

非線形発展方程式のノイズによる正則化

堤 誉志雄 (Yoshio TSUTSUMI) *

非線形発展方程式に関する基本的な研究テーマとして、時間大域解の存在・非存在の問題がある。これは、適当な函数空間を設定すれば、解が時間的にずっと存在するかと言う問題であり、方程式によっては存在する場合もしない場合もあることが知られている。有名なのは非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の場合で、滑らかな時間大域解の存在問題は、古くは Leray, Hopf のような数学者の挑戦を受けながら未だに解決されていない。これらの問題に対しては非線形偏微分方程式論（すなわち、決定論的な解析）から様々な研究がなされて来たが、最近ノイズを入れる（確率論的な）解析により、この問題が解決される場合のあることが分かってきた。このような現象は、ノイズによる正則化 (regularization by noise) と呼ばれる。本講演では、次のような分散係数としてホワイトノイズを持つような、5 次非線形シュレディンガー方程式の初期値問題を考え、ノイズによる正則化について説明したい。

$$idu + \partial_x^2 u \circ d\beta(t) = \lambda|u|^4 u dt, \quad (1)$$

$$t > 0, \quad x \in \mathbf{R}$$

$$u(0, x) = u_0(x). \quad (2)$$

但し、 $\beta(t)$ は実 Brown 運動であり、 λ はゼロでない実定数とする。また、 $\partial_x^2 u \circ d\beta(t)$ は Stratonovich 積を表すものとする。分散係数が 1 かつ λ が負である場合は、爆発解（すなわち、有限時間で特異性を持つ解）の存在が知られている。しかし、分散係数がホワイトノイズである場合、“ほとんどすべての初期値”に対し、解は時間大域解的に延長できることが示される。これは、典型的なノイズによる正則化と言える。本講演は、Arnaud Debussche 氏 (Ecole Normale Supérieure de Cachan, Attenne de Bretagne) との共同研究に基づく。

* 京都大学理学研究科 (Department of Mathematics, Kyoto University)