准教授 星 裕一郎（ 数論幾何の研究）

私は，遠アーベル幾何学や双曲的通常代数曲線の理論などといった観点を中心として，双曲的な代数曲線の数論幾何学の研究を行っている。

これまでに行った研究の成果として，例えば，以下が挙げられる。

• セクション予想の研究: 数体や p 進局所体上の双曲的代数曲線に対するセクション予想の副 p 版の反例の構成 [1] や，有理数体や虚二次体上の代数曲線の双有理ガロアセクションの幾何学性の研究。

• 代数曲線に対する遠アーベル幾何学の研究: 有限体上の射影的双曲的代数曲線の遠アーベル副 ℓ カスプ化の研究，モノドロミー充満な種数 0 の双曲的代数曲線の同型類や準モノドロミー充満な双曲的代数曲線の有理点の同値類のガロア理論的特徴付け，玉川安騎男氏・松本眞氏による準モノドロミー充満性の ℓ 独立性問題の否定的解決，クンマー忠実体上の非射影的双曲的代数曲線に対する遠アーベル予想の半絶対版の研究，潜在的通常安定還元を持つ p 進局所体上の射影的双曲的代数曲線に対する副 p 遠アーベル良還元判定法の確立，ある条件を満たす一般化劣 p 進体上の準三点基に対する遠アーベル予想の絶対版の解決 [5]。

• 高次元代数多様体に対する遠アーベル幾何学の研究: 次元 4 以下の双曲的多重曲線に対する遠アーベル予想の解決 [2]。木下亮氏・中山能力氏との共同研究による付加構造付き楕円曲線のモジュライ空間に対する遠アーベル予想の解決。狭義単調減少型双曲的多重曲線に対する遠アーベル予想の解決。Grothendieck による非特異代数多様体に対する遠アーベル多様体から成る開基の存在問題の一般化劣 p 進体上への一般化の解決。辻村昇太氏・室谷岳寛氏との共同研究による実閉体上のある条件を満たす代数多様体の代数的基本群における幾何学的部分群の単遠アーベル的復元アルゴリズムの確立。ある条件を満たす一般化劣 p 進体上での非特異代数多様体に対する遠アーベル多様体から成る開基の存在問題の絶対版の解決 [5]。

• 組み合わせ論的遠アーベル幾何学の研究: 望月新一氏との共同研究による，節点非退化外表現に関する組み合わせ論版遠アーベル予想の研究，円分物の同期化の理論の確立，副有限デーン捻りの基礎理論の整備，写像類群の曲面群への外表現に関する位相幾何学版遠アーベル予想の解決，数体や混標数局所体上の双曲的代数曲線に付随する外ガロア表現の忠実性の証明。

• 数論的な体に対する遠アーベル幾何学の研究: 混標数局所体の絶対ガロア群の間の開準同型射に対して，その開準同型射が体の拡大から生じることと，その開準同型射がガロア表現のホッジ・テイト性を保つことの同値性の証明。数体のある局所的乗法的構造による加法構造の復元の研究。混標数局所体に関連する様々な遠アーベル幾何学的話題の研究，特に，例えば，整数環と対数殻という 2 つの整構造の比較，混標数局所体の絶対ガロア群の間の開準同型射の遠アーベル幾何学的観点による研究，特殊な混標数局所体に関連するいくつかの単遠アーベル的復元アルゴリズムの確立，絶対ノルム射の単遠アーベル的復元アルゴリズムの確立などといった研究。

• 代数曲線の双曲的通常性の研究: 標数 3 での冪零許容固有束や冪零通常固有束に付随するハッセ不変量とカルティエ固有形式との関連の確立や，有限次エタール被覆に対する冪零固有束の通常性の安定性に関する p 進タイヒミュラー理論における基本問題の否

定的解決。数値的不変量が小さい場合の冪零許容固有束や冪零通常固有束に付随する超特異因子の具体的記述の研究。標数 3 で種数 5 以下の射影的双曲的超楕円的代数曲線の双曲的通常性の証明。

• 代数曲線の等分点の研究: 絶対不分岐底上良還元を持つ代数曲線の等分点の分岐に関する Coleman の予想の研究 [3]。また，アーベル多様体の等分点という概念の遠アーベル幾何学的観点による類似である双曲的代数曲線の穏やかな点の研究。特に，双曲的代数曲線に付随する外ガロア表現の核とその代数曲線の上の穏やかな点の座標の関連についての研究や，数体上のアーベル多様体の有理等分点の有限性という Mordell· Weil の定理の帰結の一点抜き楕円曲線に対する遠アーベル幾何学的類似の証明。

• 合同部分群問題の研究: 飯島優氏との共同研究による，モジュラー曲線に付随する外ガロア表現に関する数論的研究の成果を用いた，11 以上の素数 ℓ に対する種数 1 の有限型双曲的リーマン面の合同部分群問題の副 ℓ 版という位相幾何学的問題の否定的解決。

• 正標数双曲的代数曲線の幾何学の研究: 標数 p の射影的双曲的代数曲線上の階数 $p-1$ の休眠乍の同型類の一意性の証明。古典的なリーマン面の理論における正則座標，射影構造，固有束の間のある自然な関連の正標数類似の確立 [4]。丹後曲線の存在に関する研究。

そして，比較的最近の研究の成果として，以下が挙げられる。

• 内田興二氏による数体の可解閉拡大に対する Neukirch· 内田の定理の一般化の自然な延長線上の研究として，数体の可解閉拡大のガロア群に対する単遠アーベル的復元アルゴリズムを確立した [6]。

• 望月新一氏との共同研究として，組み合わせ論的遠アーベル幾何学の研究を行った。特に，節点非退化外表現に関する組み合わせ論版遠アーベル予想の研究，有限型双曲的リーマン面の純組紐群の副有限完備化のファイバー保存的な連続外部自己同型射に対する組み合わせ論的カスプ化の研究，三点基の同期化の理論の確立，組み合わせ論的カスプ化の貼り合わせの理論の研究などを行った [7]。

• 望月新一氏，Ivan Fesenko 氏，南出新氏，Wojciech Porowski 氏との共同研究として，宇宙際タイヒミュラー理論の研究を行った。特に，剰余標数 2 の設定におけるエタールテータ関数の理論を確立させて，それを基に宇宙際タイヒミュラー理論を発展させた。この発展により，有理数体や虚二次体上でのディオファントス幾何学に関して，従来の宇宙際タイヒミュラー理論による帰結よりも，より精密な帰結を得ることに成功した。そして，その応用として，Fermat 予想の別証明を与えた [8]。

• 西尾優氏との共同研究として，混標数局所体の絶対ガロア群の研究を行った。特に，適当な条件を満たす混標数局所体の絶対ガロア群の外部自己同型群の中で，体論的な外部自己同型射のなす部分群が，その共役たちが無限集合を成す非正規部分群であることを証明した [9]。

• 南出新氏と望月新一氏との共同研究として，有限型双曲的リーマン面の純組紐群の副有限完備化の研究を行った。特に，そのような副有限完備化の純群論的構造から，設定に付随する様々な数値的不変量や，一般化ファイバー部分群と呼ばれるその副有限完備化の閉部分群を復元する単遠アーベル的復元アルゴリズムを確立した。また，そのような復元アルゴリズムの応用として，グロタンディーク・タイヒミュラー群に対する簡明で純群論的な表示を得ることに成功した [10]。

[1] Existence of nongeometric pro-p Galois sections of hyperbolic curves, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **46** (2010), no. **4**, 829–848.

[2] The Grothendieck conjecture for hyperbolic polycurves of lower dimension, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **21** (2014), no. **2**, 153–219.

[3] On ramified torsion points on a curve with stable reduction over an absolutely unramified base, *Osaka J. Math.* **54** (2017), no. **4**, 767–787.

[4] Frobenius-projective structures on curves in positive characteristic, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **56** (2020), no. **2**, 401–430.

[5] The absolute anabelian geometry of quasi-tripods, *Kyoto J. Math.* **62** (2022), no. **1**, 179–224.

[6] Mono-anabelian reconstruction of solvably closed Galois extensions of number fields, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **29** (2022), no. **3**, 257–283.

[7] *Topics surrounding the combinatorial anabelian geometry of hyperbolic curves II–tripods and combinatorial cuspidalization* (with Shinichi Mochizuki), Lecture Notes in Mathematics, **2299**. Springer, Singapore, 2022.

[8] Explicit estimates in inter-universal Teichmüller theory (with Shinichi Mochizuki, Ivan Fesenko, Arata Minamide, and Wojciech Porowski), *Kodai Math. J.* **45** (2022), no. **2**, 175–236.

[9] On the outer automorphism groups of the absolute Galois groups of mixed-characteristic local fields (with Yu Nishio), *Res. Number Theory* **8** (2022), no. **3**, Paper No. **56**, 13 pp.

[10] Group-theoreticity of numerical invariants and distinguished subgroups of configuration space groups (with Arata Minamide and Shinichi Mochizuki), *Kodai Math. J.* **45** (2022), no. **3**, 295–348.