

准教授 星 裕一郎 (数論幾何の研究)

私は、遠アーベル幾何学や p 進タイヒミュラー理論などといった観点を中心として、双曲的な代数曲線の数論幾何学の研究を行っている。

これまでに行った研究の成果として、例えば、以下が挙げられる。

- 遠アーベル幾何学におけるセクション予想の研究：セクション予想の副 p 版の反例の構成 [1]、有理数体や虚二次体上の代数曲線の双有理ガロアセクションの幾何学性の研究。

- 組み合わせ論的遠アーベル幾何学の研究：望月新一氏との共同研究による、ノード非退化型外表現に関する組み合わせ論版遠アーベル予想の解決、数体や混標数局所体上の双曲的代数曲線に付随する外ガロア表現の忠実性の証明、副有限デーン捻りの理論の確立、写像類群の曲面群への外表現に関する位相幾何学版遠アーベル予想の解決 [2]。

- 高次元代数多様体に対する遠アーベル幾何学の研究：次元 4 以下の双曲的多重曲線に対する遠アーベル予想の解決 [3]、木下亮氏・中山能力氏との共同研究による付加構造付き楕円曲線のモジュライ空間に対する遠アーベル予想の解決、狭義単調減少型双曲的多重曲線に対する遠アーベル予想の解決、一般化劣 p 進体上の非特異代数多様体に対する遠アーベル多様体による開基の存在の証明。

- 代数曲線の双曲的通常性の研究：標数 3 での冪零許容固有束・冪零通常固有束に付随するハッセ不変量とカルティエ固有形式との関連の確立や、有限次エタール被覆に対する冪零固有束の通常性に関する p 進タイヒミュラー理論における基本問題の否定的解決。

- 代数曲線の等分点の研究：絶対不分岐底上良還元を持つ代数曲線の等分点の分岐に関する Coleman の予想の研究 [4]。また、アーベル多様体の等分点という概念の遠アーベル幾何学的観点による類似である双曲的代数曲線の穏やかな点の研究。特に、双曲的代数曲線に付随する外ガロア表現の核とその代数曲線の上の穏やかな点の座標の関連についての研究や、数体上のアーベル多様体の有理等分点の有限性という Mordell・Weil の定理の帰結の一点抜き楕円曲線に対する遠アーベル幾何学的類似の証明。

- 合同部分群問題の研究：飯島優氏との共同研究による、モジュラー曲線に付随する外ガロア表現に関する数論的研究の成果を用いた、 11 以上の素数 ℓ に対する種数 1 の有限型双曲的リーマン面の合同部分群問題の副 ℓ 版という位相幾何学的問題の否定的解決。

- 数論的な体に対する遠アーベル幾何学の研究：混標数局所体の絶対ガロア群の間の開準同型射に対して、その開準同型射が体の拡大から生じることと、その開準同型射がガロア表現のホッジ・テイト性を保つことの同値性の証明。また、数体の絶対ガロア群に対する単遠アーベル的復元アルゴリズムの確立や、混標数局所体に関連する様々な遠アーベル幾何学的话题の研究 [5]。

- 正標数双曲的代数曲線の幾何学の研究：古典的なリーマン面の理論における正則座標、射影構造、固有束の間のある自然な関連の正標数代数曲線に対する類似の確立 [6]。丹後曲線の存在に関する研究 [8]。

そして、比較的最近の研究の成果として、以下が挙げられる。

- デュドネ加群の理論と有限本田系の理論を用いて、標数 $p > 0$ の完全体上の p 換れ有限平坦可換群スキームの変形の研究を行った。特に、例えば、 p が奇数であり、かつ、与えられたそのような群スキームが自身のカルティエ双対と同型である場合、基礎体上のヴィットベクトルのなす環へのその群スキームの変形の同型類が唯一であることと、その

群スキームが超特別であることが同値であることを証明した [7]。

- Mumford によるテータ群の理論を用いて、アーベル多様体の上の豊富な有効因子に含まれる等分点の研究を行った。また、その応用として、Raynaud によるテータ因子の理論を適用することで、例えば、奇数標数 p の代数的閉体上の射影的双曲的代数曲線に対して、次数が $p-1$ の約数である巡回エタール被覆であってそのヤコビ多様体の p 階数が正であるものが存在することを証明した。この成果は、そのような代数曲線の代数的基本群の副 p シロ一部分群が自明でないという Raynaud による結果の精密化である [9]。

- 準三点基とはある性質を満たす双曲的軌道代数曲線のことであり、例えば種数 1 以下の任意の双曲的代数曲線は準三点基である。準三点基の絶対版遠アーベル幾何学の研究を行い、特に、ある条件を満たす一般化劣 p 進体（例えば、代数的でヒルベルト的な一般化劣 p 進体、あるいは、 p 進局所体の有限生成拡大体など）の上の準三点基に対する遠アーベル予想の絶対版を解決した。そして、その応用として、非特異代数多様体の遠アーベル多様体による開基の存在という Grothendieck による古典的予測の絶対版を、上の場合と同様の条件を満たす一般化劣 p 進体の上で解決した [10]。

- [1] Existence of nongeometric pro- p Galois sections of hyperbolic curves. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **46** (2010), no. 4, 829–848.
- [2] Topics surrounding the combinatorial anabelian geometry of hyperbolic curves I: inertia groups and profinite Dehn twists (with Shinichi Mochizuki). *Galois-Teichmüller theory and arithmetic geometry*, 659–811, Adv. Stud. Pure Math., **63**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2012.
- [3] The Grothendieck conjecture for hyperbolic polycurves of lower dimension. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **21** (2014), no. 2, 153–219.
- [4] On ramified torsion points on a curve with stable reduction over an absolutely unramified base. *Osaka J. Math.* **54** (2017), no. 4, 767–787.
- [5] Topics in the anabelian geometry of mixed-characteristic local fields. *Hiroshima Math. J.* **49** (2019), no. 3, 323–398.
- [6] Frobenius-projective structures on curves in positive characteristic. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **56** (2020), no. 2, 401–430.
- [7] Pseudo-rigid p -torsion finite flat commutative group schemes. *J. Number Theory* **229** (2021), 261–276.
- [8] A note on the existence of Tango curves. *Kodai Math. J.* **44** (2021), no. 1, 77–80.
- [9] A note on torsion points on ample divisors on Abelian varieties. *Math. J. Okayama Univ.* **64** (2022), 1–11.
- [10] The absolute anabelian geometry of quasi-tripods. *Kyoto J. Math.* **62** (2022), no. 1, 179–224.