

教授 中西 賢次 (偏微分方程式)

私の研究分野は偏微分方程式の数学解析で、主な対象は非線形波動または非線形分散型と呼ばれる非線形偏微分方程式である。これらは、プラズマ・水面波・超流動・光ファイバーなど様々な物理的状況における、相互作用の強い波動の時空間発展を記述するもので、波の分散性と非線形相互作用の競合により色々な時間変化を現わすことができる。代表的なものは非線形 Schrödinger 方程式や KdV 方程式などが挙げられる。偏微分方程式の理論上もっとも基礎的な初期値問題の局所的可解性については、精密な線形および多重線形の関数評価式の整備によって、広範な方程式と関数空間を扱えるようになった。近年はそれに基づいて解の時間大域的様相の解析が進んでおり、典型的な解からそれらの複合的状況まで徐々に明らかにされつつある。私の近年の研究では一般解全体の様相を捉えることを目指し、特に、異なる典型的挙動の間の時間的遷移や、解空間の中での中間的状態の解析のため、技術開発と現象解明の両軸で研究を行っている。下記論文リスト内の成果としては、散乱・ソリトン・爆発を含む解の時間大域挙動分類について、安定・不安定のソリトンを両方含む場合として、ポテンシャル付き非線形 Schrödinger 方程式の小質量球対称解について、第1励起エネルギーを少し超える範囲まで9分類した [10]。これは安定ソリトンとの無限時間相互作用で大域的分散成分が受ける影響を解析上克服した所がポイントである。一方、これらの大域解析を物理的に自然な低次非線形項に拡張すべく、一般の球対称 Fourier 積の方程式に対して球面平均の Strichartz 評価を導き、3次元非線形 Schrödinger 方程式の平面波解の球対称エネルギー摂動に対する漸近安定性を示した [9]。また、Strichartz 評価の中でも最も強く応用上も重要な時間2乗可積分の場合について、Schrödinger と波動を含む一般の斉次分散関係に対して詳しく調べ、空間指数が無大では双対型非斉次評価が(対称性無しでは)破綻すること、球面2乗平均すれば回復することを示した [6]。また、球対称性 Strichartz 評価の正則化を利用して、4次元 Zakharov 系に対して基底状態以下のエネルギーを持つ球対称解を、散乱と(弱い意味の)爆発に分類した [2]。4次元 Zakharov 系はエネルギー集約現象について、上記の端点 Strichartz 評価が絡んだ複雑なエネルギー臨界性を呈するが、この論文では波動方程式の解をポテンシャルとする Schrödinger 方程式に対する一様 Strichartz 評価という新しい手法を開発した。更に球対称でない場合についても、双線形の端点 Strichartz 評価を利用して、同様な一様評価を導出し、大域存在に関して球対称の仮定を外すことに成功した [1]。他方、確率的な大域挙動解析の第一歩として、非線形 Schrödinger 方程式に対するランダム化終値問題に対する Murphy の結果を改良し、特に3次元平面波解の安定性に関して、殆ど全ての有限エネルギー散乱波について平面波との和に漸近する大域解が一意存在することを示した [7]。非線形項がさらに低次で長距離型の場合については、非常に一般的な時空依存の線形ポテンシャルと多重ソリトンより一般的な非分散性波動成分の介在の下でも、分散性波動成分が線形解に漸近することは無いことを証明した [3]。また、高階修正項を加えた量子 Zakharov 系に対しては、初期値問題の適切性が大幅に改善され、高次元まで電場成分の L^2 保存のみによる大域存在が成り立つことを示した [6]。非線形分散型以外には、Trudinger-Moser 不等式を全平面および円盤上のエネルギー制約下で調べ、最良定数達成元の存在・非存在を隔てる臨界非線形増大度を漸近展開の形で具体的に求め、全空間では第2項が消えることと、どちらの領域でも第3項に Apéry 定数が現れることを示した [5]。また、同様の非線形項を持つ拡散方程式に対して特異性を持つ定常解と正則な時間発展解を構成し、初期値問題の非一意性を示した [4]。

- [1] Timothy Candy, Sebastian Herr and Kenji Nakanishi, *Global wellposedness for the energy-critical Zakharov system below the ground state*. Adv. Math. **384** (2021), 107746.
- [2] Zihua Guo and Kenji Nakanishi, *The Zakharov system in 4D radial energy space below the ground state*. Amer. J. Math. **143** (2021), no. 5, 1527–1600.
- [3] Jason Murphy and Kenji Nakanishi, *Failure of scattering to solitary waves for long-range nonlinear Schrödinger equations*. Discrete Contin. Dyn. Syst. **41** (2021), no. 3, 1507–1517.
- [4] Slim Ibrahim, Hiroaki Kikuchi, Kenji Nakanishi and Juncheng Wei, *Non-uniqueness for an energy-critical heat equation on \mathbb{R}^2* . Math. Ann. **380** (2021), no. 1-2, 317–348.
- [5] Slim Ibrahim, Nader Masmoudi, Kenji Nakanishi and Federica Sani, *Sharp threshold nonlinearity for maximizing the Trudinger-Moser inequalities*. J. Funct. Anal. **278** (2020), no. 1, 108302, 52 pp.
- [6] Yung-Fu Fang and Kenji Nakanishi, *Global well-posedness and scattering for the quantum Zakharov system in L^2* . Proc. Amer. Math. Soc. Ser. B **6** (2019), 21-32.
- [7] Kenji Nakanishi and Takuto Yamamoto, *Randomized final-data problem for systems of nonlinear Schrödinger equations and the Gross-Pitaevskii equation*. Math. Res. Lett. **26** (2019), no. 1, 253-279.
- [8] Zihua Guo, Ji Li, Kenji Nakanishi and Lixin Yan, *On the boundary Strichartz estimates for wave and Schrödinger equations*. J. Differential Equations **265** (2018), no. 11, 5656-5675.
- [9] Zihua Guo, Zaher Hani and Kenji Nakanishi, *Scattering for the 3D Gross-Pitaevskii Equation*. Comm. Math. Phys. **359** (2018), no. 1, 265-295.
- [10] Kenji Nakanishi, *Global dynamics above the first excited energy for the nonlinear Schrödinger equation with a potential*. Comm. Math. Phys. **354** (2017), no. 1, 161-212.