

時間の流れと共に変化する偶然現象の数学モデルである確率過程において、その偶然性の源となる要素のようなものを、ノイズと呼んでいる。ノイズは、innovationとも呼ばれ、確率過程よりノイズを抜き出し、逆にそれをノイズより再構成する問題を innovation problem と云う。

離散時間 \mathbf{T} (ここでは簡単のため $\mathbf{T} = \mathbf{Z}$ とする ; $\mathbf{T} = \mathbf{Z}_- := \{\dots, -n, \dots, -1, 0\}$ や $\mathbf{T} = \mathbf{Z}_+ := \{0, 1, \dots, n, \dots\}$ とすることもよくある) の確率過程の場合では、ノイズとして、i.i.d. 確率変数列 $\{\xi_n, n \in \mathbf{T}\}$ を考えるのが常である。任意の確率分布は $[0, 1]$ 上の一様分布の像測度として得られることに留意すれば、 $[0, 1]$ 上の一様分布に従う i.i.d. 確率変数列を考えれば十分であり、これは一様ノイズと呼ばれる。innovation problem は、与えられた確率過程 $\{X_n, n \in \mathbf{Z}\}$ を、一様ノイズ $\{\xi_n\}$ を用いて、任意の n で

$$X_n = f_n(\xi_i, i \leq n)$$

の形に表現する問題と云ってもよく、それは次の様な確率漸化式

$$X_n = g_n(X_i, i \leq n-1; \xi_n)$$

を通して研究されることが多い。これは Lévy や Wiener 以来の問題であるが、特に A. M. Vershik によって深く研究されてきた (cf. [V]. Vershik は、これを Lévy-Bernstein-Rosenblatt の問題と呼んでいる)。

innovation problem は、filtration (部分 σ -集合体の増大系) の言葉を用いても定式化することが出来、そこでは、ノイズは互いに独立で定常な部分 σ -集合体の系 $\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbf{Z}\}$ のことである。あるいは、次のように云っても同じで、この定義だとそのまま連続時間の場合に移行出来る。

Definition.1 ノイズ $\{\mathcal{F}_{m,n}, T_n\}$ とは、ある確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) 上の部分 σ -集合体の系

$$\mathcal{F}_{m,n} \subset \mathcal{F}, \quad m \leq n, \quad m, n \in \mathbf{Z}$$

であって、次の性質を満たすもののことである ; (以下では、部分 σ -集合体は、 P -null set を全て含むものとし、 σ -集合体に関する等号は P -null set の違いを無視して考える)

- (1) $\mathcal{F}_{m,m} = \{\emptyset, \Omega\}, \forall m,$
- (2) $l \leq m \leq n$ のとき $\mathcal{F}_{l,m} \vee \mathcal{F}_{m,n} = \mathcal{F}_{l,n}$ であり、 $\mathcal{F}_{l,m}$ と $\mathcal{F}_{m,n}$ は独立、
- (3) $\{T_n\}$ は、 $(\Omega, \mathcal{F}_{-\infty, \infty}; = \bigvee_{m>0} \mathcal{F}_{-m, m}, P)$ 上の 1 径数保測変換群であって、

$$T_n(\mathcal{F}_{k,l}) = \mathcal{F}_{k+n, l+n}.$$

本質的には、i.i.d. $\{\xi_n\}$ によって、 $\mathcal{F}_{m,n} = \sigma\{\xi_i; m < i \leq n\}$ を考えていることと変わり無い。

この定義は、そのまま連続時間 T の場合に、移行出来、その代表的な例に Gaussian white noise や Poissonian noise があるが、B. Tsirelson によるとこれらは linear なノイズであって、それ以外に non-linear なノイズが多様に存在する。これらのノイズを概観し、innovation problem との関連について論ずる。

References

- [T 1] B. Tsirelson, Innovation, ICM 1998, preprint
- [T 2] B. Tsirelson, Unitary Brownian motions are linearizable, preprint
- [T 3] B. Tsirelson, Five noises, preprint
- [V] A. M. Vershik, The theory of decreasing sequences of measurable partitions, St. Petersburg Math. J., 6, No.4(1995), 705-761
- [W] 渡辺信三、確率過程におけるノイズ (filtration の同型問題と martingale)、1998 年度日本数学会秋季総合分科会総合講演・企画特別講演アブストラクト、日本数学会、1998, 37-47