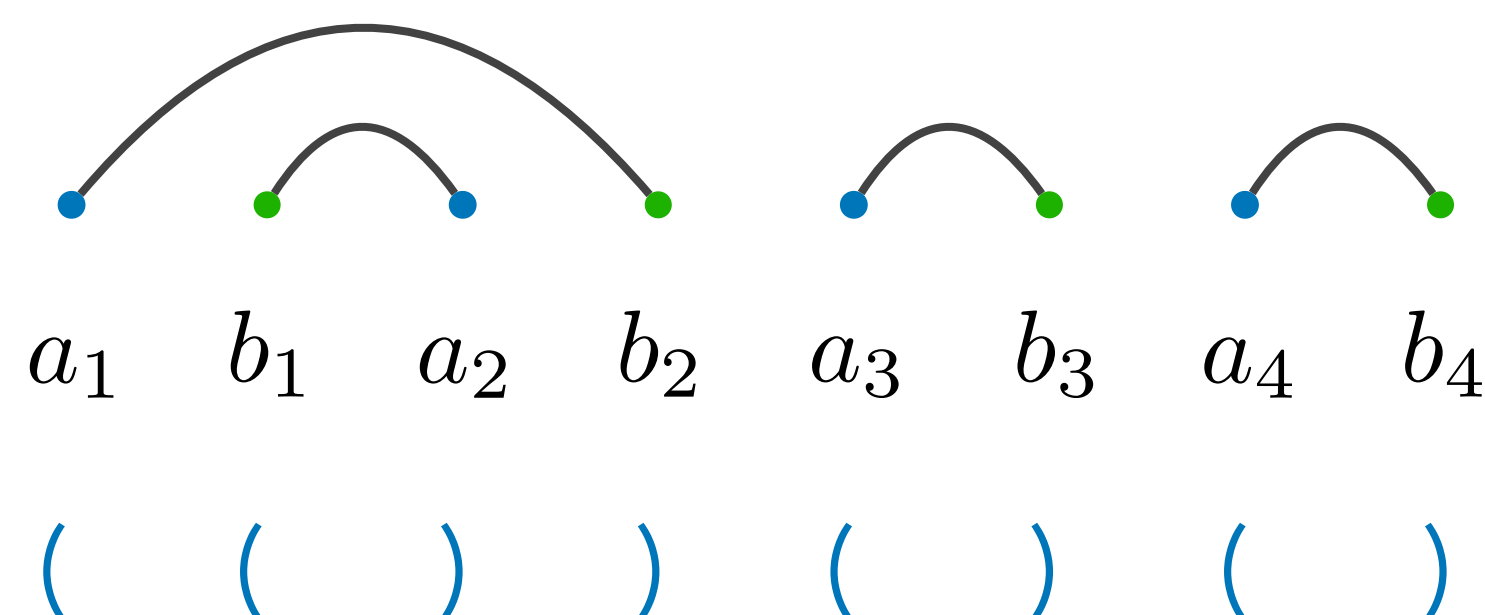
事実 : 非交差な全単射の数 = balanced な括弧列の数 = $\frac{1}{r+1} \binom{2r}{r}$ Catalan 数

補題 7 より, これは $\dim \mathcal{H}$ に等しいので,

$\{ \delta_\varphi \mid \varphi: A \rightarrow B \text{ non-crossing bijection} \}$ が線形独立 であることを示せばよい

$$\begin{aligned} \varphi(a_1) &= b_2 \\ \varphi(a_2) &= b_1 \\ \varphi(a_3) &= b_3 \\ \varphi(a_4) &= b_4 \end{aligned}$$

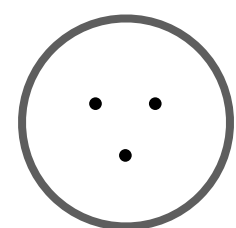
括弧列



目標 $\{ \delta_\varphi \mid \varphi: A \rightarrow B \text{ non-crossing bijection} \}$ は線形独立

82/89

$$\delta_\varphi(X, Y) := \begin{cases} 1 & (\varphi(X) = Y) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$



(3/3)

変数変換を行い, 以下の関数 $\lambda_\varphi: \binom{[2r]}{r} \rightarrow \mathbb{Q}$

$$\lambda_\varphi(S) := \delta_\varphi(A \cap S, B \setminus S) = \begin{cases} 1 & (|S \cap \{a, \varphi(a)\}| = 1 \text{ for all } a \in A) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

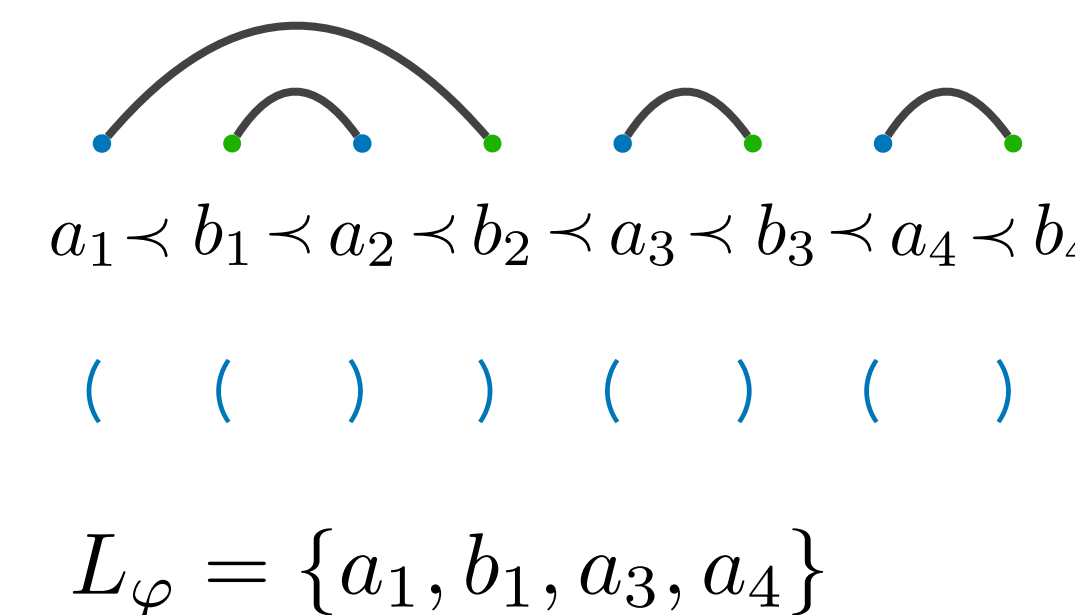
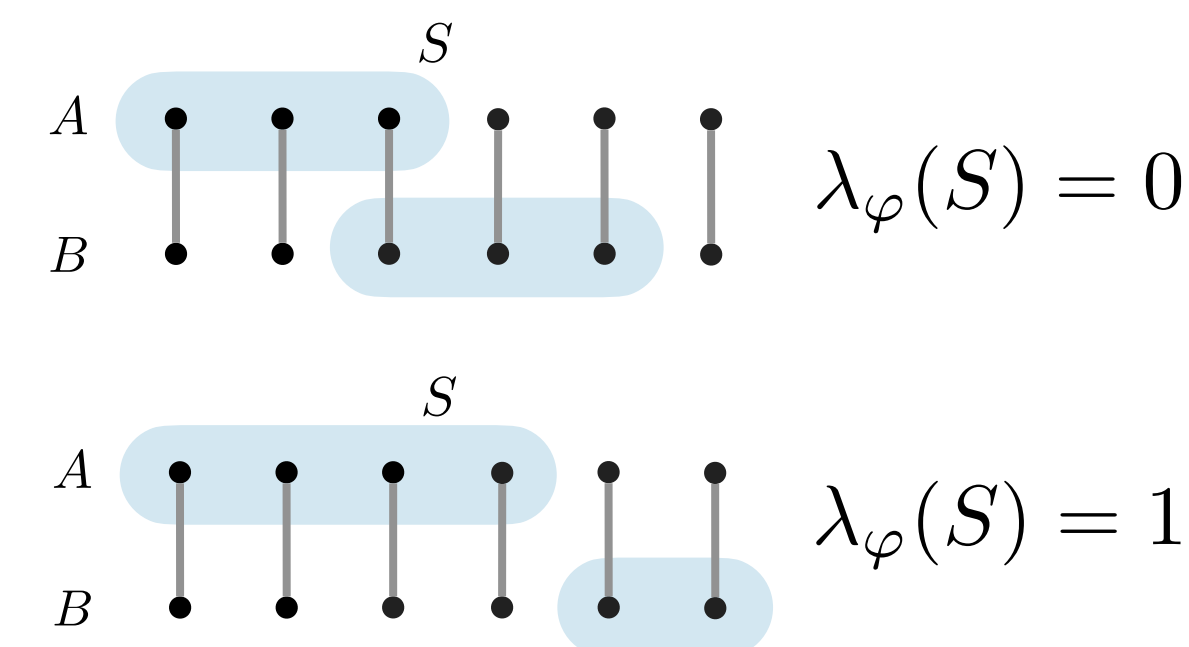
の線形独立性を示す.

$L_\varphi := \{ \text{円弧の左端点} \} = \{ \text{開括弧の位置} \} \subseteq E$ とすると,

$\lambda_\varphi(L_\varphi) = 1$ かつ, L_φ は $\lambda_\varphi(S) = 1$ なる S の中で辞書順最小

よって, $\mathcal{L} := \{ L_\varphi \mid \varphi \text{ bijection} \}$ とすると

行列 $(\lambda_\varphi(S))_{\varphi, S \in \mathcal{L}}$ は対角成分が 1 の上三角行列なので, 正則



主定理の証明

83 / 89

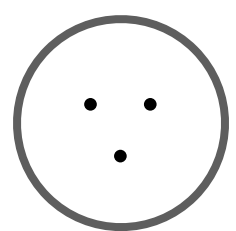
$c: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{Q}$ s.t. 任意の全単射 $\varphi: A \rightarrow B$ に対し $\sum_{U \subseteq A} c(U, \varphi(U)) = 1$

主定理 (μ を使った表示)

[O.-Schwarcz '26]

$$\mu(\emptyset, \emptyset) = \sum_{(U, V) \in \mathcal{S}} c(U, V) \mu(U, V)$$

$$\mu(X, Y) := \text{sgn}(X, Y) \det K[A - X + Y] \det K[B + X - Y]$$



(1/2)

補題 6

μ は調和的

補題 8

$\{ \text{harmonic fns} \} = \text{span} \{ \delta_\varphi \mid \varphi: A \rightarrow B \text{ bij} \}$

$$\alpha_\varphi \in \mathbb{Q}$$

より, $\mu(X, Y) = \sum_{\varphi: \text{bijection}} \alpha_\varphi \delta_\varphi(X, Y) \quad (\forall (X, Y) \in \mathcal{S})$ と展開できる

主定理の証明

84/89

$c: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{Q}$ s.t. 任意の全単射 $\varphi: A \rightarrow B$ に対し $\sum_{U \subseteq A} c(U, \varphi(U)) = 1$

主定理 (μ を使った表示)

[O.-Schwarcz '26]

$$\mu(\emptyset, \emptyset) = \sum_{(U,V) \in \mathcal{S}} c(U, V) \mu(U, V)$$

$\odot$ $\mu(\emptyset, \emptyset) = \sum_{\varphi: \text{bijection}} \alpha_{\varphi} \delta_{\varphi}(\emptyset, \emptyset) = \sum_{\varphi: \text{bijection}} \alpha_{\varphi}$ $\delta_{\varphi}(X, Y) := \begin{cases} 1 & (\varphi(X) = Y) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$

(2/2)

$$= \sum_{\varphi: \text{bijection}} \alpha_{\varphi} \sum_{U \subseteq A} c(U, \varphi(U)) = \sum_{\varphi: \text{bijection}} \alpha_{\varphi} \sum_{(U,V) \in \mathcal{S}} c(U, V) \delta_{\varphi}(U, V)$$

$$= \sum_{(U,V) \in \mathcal{S}} c(U, V) \sum_{\varphi: \text{bijection}} \alpha_{\varphi} \delta_{\varphi}(U, V) = \sum_{(U,V) \in \mathcal{S}} c(U, V) \mu(U, V)$$



調和性のさらなる帰結

✓ 演習問題 7

85 / 89

定理

[O.-Schwarcz '26]

$$A, B \in \mathcal{B}$$

マトロイドが**標数 0 の体上で表現可能**ならば,

$$\exists \ell \geq 0 \quad \exists A_0, B_0, A_1, B_1, \dots, A_\ell, B_\ell \in \mathcal{B}$$

$$\text{s.t.} \quad (A_0, B_0) = (A, B) \quad (A_\ell, B_\ell) = (B, A)$$

$$\exists x_i \in A_{i-1} \setminus B_{i-1}, y_i \in B_{i-1} \setminus A_{i-1}$$

$$\text{with } A_i = A_{i-1} - x_i + y_i, B_i = B_{i-1} + x_i - y_i \quad (\forall i \in [\ell])$$

White 予想で $(A', B') = (B, A)$ の場合 / Gabow 予想で $\ell > |A \setminus B|$ を許容する場合

公平配分において, 2 エージェント・同一加法的評価関数・

標数0の体上で表現可能なマトロイド制約下の EF1 配分の存在が導かれる

未解決問題リスト

86 / 89

- Gabow 予想
- 標数0の体上で表現可能なマトロイドに対する White 予想
- 一般のマトロイドに対する
抱き合わせ交換性と均衡改善交換性交換性の共通の一般化
- 一般のマトロイド制約下における
2 エージェント・同一加法的評価関数の EF1 配分の存在
- (標数 0 の体上で表現可能な) マトロイド制約下における
任意人数エージェント・同一加法的評価関数の EF1 配分の存在

まとめ

87 / 89

マトロイドの基は，豊かな交換性を備える離散構造である

1 時限目

交換性を味わう

交換性は，アルゴリズムの解析や公平配分理論などへの応用がある

2 時限目

証明のアプローチ

閉包（基本サーキット）やマトロイド交叉定理による証明のアプローチ

3 時限目

表現可能なマトロイドの交換性

表現可能なマトロイドに対しては，行列式の調和性に基づく証明も有効

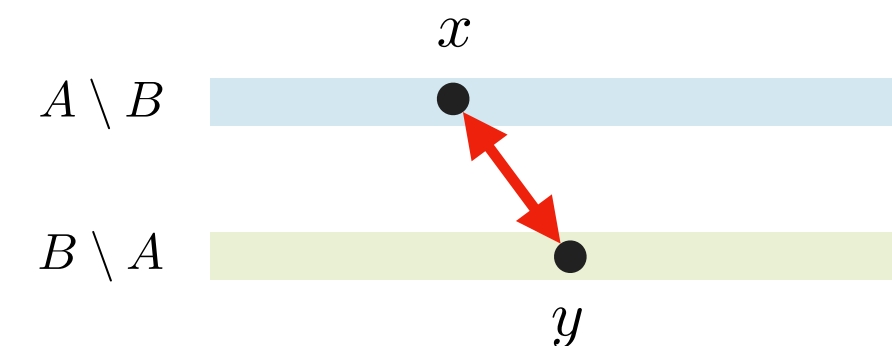
1. H. Akrami, S. Liu, R. Raj, and L. A. Végh. Matroids are equitable. *Combinatorica* 46, Article 22, 2026.
2. K. Bérczi, B. Mátravölgyi, and T. Schwarcz. Reconfiguration of basis pairs in regular matroids. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 177:105–142, 2026.
3. R. A. Brualdi. Comments on bases in dependence structures. *Bulletin of the Australian Mathematical Society* 1(2):161–167, 1969.
4. T. H. Brylawski. Some properties of basic families of subsets. *Discrete Mathematics* 6(4):333–341, 1973.
5. N. Buchbinder, M. Feldman, and M. Garg. Deterministic $(1/2+\epsilon)$ -approximation for submodular maximization over a matroid. *SIAM Journal on Computing* 52(4):945–967, 2023.
6. G. Călinescu and X. Wang. A $(1/2+1/60)$ -approximation algorithm for maximum weight series-parallel subgraph. *Discrete Applied Mathematics* 354:241–261, 2024.
7. A. W. M. Dress and W. Wenzel. Valuated matroids: a new look at the greedy algorithm. *Applied Mathematics Letters* 3:33–35, 1990.
8. A. W. M. Dress and W. Wenzel. Valuated matroids. *Advances in Mathematics* 93:214–250, 1992.
9. C. F. Dunkl. Orthogonal functions on some permutation groups. In *Relations Between Combinatorics and Other Parts of Mathematics, Proc. Sympos. Pure Math.* 34, pp. 129–147. AMS, 1979.
10. J. Edmonds. Submodular functions, matroids, and certain polyhedra. In *Combinatorial Structures and Their Applications*, pp. 69–87. Gordon and Breach, 1970.
11. Z. Fekete and J. Szabó. Equitable partitions to spanning trees in a graph. *Electronic Journal of Combinatorics* 18(1):P221, 2011.
12. A. Frank. A weighted matroid intersection algorithm. *Journal of Algorithms* 2(4):328–336, 1981.
13. P. Frankl and R. L. Graham. Old and new proofs of the Erdős-Ko-Rado theorem. *Journal of Sichuan University, Natural Science Edition* 26 (Special Issue):112–122, 1989.
14. H. N. Gabow. Decomposing symmetric exchanges in matroid bases. *Mathematical Programming* 10(1):271–276, 1976.
15. D. H. Gottlieb. A certain class of incidence matrices. *Proceedings of the American Mathematical Society* 17(6):1233–1237, 1966.
16. H. G. Grassmann. Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik. Otto Wigand, Leipzig, 1844.
17. C. Greene. A multiple exchange property for bases. *Proceedings of the American Mathematical Society* 39(1):45–50, 1973.
18. C. Greene. Another exchange property for bases. *Proceedings of the American Mathematical Society* 46(1):155–156, 1974.
19. W. V. D. Hodge and D. Pedoe. *Methods of Algebraic Geometry*, Vol. I. Cambridge University Press, 1947.
20. L. Huang, Y. Wang, C. Yang, and H. Zhou. Efficient submodular optimization under noise: local search is robust. *Advances in Neural Information Processing Systems* 35:26122–26134, 2022.

21. S. Krogdahl. A combinatorial base for some optimal matroid intersection algorithms. Technical Report STAN-CS-74-468, Stanford University, 1974.
22. S. Krogdahl. A combinatorial proof for a weighted matroid intersection algorithm. Computer Science Report 17, University of Tromsø, 1976.
23. S. Krogdahl. The dependence graph for bases in matroids. *Discrete Mathematics* 19(1):47–59, 1977.
24. J. P. S. Kung. Alternating basis exchanges in matroids. *Proceedings of the American Mathematical Society* 71(2):355–358, 1978.
25. J. Lee, M. Sviridenko, and J. Vondrák. Submodular maximization over multiple matroids via generalized exchange properties. *Mathematics of Operations Research* 35(4):795–806, 2010.
26. S. Li, Y. Jin, and D. I. Shuman. Scalable M-channel critically sampled filter banks for graph signals. *IEEE Transactions on Signal Processing* 67(15):3954–3969, 2019.
27. K. Murota. Discrete convex analysis. *Mathematical Programming* 83:313–371, 1998.
28. T. Nakasawa. Zur Axiomatik der linearen Abhängigkeit. I. Science Reports of the Tokyo Bunrika Daigaku, Section A 2:235–255, 1935.
29. S. Nematollahi, A. Vladu, and J. Zhao. Fixed-parameter tractable submodular maximization over a matroid. ITCS 2026, LIPIcs 362, 105:1–105:22, 2026.
30. T. Oki and S. Sakaue. No-regret $M^\natural$ -concave function maximization: stochastic bandit algorithms and NP-hardness of adversarial full-information setting. *Advances in Neural Information Processing Systems* 37:57418–57438, 2024.
31. T. Oki and T. Schwarcz. *Generalizing the Multiple Exchange Property for Matroid Bases*. arXiv:2511.16021v2, 2026.
32. J. Oxley. *Matroid Theory*. 2nd ed. Oxford University Press, 2011.
33. J. Plücker. Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. B. G. Teubner, Leipzig, 1868.
34. R. Rado. Axiomatic treatment of rank in infinite sets. *Canadian Journal of Mathematics* 1(4):337–343, 1949.
35. A. Schrijver. Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency. *Algorithms and Combinatorics* 24. Springer, 2003.
36. A. Shioura. M-convex function minimization under L1-distance constraint and its application to dock reallocation in bike-sharing system. *Mathematics of Operations Research* 47(2):1566–1611, 2022.
37. V. Traub and J. Vygen. Beating the integrality ratio for s-t-tours in graphs. *SIAM Journal on Computing* 52(6):FOCS18-37–FOCS18-84, 2023.
38. N. L. White. A unique exchange property for bases. *Linear Algebra and its Applications* 31:81–91, 1980.
39. H. Whitney. On the abstract properties of linear dependence. *American Journal of Mathematics* 57(3):509–533, 1935.
40. D. R. Woodall. An exchange theorem for bases of matroids. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 16(3):227–228, 1974.

補遺

補遺

同時交換性の証明



同時交換性 (symmetric exchange property / simultaneous exchange property)

[Brualdi '69]

$$\forall A, B \in \mathcal{B} \quad \forall x \in A \setminus B \quad \exists y \in B \setminus A \quad \text{s.t.} \quad A - x + y, B + x - y \in \mathcal{B}$$

∴ ある $y \in \text{In}_B(x) := \{y \in B \mid B + x - y \in \mathcal{B}\}$ が存在し $A - x + y \in \mathcal{B}$ を示す.

背理法：全ての $y \in \text{In}_B(x)$ に対して $A - x + y \notin \mathcal{B}$ を仮定

これは $y \in \text{cl}(A - x) \quad (\forall y \in \text{In}_B(x))$ を意味するので $\text{In}_B(x) \subseteq \text{cl}(A - x)$

$$\implies \text{cl}(\text{In}_B(x)) \subseteq \text{cl}(\text{cl}(A - x)) = \text{cl}(A - x)$$

閉包の単調性

閉包の冪等性

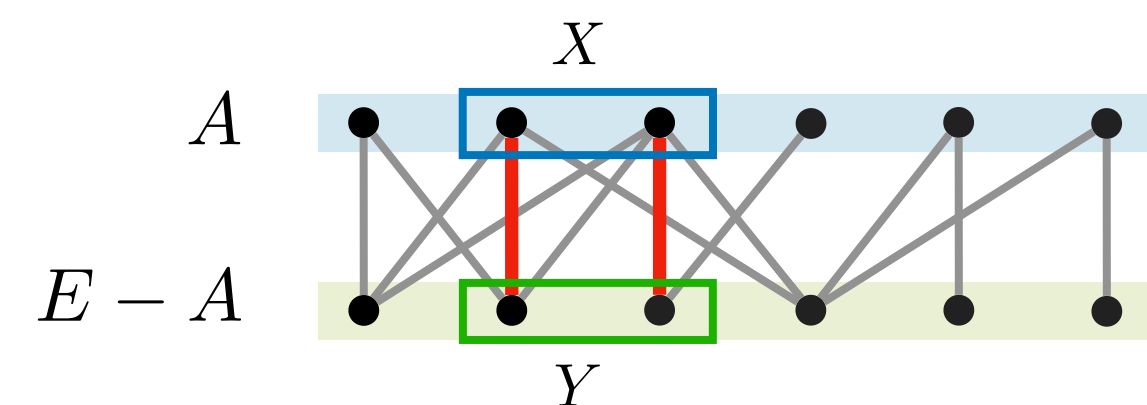
基本サーキット補題から $x \in \text{cl}(\text{In}_B(x))$ なので $x \in \text{cl}(A - x)$

すなわち $r(A - x) = r(A)$ だが、これは A が独立であることに矛盾



補遺

一意マッチング補題の証明



[Krogdahl '74, '76, '77]

補題3 (一意マッチング補題)

$$A \in \mathcal{B}, X \subseteq A, Y \subseteq E - A$$

誘導部分グラフ $G[X + Y]$ に完全マッチングが**唯一**存在 $\implies A - X + Y \in \mathcal{B}$

∴ $|X|$ に関する**帰納法**. $|X| = 0$ の場合は明らか. $|X| > 0$ とする.

(1/3) 完全マッチングの唯一性から, $G[X + Y]$ における次数が 1 の頂点 $y \in Y$ が存在
 y に隣接する唯一の頂点を $x \in X$ とする.

つまり, x は, $A - x + y \in \mathcal{B}$ となる X 内唯一の元なので $\text{In}_A(y) \cap X = \{x\}$

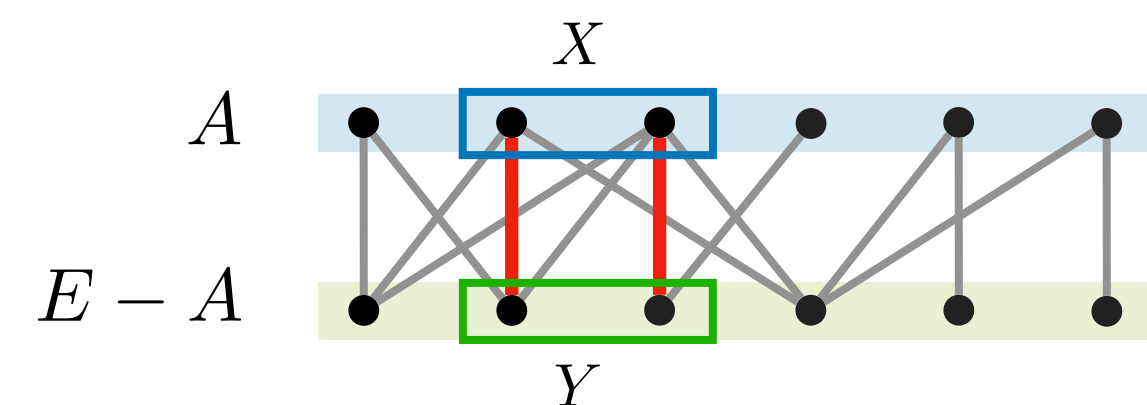
すなわち $\text{In}_A(y) \subseteq (A - X) + x$ より $y \in \text{cl}(\text{In}_A(y)) \subseteq \text{cl}((A - X) + x)$

基本サーキット補題

閉包の単調性

補遺

一意マッチング補題の証明



[Krogdahl '74, '76, '77]

補題3 (一意マッチング補題)

$$A \in \mathcal{B}, X \subseteq A, Y \subseteq E - A$$

誘導部分グラフ $G[X + Y]$ に完全マッチングが**唯一**存在 $\implies A - X + Y \in \mathcal{B}$

∴ 一方, $A - x + y \in \mathcal{B}$ より, $y \notin \text{cl}(A - x)$. 閉包の単調性から, $y \notin \text{cl}(A - X)$

(2/3)

$$\therefore y \in \text{cl}((A - X) + x) - \text{cl}(A - X)$$

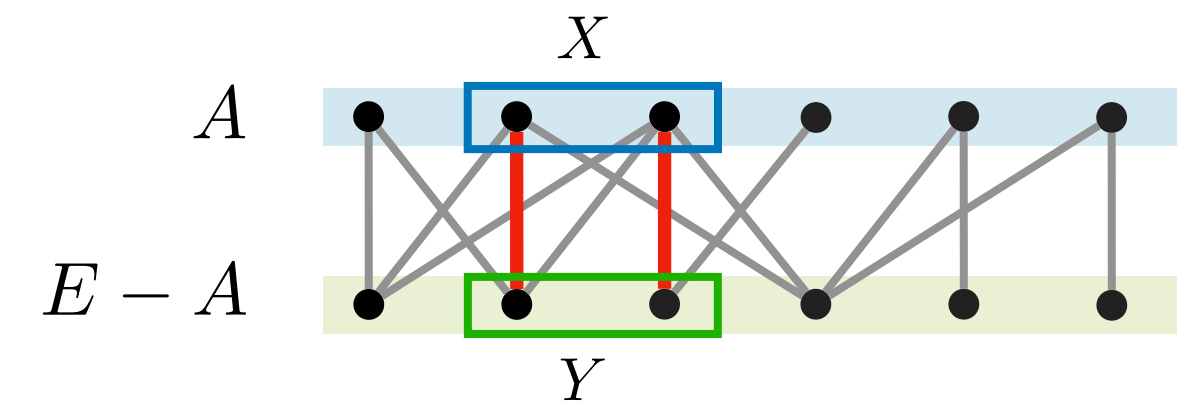
閉包の4つ目の性質から, $x \in \text{cl}(A - X + y) \subseteq \text{cl}(A - X + Y)$

$$y \in \text{cl}(S \cup \{x\}) - \text{cl}(S) \implies x \in \text{cl}(S \cup \{y\})$$

閉包の単調性

補遺

一意マッチング補題の証明



[Krogdahl '74, '76, '77]

補題3 (一意マッチング補題)

$$A \in \mathcal{B}, X \subseteq A, Y \subseteq E - A$$

誘導部分グラフ $G[X + Y]$ に完全マッチングが**唯一**存在 $\implies A - X + Y \in \mathcal{B}$

∴ $G[(X - x) + (Y - y)]$ も完全マッチングを唯一もつので、帰納法の仮定から、

(3/3)

$$A' := A - (X - x) + (Y - y) \in \mathcal{B}$$

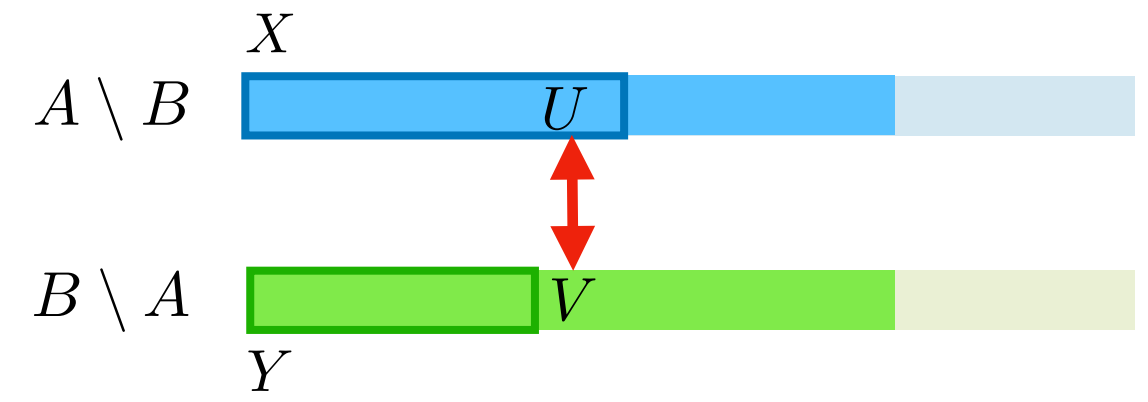
- $A' - x = A - X + (Y - y) \subseteq A - X + Y \subseteq \text{cl}(A - X + Y)$
- $x \in \text{cl}(A - X + Y)$ (前スライド)

より $A' \subseteq \text{cl}(A - X + Y)$ だが、 $A' \in \mathcal{B}$ なので、 $A - X + Y$ も基でなければならない



補遺

抱き合わせ交換性の証明



[O.-Schwarcz '26]

抱き合わせ交換性

$$\forall X \subseteq A \setminus B, Y \subseteq B \setminus A \quad \exists U \subseteq A \setminus B, V \subseteq B \setminus A$$

$$\text{s.t. } X \subseteq U, Y \subseteq V, |U| = |V| \leq r(X + Y), A - U + V, B + U - V \in \mathcal{B}$$

$\therefore$ $A \cap B$ を縮約, $E - (A \cup B)$ を削除することにより, $A \cap B = \emptyset, A + B = E$ を仮定してよい

(1/11) 各 $U \supseteq X, V \supseteq Y$ に対し,

$\mathbf{M}/X \setminus Y$ の基族

$$\bullet \quad B + U - V \in \mathcal{B} \iff B + (U - X) - V \in \mathcal{B}(\mathbf{M}/X \setminus Y)$$

$$\bullet \quad A - U + V \in \mathcal{B} \iff A - U + (V - Y) \in \mathcal{B}(\mathbf{M}/Y \setminus X)$$

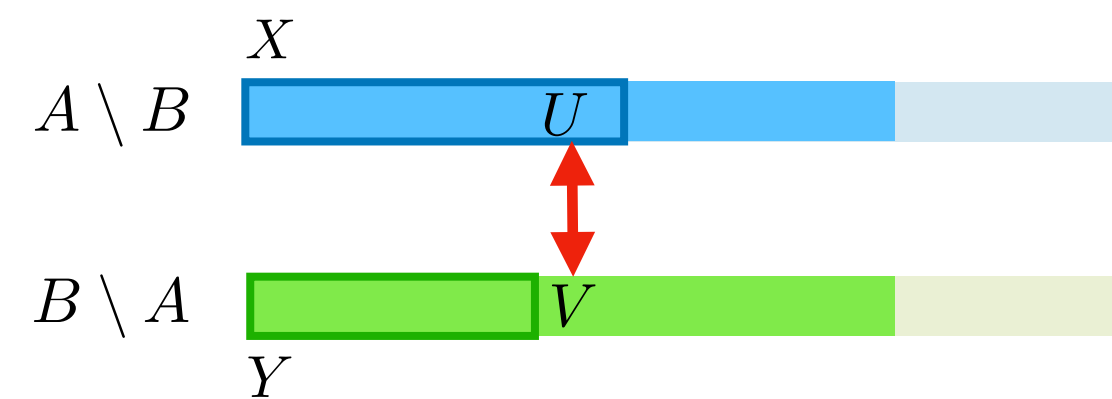
$$\iff E' - (A - U + (V - Y)) = B + (U - X) - V \in \mathcal{B}((\mathbf{M}/Y \setminus X)^*)$$

よって,

$$A - U + V, B + U - V \in \mathcal{B} \iff B + (U - X) - V \in \mathcal{B}(\mathbf{M}/X \setminus Y) \cap \mathcal{B}((\mathbf{M}/Y \setminus X)^*)$$

補遺

抱き合わせ交換性の証明



[O.-Schwarcz '26]

抱き合わせ交換性

$$\begin{aligned} & \forall X \subseteq A \setminus B, Y \subseteq B \setminus A \quad \exists U \subseteq A \setminus B, V \subseteq B \setminus A \\ \text{s.t. } & X \subseteq U, Y \subseteq V, |U| = |V| \leq r(X + Y), A - U + V, B + U - V \in \mathcal{B} \end{aligned}$$

∴ 逆に, $B' \in \mathcal{B}(\mathbf{M}/X \setminus Y) \cap \mathcal{B}((\mathbf{M}/Y \setminus X)^*)$ に対し,

(2/11)

$$U := (B' \cap A) + X \quad V := (B \setminus B') + Y$$

とすると, $X \subseteq U, Y \subseteq V, A - U + V, B + U - V \in \mathcal{B}$

$|U| = |B' \cap A| + |X|$ より, $|U| \leq r(X + Y) \iff |B' \cap A| \leq r(X + Y) - |X|$ から

$$\min\{ |B' \cap A| \mid B' \in \mathcal{B}(\mathbf{M}/X \setminus Y) \cap \mathcal{B}((\mathbf{M}/Y \setminus X)^*) \} \leq r(X + Y) - |X|$$

を示せば良い

補遺

抱き合わせ交換性の証明

目標 $\min\{ |B' \cap A| \mid B' \in \mathcal{B}(\mathbf{M}/X \setminus Y) \cap \mathcal{B}((\mathbf{M}/Y \setminus X)^*) \} \leq r(X + Y) - |X|$

⋮ 重み関数 $w: E' \rightarrow \mathbb{Z}$ を $w(e) := \begin{cases} 1 & (e \in A - X) \\ 0 & (e \in B - Y) \end{cases}$ とすると $|B' \cap A| = w(B')$

(3/11)

$$E' := E - X - Y$$

$$w(B') := \sum_{e \in B'} w(e)$$

Frank の重み分割定理により, $\exists c, d: E' \rightarrow \mathbb{Z}$ s.t. $c + d = w$,

$$\begin{aligned} & \min\{ |B' \cap A| \mid B' \in \mathcal{B}(\mathbf{M}/X \setminus Y) \cap \mathcal{B}((\mathbf{M}/Y \setminus X)^*) \} \\ &= \min_{A' \in \mathcal{B}(\mathbf{M}/X \setminus Y)} c(A') + \min_{B' \in \mathcal{B}((\mathbf{M}/Y \setminus X)^*)} d(B') \end{aligned}$$

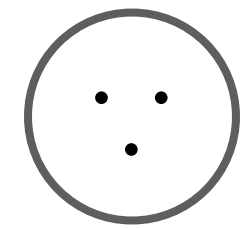
一般性を失わず $c(e) \leq 0$ ($\forall e \in E'$) としてよい. $c + d = w$ より, $d(e) \geq 0$ ($\forall e \in E'$)

補遺

抱き合わせ交換性の証明

目標

$$\min_{A' \in \mathcal{B}(\mathbf{M}/X \setminus Y)} c(A') + \min_{B' \in \mathcal{B}((\mathbf{M}/Y \setminus X)^*)} d(B') \leq r(X + Y) - |X|$$



$C_{\leq t} := \{e \in E' \mid c(e) \leq t\} \quad (t \in \mathbb{Z}_{\leq 0})$ とすると, 貪欲法により

(4/11)

$$\begin{aligned} \min_{A' \in \mathcal{B}(\mathbf{M}/X \setminus Y)} c(A') &= \sum_{t \leq 0} (r_{\mathbf{M}/X \setminus Y}(C_{\leq t}) - r_{\mathbf{M}/X \setminus Y}(C_{\leq t-1}))t \\ &= \sum_{t \leq 0} r_{\mathbf{M}/X \setminus Y}(C_{\leq t})t - \sum_{t \leq -1} r_{\mathbf{M}/X \setminus Y}(C_{\leq t-1})(t+1) \\ &= - \sum_{t \leq -1} r_{\mathbf{M}/X \setminus Y}(C_{\leq t}) \end{aligned}$$

補遺

抱き合わせ交換性の証明

目標

$$\min_{A' \in \mathcal{B}(\mathbf{M}/X \setminus Y)} c(A') + \min_{B' \in \mathcal{B}((\mathbf{M}/Y \setminus X)^*)} d(B') \leq r(X + Y) - |X|$$

∴ 同様に, $D_{\leq t} := \{e \in E' \mid d(e) \leq t\}$ ($t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) とすると

(5/11)

$$\min_{B' \in \mathcal{B}((\mathbf{M}/Y \setminus X)^*)} d(B') = \sum_{t \geq 0} (r_{(\mathbf{M}/Y \setminus X)^*}(D_{\leq t}) - r_{(\mathbf{M}/Y \setminus X)^*}(D_{\leq t-1}))t$$

$$r_{(\mathbf{M}/Y \setminus X)^*}(D_{\leq t}) = r_{\mathbf{M}/Y \setminus X}(E' - D_{\leq t}) + |D_{\leq t}| - r_{\mathbf{M}/Y \setminus X}(E')$$

$$D_{\geq t} := \{e \in E' \mid d(e) \geq t\} \Rightarrow = r_{\mathbf{M}/Y \setminus X}(D_{\geq t+1}) + |D_{\leq t}| - r_{\mathbf{M}/Y \setminus X}(E') \quad \text{を使うと}$$

$$= \sum_{t \geq 0} (r_{\mathbf{M}/Y \setminus X}(D_{\geq t+1}) - r_{\mathbf{M}/Y \setminus X}(D_{\geq t}) + |D_t|)t$$

$$D_t := \{e \in E' \mid d(e) = t\}$$

補遺

抱き合わせ交換性の証明

目標

$$\min_{A' \in \mathcal{B}(\mathbf{M}/X \setminus Y)} c(A') + \min_{B' \in \mathcal{B}((\mathbf{M}/Y \setminus X)^*)} d(B') \leq r(X + Y) - |X|$$

∴ 同様に, $D_{\leq t} := \{e \in E' \mid d(e) \leq t\}$ ($t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) とすると

(6/11)

$$\min_{B' \in \mathcal{B}((\mathbf{M}/Y \setminus X)^*)} d(B') = \sum_{t \geq 0} (r_{(\mathbf{M}/Y \setminus X)^*}(D_{\leq t}) - r_{(\mathbf{M}/Y \setminus X)^*}(D_{\leq t-1}))t$$

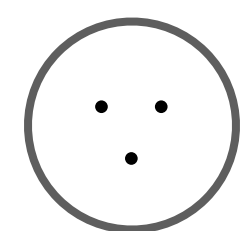
$$\begin{aligned} \text{前スライド} &= \sum_{t \geq 0} (r_{\mathbf{M}/Y \setminus X}(D_{\geq t+1}) - r_{\mathbf{M}/Y \setminus X}(D_{\geq t}) + |D_t|)t \\ &= \sum_{t \geq 1} r_{\mathbf{M}/Y \setminus X}(D_{\geq t})(t-1) - \sum_{t \geq 0} r_{\mathbf{M}/Y \setminus X}(D_{\geq t})t + \sum_{t \geq 0} |D_t|t \\ &= - \sum_{t \geq 1} r_{\mathbf{M}/Y \setminus X}(D_{\geq t}) + \sum_{t \geq 1} |D_{\geq t}| \end{aligned}$$

補遺

抱き合わせ交換性の証明

目標

$$\min_{A' \in \mathcal{B}(\mathbf{M}/X \setminus Y)} c(A') + \min_{B' \in \mathcal{B}((\mathbf{M}/Y \setminus X)^*)} d(B') \leq r(X + Y) - |X|$$



(7/11)

$$(左辺) = - \sum_{t \leq -1} r_{\mathbf{M}/X \setminus Y}(C_{\leq t}) - \sum_{t \geq 1} r_{\mathbf{M}/Y \setminus X}(D_{\geq t}) + \sum_{t \geq 1} |D_{\geq t}|$$

$$= - \sum_{t \leq 1}^M (r_{\mathbf{M}/X \setminus Y}(C_{\leq -t}) + r_{\mathbf{M}/Y \setminus X}(D_{\geq t})) + \sum_{t=1}^M |D_{\geq t}|$$

M : 十分大

$$= - \sum_{t \leq 1}^M (r(C_{\leq -t} + X) - |X| + r(D_{\geq t} + Y) - |Y|) + \sum_{t=1}^M |D_{\geq t}|$$

$r_{\mathbf{M}/X \setminus Y}(S) = r(S + X) - |X|$

目標

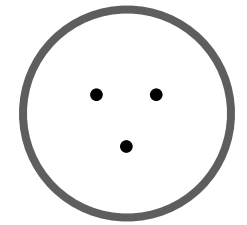
$$\sum_{t=1}^M (r(C_{\leq -t} + X) + r(D_{\geq t} + Y)) \geq \sum_{t=1}^M |D_{\geq t}| - r(X + Y) + (M + 1)|X| + M|Y|$$

補遺

抱き合わせ交換性の証明

目標

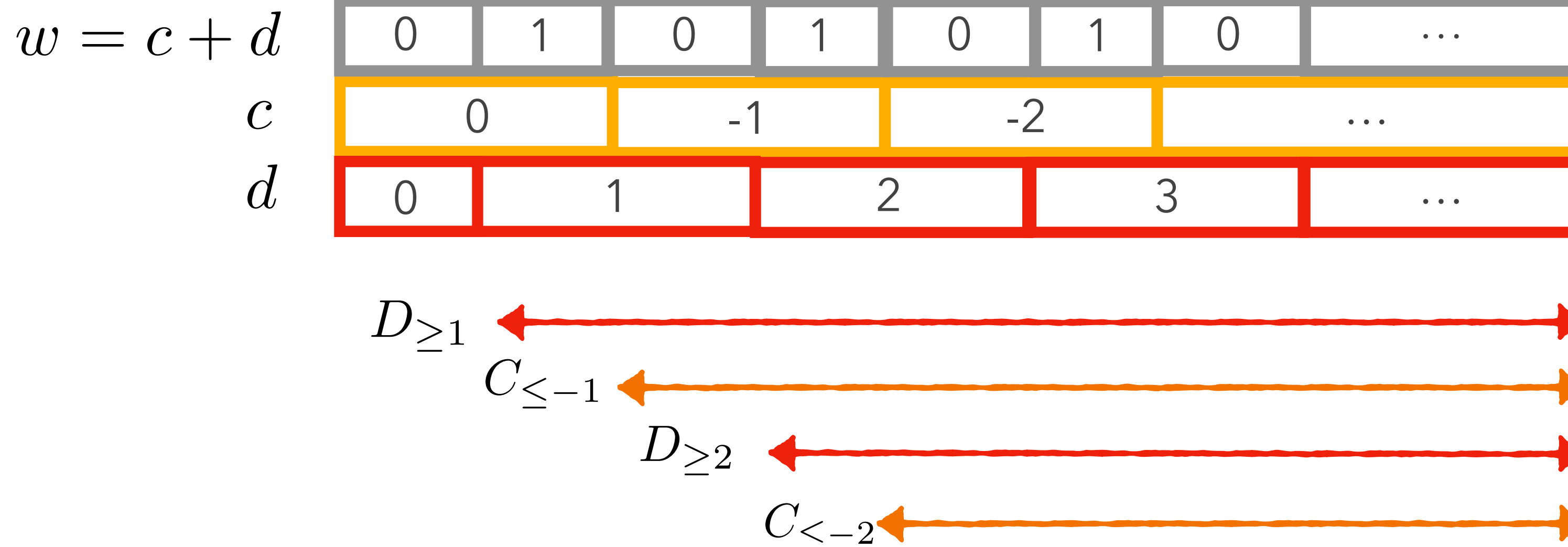
$$\sum_{t=1}^M (r(C_{\leq -t} + X) + r(D_{\geq t} + Y)) \geq \sum_{t=1}^M |D_{\geq t}| - r(X + Y) + (M + 1)|X| + M|Y|$$



考察 : $w = c + d$ は 01-値 なので, 以下の包含関係がある :

(8/11)

$$E' = D_{\geq 0} \supseteq C_{\leq 0} \supseteq D_{\geq 1} \supseteq C_{\leq -1} \supseteq D_{\geq 2} \supseteq C_{\leq -2} \supseteq \cdots$$

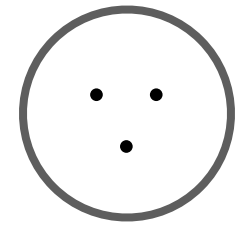


補遺

抱き合わせ交換性の証明

目標

$$\sum_{t=1}^M (r(C_{\leq -t} + X) + r(D_{\geq t} + Y)) \geq \sum_{t=1}^M |D_{\geq t}| - r(X + Y) + (M + 1)|X| + M|Y|$$



階数関数の劣モジュラ性から, 任意の $t \geq 0$ に対し,

(9/11)

$$r(C_{\leq -t} + X) + r(D_{\geq t+1} + X + Y) \geq r(D_{\geq t+1} + X) + r(C_{\leq -t} + X + Y) \quad \left\langle D_{\geq t+1} \subseteq C_{\leq -t} \right\rangle$$

$$r(C_{\leq -t} + X + Y) + r(D_{\geq t} + Y) \geq r(C_{\leq -t} + Y) + r(D_{\geq t} + X + Y) \quad \left\langle C_{\leq -t} \subseteq D_{\geq t} \right\rangle$$

$t = 1$ から M まで和をとり, 辺々足すと

$$r(D_{\geq M+1} + X + Y) =$$

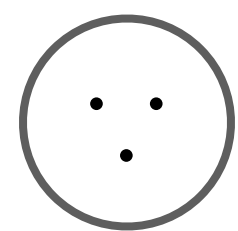
$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^M (r(C_{\leq -t} + X) + r(D_{\geq t} + Y)) &\geq \sum_{t=1}^M (r(D_{\geq t+1} + X) + r(C_{\leq -t} + Y)) - r(X + Y) + r(D_{\geq 1} + X + Y) \\ &\geq \sum_{t=1}^{M+1} r(D_{\geq t} + X) + \sum_{t=1}^M r(C_{\leq -t} + Y) - r(X + Y) \end{aligned}$$

補遺

抱き合わせ交換性の証明

目標

$$\sum_{t=1}^M (r(C_{\leq -t} + X) + r(D_{\geq t} + Y)) \geq \sum_{t=1}^M |D_{\geq t}| - r(X + Y) + (M + 1)|X| + M|Y|$$



(10/11)

前スライド：左辺 = $\sum_{t=1}^{M+1} r(D_{\geq t} + X) + \sum_{t=1}^M r(C_{\leq -t} + Y) - r(X + Y)$

階数関数の単調性

 A に含まれるので独立

- $r(D_{\geq t} + X) \geq r((D_{\geq t} \cap A) + X) = |D_{\geq t} \cap A| + |X|$
- $r(C_{\leq -t} + Y) \geq r((C_{\leq -t} \cap B) + Y) = |C_{\leq -t} \cap B| + |Y|$

よって,

$$D_{\geq t} = (D_{\geq t} \cap A) \cup (C_{\geq -t} \cap B)$$

を示せば, 目標の不等式が従う

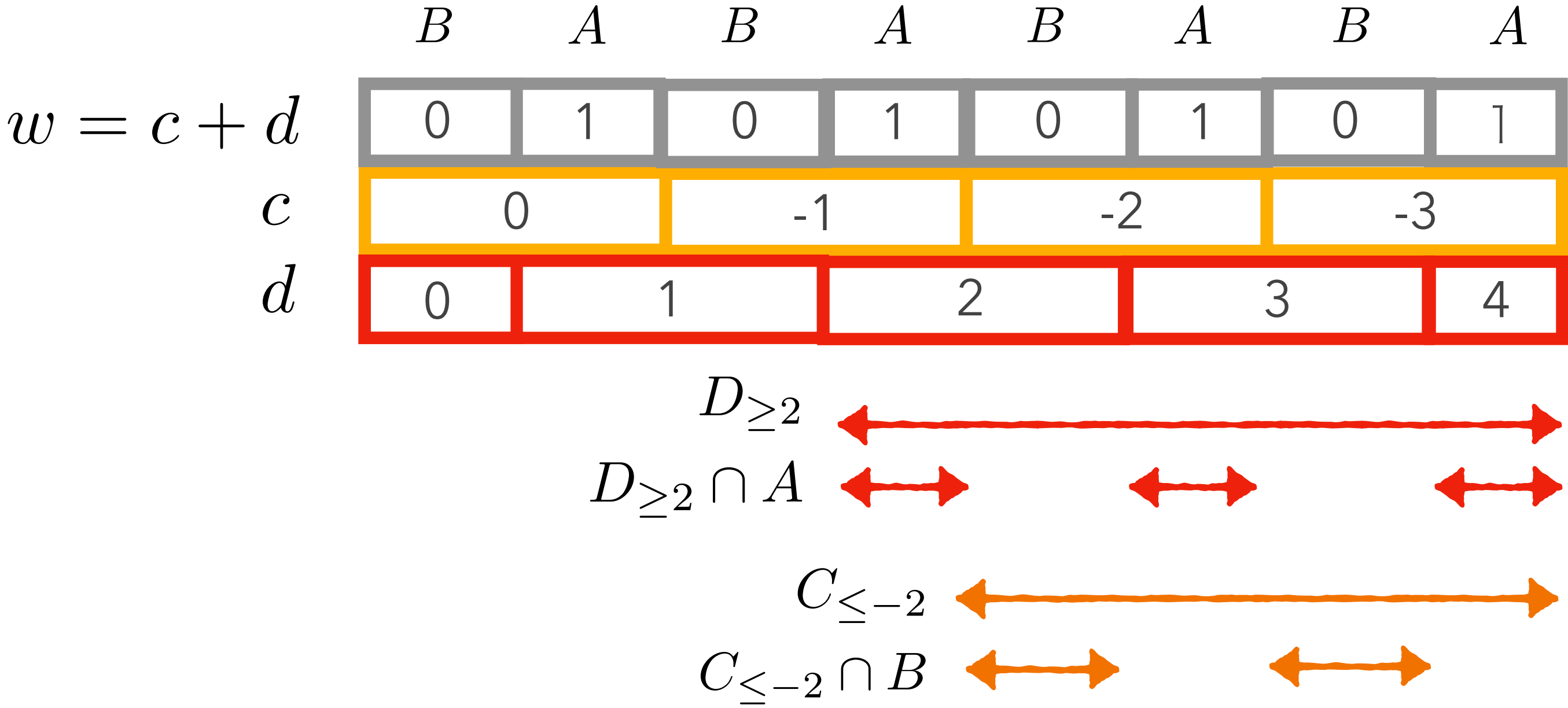
補遺

抱き合わせ交換性の証明

目標 $D_{\geq t} = (D_{\geq t} \cap A) \cup (C_{\geq -t} \cap B)$

$\odot$ $w(e) := \begin{cases} 1 & (e \in A - X) \\ 0 & (e \in B - Y) \end{cases}$ を思い出すと, 下の図から, 正しいことがわかる $\square$

(11/11)



補遺

均衡改善 Grassmann-Plücker 恒等式の証明

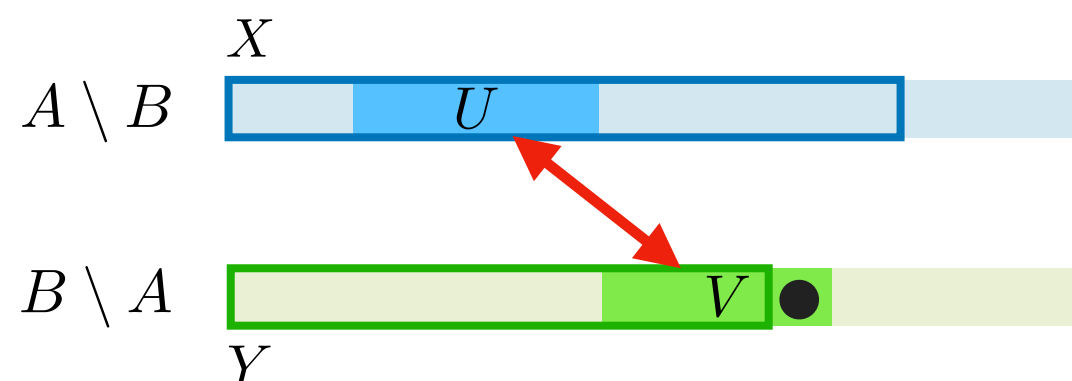
均衡改善 Grassmann-Plücker 恒等式

$X \subseteq A \setminus B, Y \subseteq B \setminus A$ with $|X| > |Y|$ [O.-Schwarcz '26]

$$\det K[A] \det K[B] = \sum_{\substack{U \subseteq X \\ V \subseteq B \setminus A : |V \setminus Y| = 1}} \pm \frac{1}{|U| \binom{|X|}{|U|}} \det K[A - U + V] \det K[B + U - V]$$

具体値は無視して, $\text{supp}(c) \subseteq \mathcal{U} := \{ (U, V) \in \mathcal{S} \mid U \subseteq X, |V \setminus Y| = 1 \}$

となる $c: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{Q}$ で $\sum_{U \subseteq A \setminus B} c(U, \varphi(U)) = 1 \quad (\forall \varphi)$ を満たすものの存在を示す.



補遺

均衡改善 Grassmann-Plücker 恒等式の証明

目標

$$\text{supp}(c) \subseteq \mathcal{U} := \{ (U, V) \in \mathcal{S} \mid U \subseteq X, |V \setminus Y| = 1 \}$$

となる $c: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{Q}$ で $\sum_{U \subseteq A \setminus B} c(U, \varphi(U)) = 1 \quad (\forall \varphi)$ を満たすものが存在

⊙ $c(U, V)$ の値を $|U| (= |V|)$ のみに依存させる $\left(c(U, V) := \begin{cases} x(|U|) & ((U, V) \in \mathcal{U}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \right)$ ならば
(1/2)

$$\sum_{U \subseteq A \setminus B} c(U, \varphi(U)) = \sum_{U \subseteq A \setminus B : (U, \varphi(U)) \in \mathcal{U}} x(|U|)$$

$$= \sum_{j=1}^{|Y|+1} \left| \{ U \in \binom{X}{j} \mid |\varphi(U) \setminus Y| = 1 \} \right| \cdot x(j)$$

$$|\{ U \subseteq A \setminus B \mid (U, \varphi(U)) \in \mathcal{U}, |U| = j \}|$$

補遺

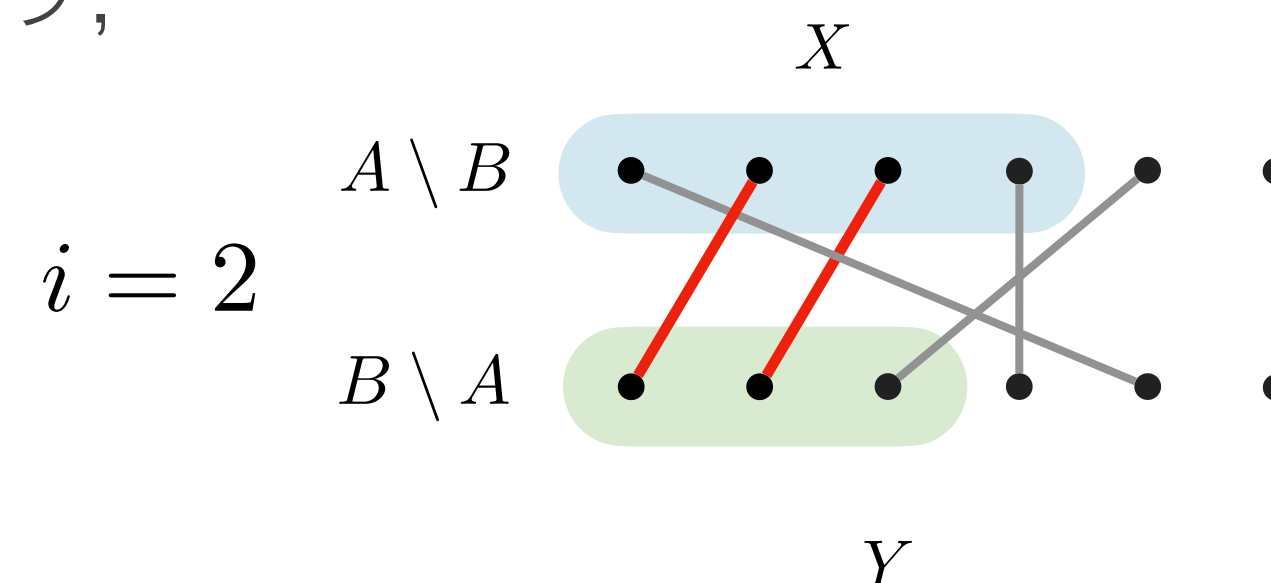
均衡改善 Grassmann-Plücker 恒等式の証明

目標 $\sum_{j=1}^{|Y|+1} |\{ U \in \binom{X}{j} \mid |\varphi(U) \setminus Y| = 1 \}| \cdot x(j) = 1 \quad (\forall \varphi)$ を満たす $x: [|X|] \rightarrow \mathbb{Q}$ が存在

∴ 全単射 φ に対して, $|\{ U \in \binom{X}{j} \mid |\varphi(U) \setminus Y| = 1 \}| = |\{ U \in \binom{X}{j} \mid |\varphi(U) \cap Y| = j - 1 \}|$ は

(2/2) $i := |\{ a \in X \mid \varphi(a) \in Y \}|$ のみから定まる量 $C(i, j)$ であり,

とくに $C(i, j) \begin{cases} \neq 0 & (j - 1 \leq i) \\ = 0 & (j - 1 > i) \end{cases}$ なので,



行列 $C = (C(i, j))_{0 \leq i \leq |Y|, 1 \leq j \leq |Y|+1}$ は対角非零の下三角 $\Rightarrow$ 正則.

よって, $x = C^{-1} \mathbf{1}$ とすればよい.



補遺

符号の正確な定義

$$K \in \mathbb{Q}^{r \times 2r}$$

$$A, B \in \binom{[2r]}{r}, A \cap B = \emptyset, A + B = [2r]$$

$$X = \{x_1, \dots, x_t\} \subseteq A \quad (x_1 < \dots < x_t)$$

$$Y = \{y_1, \dots, y_t\} \subseteq B \quad (y_1 < \dots < y_t)$$

$$K = \begin{pmatrix} \overset{\bullet}{1} & 2 & \overset{\bullet}{3} & \overset{\bullet}{4} & \overset{\bullet}{5} & \overset{\bullet}{6} \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 \end{pmatrix}$$

$$A = \{1, 3, 4\} \quad \bullet X = \{1, 4\} \quad \bullet Y = \{5, 6\}$$

$$K[A] = \begin{pmatrix} \overset{\bullet}{1} & & \overset{\bullet}{3} & \overset{\bullet}{4} \\ 11 & 13 & 14 \\ 21 & 23 & 24 \end{pmatrix} \quad K[A; -X + Y] = \begin{pmatrix} & \overset{\bullet}{5} & & \overset{\bullet}{6} \\ 15 & 13 & 16 \\ 25 & 23 & 26 \end{pmatrix}$$

- $K[A; -X, +Y] := K[A]$ のうち, 各 $1 \leq i \leq t$ について,
 x_i に対応する列を y_i に対応する列で置き換えた行列
- $K[B; +X, -Y]$ も同様に定義
- $\mu(X, Y) := \det K[A; -X, +Y] \det K[B; +X, -Y]$