

パンルヴェ方程式のダイナミクス

— モデュライ空間上の力学系 —

岩崎 克則 (九州大学・大学院数理学研究院)

講義内容. この講義では, パンルヴェ第 VI 方程式について考察する. これは, 19 世紀から 20 世紀への変わり目に P. パンルヴェとその弟子 B. ガンピエによって発見された, 六種類の二階非線形常微分方程式の中の一つである. 特殊関数論的には, 二階線形常微分方程式であるガウスの超幾何方程式の非線形版に相当する. パンルヴェ方程式の外見はかなり不恰好であるが, 実はその背後に極めて豊かな幾何学的構造が横たわっている. この構造と関連させてパンルヴェ方程式のダイナミクスを論じることは興味深い. この講義では, リーマン・ヒルベルト対応の観点に立ち, さまざまな幾何学的手法を用いて, この力学系の諸様相をできるだけ統一的・包括的に紹介したい. パンルヴェ方程式は, 従来, 可積分系として扱われることが殆どであったが, この講義ではエルゴード理論や定性的力学系の立場からこれを扱う. そしてこの方程式のカオス系としての性格を明らかにする. 談話会では講義の概要を手短かに概説する.

キーワード. パンルヴェ方程式, 非自励ハミルトン力学系, 共役写像の方法, パンルヴェ性, 安定放物型接続のモデュライ空間, 基本群の表現のモデュライ空間, リーマン・ヒルベルト対応, リーマン・ヒルベルト問題, アフィン・ワイル群, 等モノドロミー流, パンルヴェ流, リッカチ流, 組み紐群, モジュラー群, コクセター群, アフィン三次曲面族, ベックルント変換, 単純孤立特異点, 最小特異点解消, ロンスキアン構成, 正準座標, 離散力学系, 代数曲面上の双有理写像, エルゴード理論, カオス, エントロピー, 双曲型不変確率測度, (不)安定カレント, 冪幾何, ニュートン図形, 代数関数解.

1. はじめに
2. 力学系としてのパンルヴェ方程式
3. 安定放物型接続のモジュライ空間 (相空間)
4. リーマン・ヒルベルト対応 (共役写像)
5. 等モノドロミー流とパンルヴェ流
6. 指標多様体・三次曲面・特異点
7. ベックルント変換 (対称性)
8. 非線形モノドロミー (ポアンカレ回帰写像)
9. 特異点解消とリッカチ解 (古典軌道)
10. ロンスキアン構成と正準座標
11. エルゴード理論, カオス力学系理論の考え方
12. 代数曲面上の双有理写像の力学系
13. カオス系としてのパンルヴェ方程式
14. おわりに

基礎知識. 代数幾何, シンプレクティック幾何, 群論, 微分方程式論, 力学系, エルゴード理論など, さまざまな数学が出てくると思います. しかし, これらを予備知識として要求するわけではありません. むしろ, パンルヴェ方程式という素材を通じて, これらが有機的に関連しあっている様子を見て頂けたらよいと思います.

参考書. 下記以外の文献は授業中に紹介します.

K. Iwasaki and T. Uehara, *An ergodic study of Painlevé VI*, Math. Ann. **338** (2007), 295–345.

M. Inaba, K. Iwasaki and M.-H. Saito, *Dynamics of the sixth Painlevé equation*, Théories asymptotiques et équations de Painlevé, Séminaires et Congrès **14** (2006), 103–167.